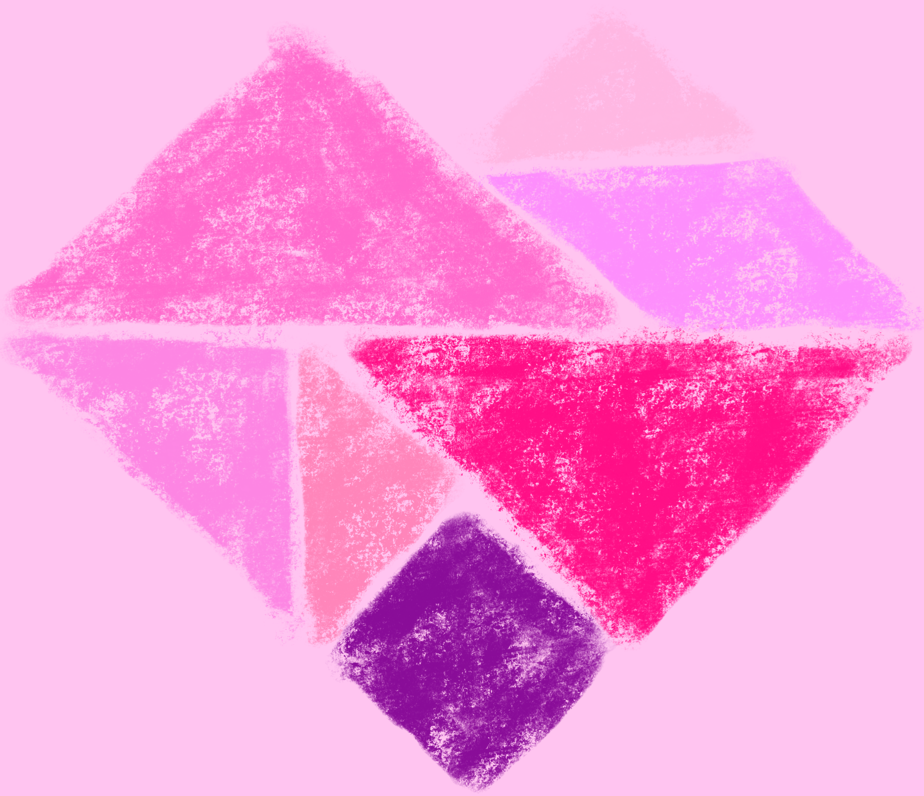
Centro de Alto Rendimiento en Matemáticas



I Olimpiada Femenil: 2015

Problemas y soluciones

I Olimpiada Femenil 2015

Equipo CARMA

28 de enero de 2022

Enero 2022

Los problemas originales de este material son autoría del Equipo CARMA, a saber: Armando Moreno, Luis Islas, Jonathan Pérez y Danielle Flores. En 2015, el Equipo CARMA incluía a José Manuel Jiménez, Trinidad Barajas, Germán Chávez, José Ángel Sosa, José Ramón Guardiola y Siddhartha Morales. Este material puede ser distribuido de manera libre porque nuestro compromiso es con la creación y divulgación de material para Olimpiada de Matemáticas; **por favor considera hacer un donativo, porque todxs tenemos que comer y pagar renta.** Por el amor de Euler, no subas este material a Scribd ni cobres por compartirlo.

Para cualquier correción, por favor comunícate con nosotros vía Facebook o a nuestro correo electrónico en matematicascarma@gmail.com.

La persona a cargo del material es Danielle Flores.

Primera edición: Abril 2015
Primera re-edición: Enero 2022

Editorial Dinosaurio
San Luis Potosí, México
`carmatematicas (at) gmail (dot) com`

Introducción

¿Por qué una Olimpiada Femenil?

En el mes y medio que transcurrió desde que publicamos en internet y redes sociales la convocatoria para la I Olimpiada Femenil de Matemáticas recibimos mucho apoyo y ánimos para llevar a cabo la competencia, pero también recibimos mucha crítica. Los señalamientos —que en muchos casos vienen de mujeres— entienden el concurso como una separación artificial e innecesaria, la idea de que separamos a las mujeres porque no pueden ganarle a los hombres; esto no es así, pero comprendemos desde dónde viene la crítica: entre los comentarios de Facebook a las distintas publicaciones, varios jóvenes se retaban a participar con frases como "este concurso sí lo puedes ganar". Esa es una de las ideas que queremos combatir: la idea de que el concurso tiene menor nivel por el hecho de que son mujeres [1], la idea de que un hombre –cualquiera– podría ganar este concurso sencillamente por ser hombre. Esos dos postulados son ridículos [2] e infundados [3].

La lucha por una equidad de género en la Olimpiada –y, por extensión, entre los y las estudiantes de carreras de Ciencia, Tecnología y Matemáticas– se ha entendido muchas veces como una urgencia por tener la misma cantidad de alumnos y de alumnas participando o estudiando, incluso si esto se logra por medios artificiales. No es así: cuando llega el momento de elegir carrera profesional existen muchas condiciones que ya han alejado a las niñas y jóvenes de elegir una carrera en Ciencia. La idea más fuerte que hay que combatir es que las Matemáticas son un club de niños y entender que las expectativas que la familia y los profesores tienen al respecto influyen enormemente en la decisión; se trata de darnos cuenta que algunas de nuestras actitudes terminan por cerrarle las puertas de Ciencia, Tecnología y Matemáticas a miles de niñas entusiastas [4].

En Olimpiada –y en muchas otras actividades extra curriculares durante Educación Básica y Educación Superior–, las chicas todavía llevan una carga extra que no llevan los chicos: muchas de ellas tienen que dedicar el fin de semana a labores del hogar

[1] Sin embargo, muchas participantes nos confesaron que esa idea las animó a inscribirse

[2] La lista de ganadoras no nos sorprendió demasiado; conocemos a estas chicas: las hemos visto ganar en la Olimpiada de Otoño, en la ONMAPS, en la OMM y sabemos de su trabajo constante y talento. Pero también conocimos muchas alumnas nuevas que podrían tener excelentes participaciones si se siguen preparando.

[3] Basta ver un examen de la European Girls Mathematical Olympiad o de la China Girls Mathematical Olympiad que tienen problemas a veces más difíciles que los de una IMO. Hemos transcrito las pruebas de estos exámenes más adelante.

[4] Un estudio reciente en Israel, por ejemplo, mostró que, en promedio, los profesores evalúan más bajo un mismo examen si saben que es de una niña a si no saben de quién es.

porque son vistas, todavía en varios lugares, como "tarea de mujer". Además, muchas familias otorgan con mayor facilidad permiso a sus hijos para asistir a entrenamientos dentro o fuera de la ciudad que a sus hijas; en muchas familias, el niño puede viajar solo pero la niña no, que implica a veces un gasto adicional que puede terminar por alejarla de participar.

Es cierto, quizás esto no sea tan visible en contextos urbanos de clase media para arriba, pero están ahí [5]. Las alumnas que ya han destacado a nivel nacional e internacional es claro que cuentan con el apoyo de sus familias y de sus escuelas; esto no es la regla general en nuestro país.

Lo que pudimos ver con esta experiencia es que hay cientos de alumnas en todo el país con muchas ganas de participar en concursos de Matemáticas y, además, con todas las condiciones para hacerlo de manera destacada. Sin embargo, en la Olimpiada Mexicana de Matemáticas difícilmente vemos más del 10 % de mujeres participantes. Es claro que algo estamos haciendo mal en el proceso.

Desde hace un par de años, México ha decidido aceptar la invitación para participar en la EGMO, Olimpiada exclusiva para mujeres en las que hemos tenido, como país, participaciones muy destacadas. Sin embargo, esta participación internacional no se ha complementado con un programa nacional para atraer más niñas y jóvenes a participar en estos concursos; esperamos que la Olimpiada Femenil de CARMA ayude a llenar ese hueco [6].

[5] En varias ocasiones, he podido ir a dar taller de Olimpiada a escuelas muy exclusivas de puras mujeres. Pese a hacer la invitación pública a participar, más de una alumna se espera a interceptarme fuera del salón o en el recreo para pedirme más información. Cuando les pregunto por qué no lo hicieron durante la clase, la respuesta es siempre la misma: les da pena admitir frente a sus compañeras que les gustan las matemáticas por temor a que las vean menor femeninas.

[6] Esta introducción fue originalmente escrita en 2015. La Olimpiada Mexicana de Matemáticas celebrará su primer Concurso Nacional Femenil en febrero 2022, unos días antes de esta nueva segunda edición.

Ganadoras

La I Olimpiada Femenil de Matemáticas 2015 se celebró el sábado 8 de marzo en una impresionante cantidad de sedes en todo el país. La segunda etapa se celebró casi un mes después, únicamente en las sedes donde avanzaron participantes. Las sedes y escuelas anfitrionas fueron las siguientes; con ellas, sus directivos y profesores entusiastas estamos muy agradecidos y les debemos el éxito de esta primera edición:

1. Aquismón, SLP: ESG Jesús Romero Flores
2. Cedral, SLP: Cobach plantel 03
3. Ciudad Valles, SLP: Instituto Mariano Arista / Cobach plantel 06
4. Coatzacoalcos, VER: Bachillerato Tecnológico John Sparks
5. Colima, COL: Colegio Salesiano Cuauhtémoc
6. Emiliano Zapata, MOR: ESG María del Carmen Pineda Jesús
7. Guadalajara, JAL: CEDI
8. Guadalupe, NL: Instituto “Hoolan” Have Fun Learning
9. Guanajuato, GTO: CIMAT, AC.
10. Ixmiquilpan, HGO: Preparatoria del Valle
11. Jaluco, JAL: CECyTE Jalisco plantel Cihuatlán
12. Lagos de Moreno, JAL: Centro Universitario Los Lagos, UG
13. Matamoros, TAM: Colegio Oralia Guerra de Villarreal
14. Monterrey, NL: Prepa 2, UANL
15. Monterrey 2, NL: Instituto Científico y Literario ICYL
16. Nuevo Laredo, TAM: Colegio de Educación Profesional Técnica del Estado de Tamaulipas 246
17. Oaxaca, OAX: Instituto Cumbres
18. Ocoyoacac, MEX: Casa de la Cultura de Ocoyoacac
19. Ocozocuautla, CHIS: Prepa 1
20. Papaloapan, OAX: IEBO Plantel 58
21. Querétaro, QRO: Colegio Miguel Ángel
22. Rioverde, SLP: Cobach plantel 05
23. San Luis, SLP: Facultad de Ciencias, UASLP
24. San Nicolás de los Garza, NL: Facultad de Ciencias Físico-Matemático, UANL
25. San Cristóbal de las Casas, CHIS: Centro Cultural Calmécac
26. Tamazunchale, SLP: ESG Justo Sierra Méndez
27. Tequisquiapan, QRO: Instituto Sovany
28. Tlaquepaque, JAL: CECyTE Jalisco plantel Tlaquepaque
29. Torreón, COAH: Instituto Británico de Torreón
30. Tuxtla Gutiérrez, CHIS: Colegio Miguel Alemnán Valdez

31. Xalapa, VER: Facultad de Matemáticas, UV
32. Zacatecas, ZAC: Colegio de Bachilleres del Estado de Zacatecas plantel Roberto Cabral del Hoyo

Agradecemos profundamente a nuestros amigos y contactos en cada una de las sedes que hicieron posible que participaran tantas alumnas de todo el país. Aunque ya conocíamos a varios de quienes aceptaron la responsabilidad de gestionar una sede, con muchos de ellos fue el primer acercamiento y esperamos poder entablar una relación de colaboración en el futuro.

Es el primer concurso que organizamos que tiene más de una etapa. En la primera etapa anunciamos premios individuales de dos tipos: Gran Pez, por sede y categoría, y Globales, por categoría. Las alumnas ganadoras de Gran Pez aparecieron publicadas en undostresporcarma.com y en redes sociales; no reproducimos esas listas aquí.

Las ganadoras Globales fueron:

Koala

Primer Lugar

- Pamela Martín del Campo Hernández (Instituto Británico de Torreón, Torreón)

Mención Honorífica

- Dayra Hernández Rodríguez (Instituto Federico Froebel, Monterrey)
- Ximena Bayana Sauceda (Colegio Miguel Ángel, Querétaro)
- Mariana Ramírez Sánchez (Centro Infantil Unión Americana, Guadalajara)
- Naomi Janette Nuño Contreras (CEDI Arboledas, Guadalajara)
- Verónica Corona Rodríguez (Colegio Miguel Ángel, Querétaro)

Novata

- Ameyalli González Morales (Colegio Miguel Ángel, Querétaro)

Walabi

Primer Lugar

- Ana Paula Ramírez Sánchez (CEDI, Guadalajara)

Mención Honorífica

- Jeoun Lee (Colegio San Patricio del Paseo, Monterrey)
- Nathalia del Carmen Jasso Vera (Escuela Secundaria Técnica 32, Guanajuato)
- Lety Velázquez Velázquez (Instituto Sovany, Tequisquiapan)

- Sofía Ingingerth Cañas Urbina (MATEAM, Ocozocuautla)
- Danya Carolina Gómez Cantú (CARA Secundaria 33, Monterrey)

Novata

- Diana Laura Miranda Muñoz (Instituto Británico de Torreón, Torreón)

Mini Canguro

Primer Lugar

- Diana Espinosa Ruiz (Colegio Agnes Gonxha, San Luis)
- Elisa Espinosa Ruiz (Colegio Agnes Gonxha, San Luis)

Mención Honorífica

- Leyre Carpinteyro Palos (Instituto Cervantes Apostólica, San Luis)
- Kapioma Villareal Haro (Instituto del Carmen de Guadalupe, Zacatecas)
- Cristina Quaglia Martínez (ITESM campus San Luis, San Luis)
- Marisol Salgado Bailón (Instituto Potosino, San Luis)
- Mariola Camacho Lie (John Sparks, Coatzacoalcos)

Novata

- Ana del Socorro Viramontes Medina (Ingeniero y General Felipe B. Berriózabal, Zacatecas)

Canguro

Primer Lugar

- Shaira Rocío Hernández Flores (Cobach 03, Cedral)

Mención Honorífica

- Ileana Elizabeth Hernández Chávez (Cobao 06: Pueblo Nuevo, Oaxaca)
- Yareli Navarro Martínez (Cobach 28, San Luis)
- Adriana Guadalupe Zárate Rico (CECyTEJ 04: Cocula, Tlaquepaque)
- Diana Laura Ramírez Hinojosa (CEDI, Guadalajara)
- Larissa Ontiveros Villafaña (Instituto América de Estudios Superiores, Nuevo Laredo)

Novata

- Ariadna Montserrat Ramírez Matías (Cobao 06: Pueblo Nuevo, Oaxaca)

Capítulo 1

Enunciados de los Problemas

Presentamos los exámenes que se aplicaron en la I Olimpiada Femenil de Matemáticas. Les recordamos que las categorías corresponden a:

- Koala: quinto y sexto de primaria
- Walabi: primero y segundo de secundaria
- Mini Canguro: tercero de secundaria y primer año de preparatoria
- Canguro: segundo y tercer año de preparatoria

Transcribimos los enunciados de los problemas tal y como aparecieron en los exámenes que presentaron las participantes. Aparecen primero los exámenes de la Primera Etapa en cada una de las cuatro categorías y, posteriormente, los exámenes de la Etapa Final en cada una de las cuatro categorías. Después de esto, aparecen las soluciones a cada uno de los problemas planteados.

Koala, Primera Etapa

Problema 1. Sharol da un paso y dice "Gallo", da otro paso y dice "Gallina", da otro paso y dice "Pollito" y lo repite así. Después de dar 100 pasos, ¿qué palabra ha dicho más veces?

Problema 2. Una moneda mágica cumple que de cinco veces seguidas que la lanzas, exactamente dos veces cae SOL y las otras tres cae ÁGUILA. Mónica ha lanzado la moneda seis veces y escrito los resultados en una hoja: $ASAASA$. ¿Qué va a salir a continuación?

Problema 3. Diana y Elisa quieren ver quién puede subir primero una escalera de 100 escalones. En el tiempo que a Elisa le toma subir dos escalones, Diana sube 3. Sintiéndose muy confiada, Diana le dio a Elisa una ventaja de 30 escalones. ¿Quién llega primero al final de la escalera?

Problema 4. Leyre juega un juego en que responde siempre "Sí", "No", "Tal vez", "A lo mejor", "Quizás" en ese orden, empezando por "Sí". Su mamá le ha hecho 27 preguntas hasta ahora. ¿Qué le va a contestar a continuación?

Problema 5. Ordena las fracciones de mayor a menor: $\frac{6}{25}, \frac{7}{27}, \frac{8}{31}$.

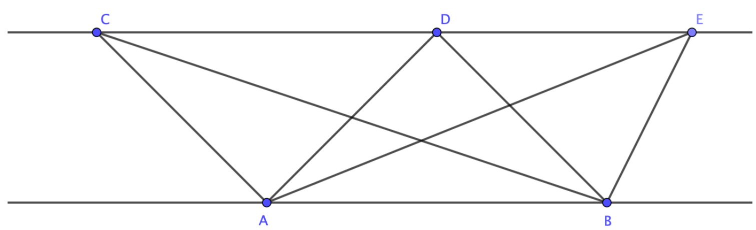
Problema 6. Una pizza mediana es un círculo de radio $10cm$ mientras que una pizza grande es un círculo de radio $12cm$. Si ambas pizzas se dividen en 8 rebanadas iguales, ¿cuál es la diferencia de área entre la rebanada de pizza grande y la rebanada de pizza mediana?

Problema 7. Evelyn es capitana de su equipo de Handball. Compraron algunas pelotas y algunos conos naranjas para sus entrenamientos. En total, compraron 10 cosas. Si cada pelota cuesta 100 pesos, cada cono naranja cuesta 25 y en total pagaron 550 pesos, ¿cuántas pelotas compraron?

Problema 8. El equipo de Handball de Evelyn va a jugar un torneo regional. Deben visitar Guadalajara, Querétaro, San Luis y Monterrey. La única condición es que vayan a San Luis justo después de ir a Monterrey y no antes. ¿De cuántas maneras podrían hacer la gira?

Problema 9. Diana trazó un círculo de diámetro 13 con su compás. Elisa trazó un círculo cuyo diámetro es igual al radio del círculo que trazó Diana. ¿Cuántas veces cabe el área del círculo de Elisa en el área del círculo de Diana?

Problema 10. En la figura aparecen dos líneas paralelas. Con puntos sobre ellas, se forman tres triángulos: ABC, ABD, ABE. ¿Cuál de los tres tiene más área?



Problema 11. Damaris quiere ponerse un reto de lectura durante marzo y terminar 5 libros que tienen 92, 110, 228, 125 y 45 páginas cada uno. Quiere leer todos los días y leer la misma cantidad de páginas cada día, excepto quizás el último. ¿Cuál es el menor número de páginas completas que tiene que leer cada día del mes de marzo para alcanzar su meta?

Problema 12. Florencia tiene 3 perros: Lola, Ronaldo y Toto. Las noches de lunes les da comida en sobrecitos. Tiene muchísimos sobres de dos sabores distintos en una caja adentro de la despensa pero se fundió el foco así que no puede ver de qué son. ¿Cuál es la menor cantidad de sobres que tiene que sacar para asegurarse de que tiene suficientes para darles dos del mismo sabor a cada perro?

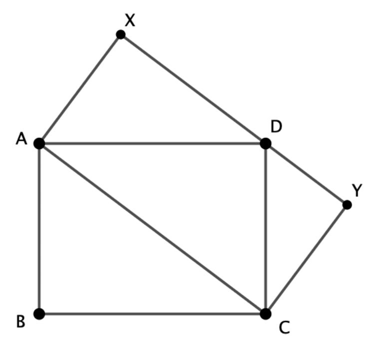
Walabi, Primera Etapa

Problema 1. Diana y Elisa quieren ver quién puede subir primero una escalera de 100 escalones. En el tiempo que a Elisa le toma subir dos escalones, Diana sube 3. Sintiéndose muy confiada, Diana le dio a Elisa una ventaja de 30 escalones. ¿Quién llega primero al final de la escalera?

Problema 2. Leyre juega un juego en que responde siempre "Sí", "No", "Tal vez", "A lo mejor", "Quizás" en ese orden, empezando por "Sí". Su mamá le ha hecho 27 preguntas hasta ahora. ¿Qué le va a contestar a continuación?

Problema 3. En la mesa había 15 papelitos. Petunia tomó algunos de esos papelitos y partió cada uno de los que tomó en 9 pedacitos y los regresó a la mesa. Si al final hay 63 papelitos sobre la mesa, ¿cuántos papelitos tomó Petunia?

Problema 4. En la siguiente figura, ¿cuál rectángulo tiene más área: el $ABCD$ (horizontal) o el $AXYC$ (diagonal)?



Problema 5. Evelyn es capitana de su equipo de Handball. Compraron algunas pelotas y algunos conos naranjas para sus entrenamientos. En total, compraron 20 cosas. Si cada pelota cuesta 100 pesos, cada cono naranja cuesta 25 y en total pagaron 875 pesos, ¿cuántas pelotas compraron?

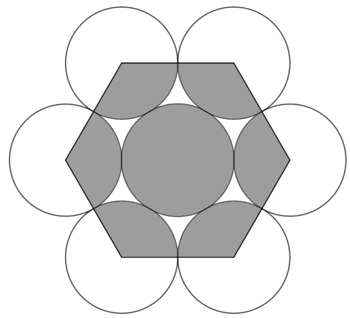
Problema 6. Diana trazó un círculo con su compás. Elisa trazó un círculo cuyo diámetro es igual al radio del círculo que trazó Diana. ¿Cuántas veces cabe el área del círculo de Elisa en el área del círculo de Diana?

Problema 7. Damaris quiere ponerse un reto de lectura durante marzo y terminar 5 libros distintos, cada uno tiene 50 páginas más que el anterior y el de en medio tiene 250. Quiere leer la misma cantidad de páginas todos los días. ¿Cuál es el menor número de páginas completas que tiene que leer cada día del mes de marzo para alcanzar su meta?

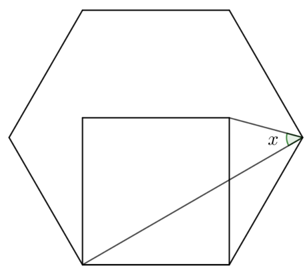
Problema 8. Florencia tiene 5 perros: Lola, Petunia, Ronaldo, Toto y Totoro. Las noches de lunes les da comida en sobrecitos. Tiene muchísimos sobres de tres sabores distintos en una caja adentro de la despensa pero se fundió el foco así que no puede ver de qué son. ¿Cuál es la menor cantidad de sobres que tiene que sacar para asegurarse de que tiene suficientes para darles tres del mismo sabor a cada perro?

Problema 9. Dulce Jazmín quiere cambiar la contraseña de su cuenta de Facebook. Quiere empezar con dos letras distintas de las letras de su nombre, luego poner los dos dígitos del día de su cumpleaños, luego poner la palabra "chocolate" y terminar con los últimos dos dígitos del año en que nació. Además, necesita que una de todas las letras sea mayúscula. ¿Cuántas contraseñas distintas puede hacer?

Problema 10. La siguiente figura está formada por siete círculos de radio 1, tangentes entre sí. Se unieron los centros para formar un hexágono regular. ¿Cuánto vale el área sombreada?



Problema 11. Un cuadrado comparte lado con un hexágono regular como se muestra en la figura anterior. ¿Cuánto mide el ángulo marcado con x? Recuerda que los ángulos interiores de un triángulo suman 180 grados.



Problema 12. Tenemos 100 enteros positivos que al multiplicarlos dan como resultado 72. ¿Cuál es el menor número que podemos obtener como resultado de su suma?

Mini Canguro, Primera Etapa

Problema 1. En la mesa había 15 papelitos. Petunia tomó algunos de esos papelitos y partió cada uno de los papelitos que tomó en 9 pedacitos. Si al final hay 79 papelitos sobre la mesa, ¿cuántos papelitos tomó Petunia?

Problema 2. Hoy es sábado 7 de marzo del 2015. ¿Qué día de la semana será el 7 de marzo del 2025? Recuerda que el 2016 es bisiesto.

Problema 3. Bombón, Burbuja y Bellota quieren subir una escalera de 100 escalones. En el tiempo en que Bellota sube 2 escalones, Bombón sube 3. Además, en el tiempo en que Burbuja sube 4 escalones, Bombón sube 5. Sintiéndose muy confiada, Bombón le da 30 escalones de ventaja a Bellota y 24 escalones de ventaja a Burbuja. ¿Quién llega primero al final de la escalera?

Problema 4. Sharol nació después de 1991 pero antes de 1999. Un día decidió multiplicar todos los números de los años en que ha vivido contando el 2015 y obtuvo un número muy grande. Escribe los últimos seis dígitos de ese número.

Problema 5. Valeria pensó en un número entero mayor a 15. Daniela le dijo que le sumara 3, luego lo multiplicara por 11, luego le sumara 4 y luego le restara el número que pensó. ¿Cuál es el último dígito del resultado que tiene Valeria en la mente?

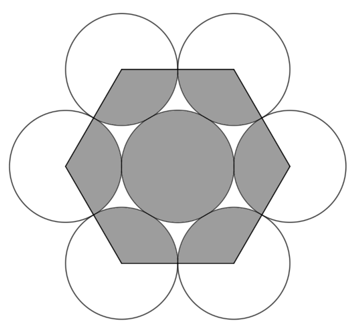
Problema 6. Dulce Jazmín quiere cambiar la contraseña de su cuenta de Facebook. Quiere que las primeras dos letras sean letras distintas de su nombre, luego poner los dos dígitos del día de su cumpleaños, luego poner la palabra "chocolate" y terminar con los últimos dos dígitos del año en que nació. Además, necesita que una de todas las letras sea mayúscula. ¿Cuántas contraseñas distintas puede hacer?

Problema 7. Leyre tiene 15 enteros cuyo producto es igual a 2015. Si los 13 más pequeños suman lo mismo que el segundo más grande, ¿cuánto vale el más grande?

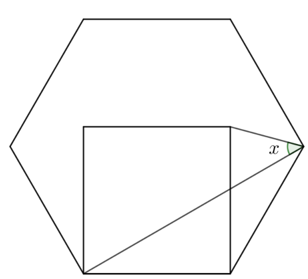
Problema 8. Un triángulo equilátero y un hexágono regular tienen el mismo perímetro. Si el área del triángulo es 2, ¿cuál es el área del hexágono?

Problema 9. A Damaris le gusta mucho leer y tiene los 7 libros de Harry Potter, los 3 libros de Divergente y los 3 libros de los Juegos del Hambre. Los quiere ordenar en su librero de la siguiente manera: quiere que el primer libro de la izquierda sea uno de Harry Potter, luego uno que no sea de Harry Potter, luego uno que sí, uno que no, y así hasta ordenarlos todos. ¿De cuántas maneras distintas puede ordenar sus libros siguiendo esta regla? Puedes dejar tu respuesta expresada como una multiplicación.

Problema 10. La siguiente figura está formada por siete círculos de radio 1, tangentes entre sí. Se unieron los centros para formar un hexágono regular. ¿Cuánto vale el área sombreada?



Problema 11. Un cuadrado comparte lado con un hexágono regular como se muestra en la figura anterior. ¿Cuánto mide el ángulo marcado con x? Recuerda que los ángulos interiores de un triángulo suman 180 grados.



Problema 12. Encuentra el menor entero positivo que tiene exactamente 5 divisores de los cuales únicamente uno es menor a 20. Puedes expresar tu respuesta como producto de primos.

Canguro, Primera Etapa

Problema 1. Sharol nació después de 1991 pero antes de 1999. Un día decidió multiplicar todos los números de los años en que ha vivido hasta el 2015 y obtuvo un número muy grande. Escribe los últimos seis dígitos de ese número.

Problema 2. Bombón, Burbuja y Bellota quieren subir una escalera de 100 escalones. En el tiempo en que Bellota sube 2 escalones, Bombón sube 3. Además, en el tiempo en que Burbuja sube 4 escalones, Bombón sube 5. Sintiéndose muy confiada, Bombón le da 30 escalones de ventaja a Bellota y 24 escalones de ventaja a Burbuja. ¿Quién llega primero al final de la escalera?

Problema 3. Valeria pensó en un número entero mayor a 15. Daniela le dijo que le sumara 3, luego lo multiplicara por 11, luego le sumara 4 y luego le restara el número que pensó. ¿Cuál es el último dígito del resultado que tiene Valeria en la mente?

Problema 4. Un triángulo equilátero y un hexágono regular tienen el mismo perímetro. Si el área del triángulo es 2, ¿cuál es el área del hexágono?

Problema 5. A Damaris le gusta mucho leer y tiene los 7 libros de Harry Potter, los 3 libros de Divergente y los 3 libros de los Juegos del Hambre. Los quiere ordenar en su librero de la siguiente manera:

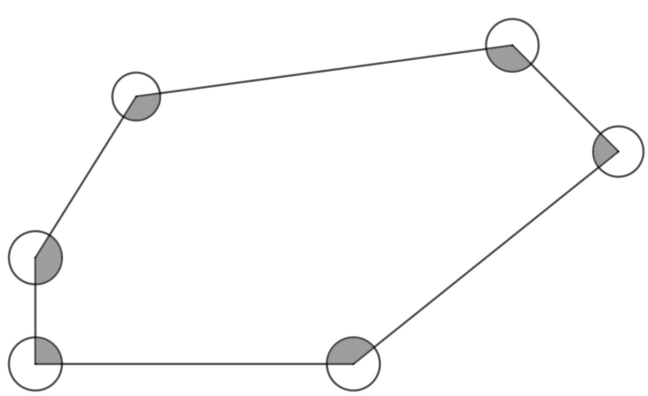
- al menos los primeros dos y los últimos dos libros son de Harry Potter,
- los libros de Divergente están juntos aunque no necesariamente en orden,
- los de Juegos del Hambre están juntos aunque no necesariamente en orden.
- los libros de Divergente y los de los Juegos del Hambre no se toquen entre sí.

¿De cuántas maneras distintas puede ordenar sus libros siguiendo esta regla? Puedes dejar tu respuesta expresada como una multiplicación.

Problema 6. Encuentra el menor entero positivo que tiene exactamente 5 divisores de los cuales únicamente uno es menor a 98. Puedes expresar tu respuesta como producto de primos.

Problema 7. De todos los números de tres cifras, ¿cuántos cumplen que todos sus dígitos son distintos y, además, son múltiplos de 55?

Problema 8. La siguiente figura es un hexágono irregular. Cada uno de sus vértices se tomó como el centro de un círculo de radio 1. ¿Cuánto vale el área sombreada?



Problema 9. Tenemos tres números. Sabemos que $a+b+c=7$ y que $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}=\frac{7}{10}$. ¿Cuánto vale $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$?

Problema 10. Diana y Elisa juegan un juego. Diana piensa un número de 4 cifras. Elisa elimina alguno de los dígitos y obtiene un número de tres cifras. Diana se dio cuenta que, sin importar cuál de los dígitos elimine Elisa, el resultado siempre es un múltiplo de 3. ¿Cuántos números distintos de cuatro cifras cumplen esto?

Problema 11. Multiplicas todos los enteros positivos del 1 al 2015. ¿Cuántas veces puedes dividir el resultado entre 43 antes de que el resultado tenga punto decimal?

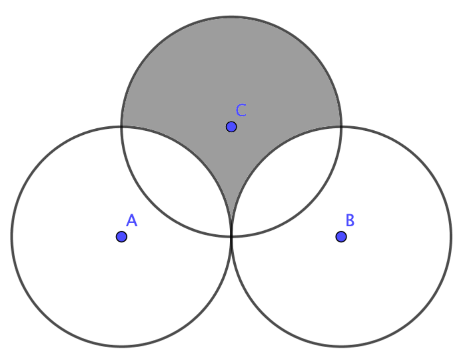
Problema 12. Una pieza de madera de 35 pulgadas por 1 pulgada se corta en seis pedazos haciendo cinco cortes en ángulo de 45°. Las cuatro piezas en forma de trapecio se usaron para crear el marco para una copia a escala de una fotografía que medía 17,5 × 20 pulgadas. ¿Cuál es el área interior del marco?

Koala, Etapa Final

Problema 1. Marinela cocina un tipo de postre para cada día de la semana empezando en domingo. Cada día la opción es pastel, pay, helado o chocolate. El mismo postre nunca se sirve dos días seguidos. Además, siempre hay pastel en viernes para celebrar cumpleaños. ¿Cuántos menús distintos puede haber para una semana?

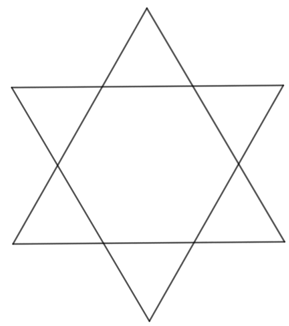
Problema 2. Cinco números $A, B, 5, C, D, E, F, G, H$ cumplen que cualesquiera tres consecutivos en la lista suman 30. ¿Cuánto vale $A+H$?

Problema 3. En la siguiente figura mostramos tres círculos del mismo radio con centros A, B y C, respectivamente. Dos de ellos se tocan en un único punto y el tercero pasa por ese mismo punto. Si el radio mide $1cm$, ¿cuánto vale el área sombreada?



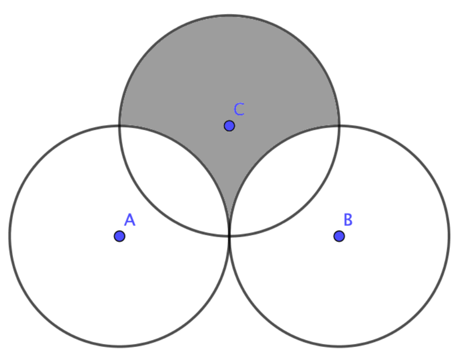
Problema 4. En un torneo con 6 equipos, cada equipo jugó una vez contra cada uno de los otros 5 equipos. En cada partido hay un ganador, es decir, no hay empates. Al final del torneo, los equipos están ordenados según la cantidad de juegos que ganaron. ¿Cuál es la mayor cantidad de equipos que podrían estar empatados en primer lugar con más juegos ganados?

Problema 5. En la siguiente figura se muestran dos triángulos equiláteros iguales de área $4cm^2$. Los triángulos se han cruzado para formar una estrella: la intersección de los triángulos es un hexágono regular. ¿Cuál es el área de la figura?



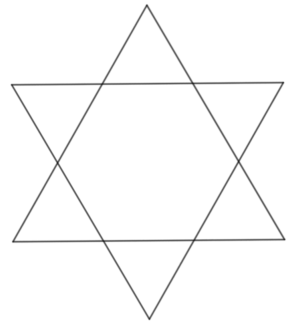
Walabi, Etapa Final

Problema 1. En la siguiente figura mostramos tres círculos del mismo radio con centros A, B y C, respectivamente. Dos de ellos se tocan en un único punto y el tercero pasa por ese mismo punto. Si el radio mide $1cm$, ¿cuánto vale el área sombreada?



Problema 2. En un torneo con 6 equipos, cada equipo jugó una vez contra cada uno de los otros 5 equipos. En cada partido hay un ganador, es decir, no hay empates. Al final del torneo, los equipos están ordenados según la cantidad de juegos que ganaron. ¿Cuál es la mayor cantidad de equipos que podrían estar empatados en primer lugar con más juegos ganados?

Problema 3. En la siguiente figura se muestran dos triángulos equiláteros iguales de área $4cm^2$. Los triángulos se han cruzado para formar una estrella: la intersección de los triángulos es un hexágono regular. ¿Cuál es el área de la figura?



Problema 4. Valeria y Daniela juegan un juego. Primero, Daniela escoge un número. Siempre que Daniela tiene un número, ella lo duplica y se lo da a Valeria. Siempre Valeria tiene un número, le suma 50 y se lo da a Daniela. Gana el último en decir un número menor a 1000. ¿Cuál es el menor y el mayor número que hacen ganar a Daniela?

Problema 5. Un tablero de 3×3 está lleno con puros 0s. Se toman dos cuadritos que comparten un lado y se les suma 1 a ambos o se les resta 1 a ambos. ¿Es posible que al final todo el tablero esté lleno con números $2s$?

Mini Canguro, Etapa Final

Problema 1. Valeria y Daniela juegan un juego. Primero, Daniela escoge un número. Siempre que Daniela tiene un número, ella lo duplica y se lo da a Valeria. Siempre Valeria tiene un número, le suma 50 y se lo da a Daniela. Gana el último en decir un número menor a 1000. ¿Cuál es el menor y el mayor número que hacen ganar a Daniela?

Problema 2. Un tablero de 3×3 está lleno con puros 0s. Se toman dos cuadritos que comparten un lado y se les suma 1 a ambos o se les resta 1 a ambos. ¿Es posible que al final todo el tablero esté lleno con números $2s$?

Problema 3. Sea ABC un triángulo isósceles con $AB = AC$ y el ángulo $\angle BAC = 20°$. Se toma un punto D sobre AC tal que $AD = BC$. ¿Cuánto mide el ángulo BDC?

Problema 4. Los números naturales se acomodan en una tabla como sigue:

1	3	6	10	15	...
2	5	9	14	...	
4	8	13	...		
7	12	...			
11	...				
...					

¿En qué fila y columna se coloca el número 2015? Nota: La primera fila es la de los números $1, 3, 6, \ldots$ y la siguiente fila es la de abajo; la primera columna es la de los números $1, 2, 4, \ldots$ y la siguiente columna es la de la derecha.

Problema 5. Dos números a y b son primos relativos si su máximo común divisor es 1. Queremos formar números de 8 cifras usando los dígitos del 1 al 8, sin repetir. Además, queremos que cualquier pareja de dígitos adyacentes en el número sean primos relativos. ¿Cuántos números podemos formar que cumplan esto? Nota: en el número 19246, el 2 es adyacente al 9 y al 4, el 6 es adyacente al 4.

Canguro, Etapa Final

Problema 1. Sea ABC un triángulo isósceles con $AB = AC$ y el ángulo $\angle BAC = 20°$. Se toma un punto D sobre AC tal que $AD = BC$. ¿Cuánto mide el ángulo BDC?

Problema 2. Los números naturales se acomodan en una tabla como sigue:

1	3	6	10	15	...
2	5	9	14	...	
4	8	13	...		
7	12	...			
11	...				
...					

¿En qué fila y columna se coloca el número 2015? Nota: La primera fila es la de los números $1, 3, 6, \ldots$ y la siguiente fila es la de abajo; la primera columna es la de los números $1, 2, 4, \ldots$ y la siguiente columna es la de la derecha.

Problema 3. Dos números a y b son primos relativos si su máximo común divisor es 1. Queremos formar números de 8 cifras usando los dígitos del 1 al 8, sin repetir. Además, queremos que cualquier pareja de dígitos adyacentes en el número sean primos relativos. ¿Cuántos números podemos formar que cumplan esto? Nota: en el número 19246, el 2 es adyacente al 9 y al 4, el 6 es adyacente al 4.

Problema 4. Encuentra todos los triángulos equiláteros que pueden cubrirse exactamente con trapecios isósceles de lados 1, 1, 1 y 2 sin que éstos se traslapen.

Problema 5. El número abcde es un número de cinco dígitos donde a, b, c, d, e son los dígitos. Además, a es el residuo que deja el número al dividir entre 2, b es el residuo que deja el número al dividir entre 3, c es el residuo que deja el número al dividir entre 4, d es el residuo que deja al dividir entre 5 y e es el residuo que deja al dividir entre 6. Encuentra todos los números $abcde$ que cumplen esto.

Soluciones a los Problemas

Koala, Primera Etapa

Solución Problema 1. La respuesta es Gallo. Cada tres pasos, Sharol ha dicho una vez Gallo, una vez Gallina y una vez Pollito. Entonces, en los múltiplos de 3 las palabras han sido dichas la misma cantidad de veces: en $3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots, 99$. En el paso 99, Sharol dijo Pollito y ha dicho cada palabra 33 veces. En el paso 100 vuelve a decir Gallo y es la palabra que ha dicho más veces.

Solución Problema 2. La respuesta es SOL. Los últimos cuatro lanzamientos han sido $AASA$, tres veces ÁGUILA y una vez SOL. Para que la moneda cumpla su regla, el siguiente tiene que ser SOL.

Solución Problema 3. La respuesta es Diana. A Elisa le faltan 70 escalones para llegar al final de la escalera. En ese tiempo, Diana sube 105 escalones porque la mitad de 70 es 35 y tres veces 35 es 105. Cuando a Elisa le faltan solo dos escalones, Diana ya subió 102. Por lo tanto, Diana llega primero.

Solución Problema 4. La respuesta es No. Buscamos la respuesta a la pregunta número 27. En todos los múltiplos de 5, Leyre contesta "Quizás". Contestó "Quizás" en la pregunta $5, 10, 15, 20$ y 25. En la pregunta 26 respondió "Sí", en la pregunta 27 respondió "No".

Solución Problema 5. Las fracciones se ordenan

$$\frac{7}{27} > \frac{8}{31} > \frac{6}{25}.$$

Solución Problema 6. La respuesta es aproximadamente $17{,}27cm^2$ de pizza. El área de cada rebanada de la pizza grande es un octavo de 144π. El área de cada rebanada de la pizza mediana es un octavo de 100π. La diferencia es un octavo de 44π, es decir, $\frac{44\pi}{8} = \frac{11\pi}{4}$ que es aproximadamente 17,27 centímetros cuadrados de pizza.

Solución Problema 7. La respuesta es 4 pelotas. Si hubiera comprado puros conos naranjas, habrían gastado 250 pesos. Si cambia un cono por una pelota se ahorran 25 pesos pero gastan 100, por lo que la cuenta aumenta en 75. Con una pelota son 325, con dos pelotas son 400, con tres pelotas son 475, con cuatro pelotas son 550.

Solución Problema 8. La respuesta es 6 maneras. Como San Luis va siempre después de Monterrey, cuando ordenemos Monterrey sabemos exactamente en qué momento de la gira van a San Luis. Así, solo tenemos que ordenar tres ciudades. Los seis órdenes distintos son: $GQM, GMQ, MQG, MGQ, QGM, QMG$, donde G es Guadalajara, Q es Querétaro y M es Monterrey.

Solución Problema 9. La respuesta es 4 veces. El círculo de Diana tiene radio $\frac{13}{2}$ y el círculo de Elisa tiene radio $\frac{13}{4}$. Usando la fórmula para el área del círculo que es π por radio por radio, tenemos que el área del círculo de Diana es $\frac{169\pi}{4}$ y el área del círculo de Elisa es $\frac{169\pi}{16}$. Como cuatro dieciseisavos son lo mismo que un cuarto, el área del círculo de Elisa cabe exactamente cuatro veces en el área del círculo de Diana.

Solución Problema 10. La respuesta es que los tres son iguales. Los tres triángulos tienen la misma base que es el segmento AB. Además, tienen la misma altura porque la distancia entre las paralelas es siempre la misma. Como tienen la misma base y la misma altura, sus áreas son iguales.

Solución Problema 11. La respuesta es 1. Damaris puede leer 1 página diaria y leer todas las que le faltan el último día. Atendiendo las erratas, veamos que en total, quiere leer $92 + 110 + 228 + 125 + 45 = 600$ páginas. Como marzo tiene 31 días, tendría que leer 19,35 páginas diarias. Si leyera 20 páginas diarias, habría leído 600 páginas nada más en los primeros 30 días y el último día no habría leído nada, que no cumple lo que pide el problema; luego, 19 es la mayor cantidad de páginas que puede leer cada día y el último día lee las que le faltan.

Solución Problema 12. La respuesta es 11. Florencia quiere 6 cosas iguales. Como tiene de 2 tipos distintos, en el peor de los casos, después de sacar 10 sobres tiene 5 de cada tipo. Cuando saque el siguiente puede asegurar que tiene al menos 6 de un mismo tipo. (Es cierto que podría sacar 6 del mismo tipo desde el principio pero no puede asegurar que eso sucede.)

Walabi, Primera Etapa

Solución Problema 1. Ver solución de Koala, Problema 3.

Solución Problema 2. Ver solución de Koala, Problema 4.

Solución Problema 3. La respuesta es 6 papelitos. Cuando Petunia toma un papelito, quita uno de la mesa y regresa 9, es decir, la cantidad total de papelitos aumenta en 8. Si a 63 le quitamos los 15 originales nos quedan 48. Como $48 = 6 \times 8$, Petunia debió haber tomado 6 papelitos.

Solución Problema 4. La respuesta es que tienen la misma área. El triángulo ADC tiene la mitad del área del rectángulo $ABDC$. Como tiene la misma base y la misma altura que el rectángulo $AXYC$, también tiene la mitad del área del rectángulo $AXYC$.

Solución Problema 5. Ver solución de Koala, Problema 7.

Solución Problema 6. Ver solución de Koala, Problema 9.

Solución Problema 7. Ver solución de Koala, Problema 11.

Solución Problema 8. La respuesta es 43. Queremos 15 cosas iguales. En el peor de los casos, como hay tres sabores distintos, después de 42 podría tener 14 de cada uno de los tres tipos. Al sacar la bolsita número 43 puede asegurar que tiene al menos 15 del mismo sabor y es el menor valor en el que lo puede asegurar sin ver.

Solución Problema 9. Se consideraron tres respuestas como correctas: $1210, 2310$ o 2002. Si entendemos que son letras *distintas de entre las de su nombre*, entonces tiene 11 letras distintas para elegir. La primera letra puede ser cualquiera de las 11, la segunda letra cualquiera de las 10 restantes. El resto de la contraseña está determinado excepto por la mayúscula que puede ser cualquiera de las 11 letras de la contraseña (las 2 letras del principio y las 9 letras que no tomamos). Tenemos $11 \times 10 \times 11 = 1210$ contraseñas distintas.

Si entendemos que son letras *distintas a las de su nombre*, entonces tiene 11 letras que no puede elegir, es decir, $2611 = 15$ opciones distintas. Procediendo igual que la solución anterior, tendríamos $15 \times 14 \times 11 = 2310$ contraseñas distintas. (O bien, 2002 contraseñas distintas si no consideramos la letra Ñ dentro de las posibilidades.)

Solución Problema 10. La respuesta es 3π. Los ángulos internos de un hexágono regular miden 120 grados. Luego, las secciones circulares son cada una un tercio de un círculo completo; como tenemos seis alcanza para 2 círculos completos. Como hay un círculo completo coloreado al centro, son tres círculos completos de radio 1. El área de cada uno es π, el área de los tres es 3π.

Solución Problema 11. La respuesta es $45°$. El ángulo x es la diferencia de dos ángulos, ambos de triángulos isósceles. Uno de ellos tiene el ángulo distinto igual a $120°$, por lo que cada ángulo igual mide $30°$; el otro tiene el ángulo distinto igual a $120° - 90° = 30°$, por lo que cada ángulo igual mide $75°$. El ángulo que buscamos mide $75°30° = 45°$.

Solución Problema 12. La respuesta es 107. La suma es menor cuando los sumandos son menores. Buscamos los menores números que multiplicados den 72 y esos son sus factores primos: $2, 2, 2, 3, 3$. El resto de los números son 1. La menor suma posible es 107. (Veamos, por ejemplo, que 2, 2 suman menos que 4, 1; o que 2, 3 suma menos que 6, 1.)

Mini Canguro, Primera Etapa

Solución Problema 1. Ver solución de Walabi, Problema 3.

Solución Problema 2. La respuesta es Viernes. Además del 2016, también el 2020 y el 2024 serán bisiestos. Es decir, si faltan 10 años, son $365 \times 10 + 3 = 3653$ días para la fecha. Cuando dividimos 3653 entre 7 (porque son siete días en la semana), el cociente es 521 y el residuo es 6.

Es decir, han pasado 521 semanas completas y 6 días; como cada semana que pasa vuelve a ser sábado, necesitamos únicamente contar los seis días: será viernes.

Solución Problema 3. La respuesta es Burbuja. Veamos que a Bombón le faltan 100 escalones, a Bellota le faltan 70 escalones y a Burbuja le faltan 76 escalones. En el tiempo en que Bombón sube 99 escalones, Bellota ha subido nada más 66, por lo que Bombón llega antes que Bellota. En el tiempo en que Bombón sube 100 escalones, Burbuja sube 80; un tiempo antes, Bombón lleva únicamente 95 cuando Burbuja ya subió 76. Luego, Burbuja es la que llega primero.

Solución Problema 4. La respuesta es 000,000. Sin importar en qué año nació, Sharol debió haber vivido los años 2000, 2005, 2010 y 2015. Es decir, el producto tendrá seis factores 5 que arrojarán seis 0's al final de la multiplicación. (Basta multiplicar los años 2000, 2002, 2005, 2010, 2012 y 2015 para descubrir que el resultado tendrá seis ceros al final.)

Solución Problema 5. La respuesta es 7. Llamemos x al número que pensó Valeria. En el primer paso, Valeria tiene ahora el número $x + 3$. En el segundo paso, tiene el número $11(x+3) = 11x+33$. En el tercer paso tiene $11x+33+4 = 11x+37$. Finalmente, en el último paso, tiene $11x+37-x = 10x+37$. Sin importar el valor de x, $10x$ termina en 0; por lo tanto, el último dígito es 7.

Solución Problema 6. Ver solución de Walabi, Problema 9.

Solución Problema 7. La respuesta es 31 o 155. Recordemos que $2015 = 5\times13\times31$. Si solo consideramos enteros positivos, podemos construir el acomodo $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 13, 155$. Si consideramos enteros negativos también, el acomodo $-1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 13, 31$ también cumple.

Solución Problema 8. La respuesta es 3. Podemos dividir el hexágono regular en seis triángulos equiláteros iguales entre sí con un vértice en común en el centro del hexágono. Además, con los puntos medios del equilátero, podemos dividirlo en cuatro triángulos equiláteros más pequeños.

Como el triángulo —grande— y el hexágono tienen el mismo perímetro, el lado del hexágono es la mitad del lado del triángulo equilátero original. Luego, los triángulos equiláteros en los que hemos dividido ambas figuras son todos iguales. Como cuatro triángulos dan un área de 2, seis triángulos nos darán un área de 3.

Solución Problema 9. La respuesta es $7!6!$. El primero de los libros puede ser cualquiera de los 7 libros de Harry Potter. El segundo de los libros puede ser cualquiera de los 6 libres que no son de Harry Potter. El tercero puede ser cualquiera de los 6 de Harry Potter que aun no hemos elegido. El cuarto puede ser cualquiera de los 5 que no son de Harry Potter y que aun no hemos elegido. Siguiendo este razonamiento obtenemos la respuesta.

Solución Problema 10. Ver solución de Walabi, Problema 10.

Solución Problema 11. Ver solución de Walabi, Problema 11.

Solución Problema 12. La respuesta es 23^4. Para que un número tenga 5 divisores, debe ser un primo a una cuarta potencia. Además, como ninguno de sus divisores es un primo menor a 20, el número que buscamos es el menor primo mayor a 20 elevado a la cuarta potencia.

Canguro, Primera Etapa

Solución Problema 1. Ver solución de Mini Canguro, Problema 4.

Solución Problema 2. Ver solución de Mini Canguro, Problema 3.

Solución Problema 3. Ver solución de Mini Canguro, Problema 5.

Solución Problema 4. Ver solución de Mini Canguro, Problema 8.

Solución Problema 5. La respuesta es $7! \times 3! \times 3! \times 2 \times 6 = 12,177,280$. Independientemente de su ubicación, los libros de Harry Potter se pueden ordenar de 7! maneras entre ellos. Los libros de Divergente y los de Juegos del Hambre se pueden ordenar de 3! maneras cada grupo, además de la posibilidad de poner uno u otro grupo primero. Sabemos dónde van 4 de los libros de Harry Potter (dos en cada orilla) y sabemos que al menos uno debe ir entre los grupos de Divergente y de Juegos del Hambre; falta ver de cuántas maneras colocar los otros dos. En el siguiente diagrama, las diagonales representan los dos grupos de libros de Divergente y Juegos del Hambre:

HP, HP, x, x
x, HP, HP, x
x, x, HP, HP
HP, x, HP, x
HP, x, x, HP
x, HP, x, HP

obtenemos seis maneras de colocar los dos libros faltantes de Harry Potter. Las maneras totales de acomodar los libros es el resultado de esta multiplicación:

$$7! \times 3! \times 3! \times 2 \times 6 = 12,177,280.$$

Solución Problema 6. La respuesta es 101^4. Para que un número tenga 5 divisores, debe poder expresarse como un primo a una cuarta potencia. Además, como ninguno de sus divisores primos es menor a 98, buscamos el menor primo mayor a 98; ese número es 101.

Solución Problema 7. La respuesta es 8. Los múltiplos pares de 55 son múltiplos de 110; todos los múltiplos de tres dígitos de 110 repiten dígitos. Podemos escribir la lista de todos los números de tres dígitos que son múltiplos impares de 55: $165, 275, 385, 495, 605, 715, 825, 935$. Cada uno de ellos cumple las condiciones por lo que son 8 y solo 8 los números que buscamos.

Solución Problema 8. La respuesta es 2π. Como los ángulos interiores de un hexágono suman 720 grados, las secciones circulares suman la misma área que dos círculos. Como los círculos tienen radio 1, cada uno tiene π de área; la respuesta es 2π.

Solución Problema 9. La respuesta es $\frac{19}{10}$. Multiplicamos ambas expresiones y obtenemos que

$$(a+b+c)(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c}) = \frac{49}{10}.$$

Si desarrollamos el lado izquierdo de la igualdad, obtenemos la siguiente expresión:

$$\frac{a+b+c}{a+b} + \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{a+c} = 1 + \frac{c}{a+b} + 1 + \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{a+c}.$$

Finalmente, recordando la igualdad inicial, despejamos la expresión deseada:

$$\frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} = \frac{49}{10} - 3 = \frac{19}{10}.$$

Solución Problema 10. La respuesta es $3^4 + 3^4 + 3 \times 4^3 = 81 + 81 + 192 = 354$. Para que esto sea posible, los cuatro dígitos deben dejar el mismo residuo al dividir entre 3. Dividimos los números en tres grupos: $1, 4, 7, 2, 5, 8, 3, 6, 9, 0$.

Con el primer grupo podemos hacer $3 \times 3 \times 3 \times 3$ números distintos de cuatro cifras; con el segundo grupo podemos hacer también $3 \times 3 \times 3 \times 3$ números distintos de cuatro cifras; con el último grupo podemos hacer $3 \times 4 \times 4 \times 4$ números distintos de cuatro cifras porque el 0 no puede ir al inicio.

El resultado es la suma de estas tres cantidades.

Solución Problema 11. La respuesta es 47. Del 1 al 2015 hay 46 múltiplos de 43 pues es el cociente al dividir 2015 entre 43. Puesto que 43 es primo, aseguramos así 46 factores 43 en la multiplicación. Sin embargo, como 43×43 es menor que 2015, tenemos un factor 43 adicional. En total son 47 factores que es la cantidad de veces que podemos dividir entre 43 antes de usar punto decimal.

Solución Problema 12. La respuesta es 56. La fotografía a escala debe mantener la proporción de la fotografía original; dicha proporción es $\frac{17{,}5}{20} = \frac{7}{8}$ Es decir, los lados del marco deben medir $7x$ y $8x$. Estas son las dimensiones de los lados del rectángulo adentro del marco, es decir, los lados pequeños de los trapecios. Los lados grandes miden, respectivamente $7x + 2$ y $8x + 2$ pues los cortes en $45°$ generan triángulos isósceles de 1 pulgada de lado.

Sin importar cómo nombramos los lados de los trapecios, podemos plantear la siguiente ecuación:

$$7x + 7x + 8x + 8x + 2 + 2 = 34$$

$$30x = 30$$

$$x = 1,$$

por lo tanto, los lados miden 7 y 8, por lo que el área es 56.

Koala, Etapa Final

Solución Problema 1. Aunque el primer día de la semana en este problema es el domingo, vamos a empezar a planear el menú alrededor del viernes, que ya está decidido. Tenemos en total 4 opciones para cada día. Como el viernes ya se eligió pastel y no puede haber pastel dos días consecutivos, tanto jueves como sábado tienen únicamente 3 opciones.

Una vez que decidimos cuál postre va en jueves, en miércoles puede ir cualquiera de los 3 postres que no son el que elegimos para el jueves.

Repitiendo este procedimiento, vamos a llegar a

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 1 \times 3$$

donde multiplicamos porque cada elección de cada día tenemos todas las demás elecciones para los demás días. En total, hay 729 menús distintos.

Solución Problema 2. Como cualesquiera tres términos consecutivos suman 30, sabemos que

$$A + B + 5 = 30$$

$$A + B = 25.$$

No sabemos cuánto vale A ni cuánto vale B, pero sabemos que su suma tiene que ser 25 para que cuando les sumemos 5, el resultado sea 30. También sabemos que

$$B + 5 + C = 30$$

$$B + C = 25.$$

Lo que tenemos ahora es que $A + B = B + C$, que quiere decir que $A = C$. Si seguimos así, vamos a observar que

$$5 + C + D = 30$$

$$C + D = 25$$

y como $B + C = C + D$, tenemos que $B = D$. Podemos volver a escribir la sucesión como $A, B, 5, A, B, E, F, G, H$. Los números que siguen son

$$A + B + E = 30,$$

pero como $A + B = 25$, entonces $E = 5$. Nuestra sucesión ahora se ve como

$$A, B, 5, A, B, 5, F, G, H.$$

Si seguimos haciendo el mismo procedimiento, vamos a poder transformar la sucesión

$$A, B, 5, A, B, 5, A, B, 5,$$

y podemos ver que $G = B$ así que cuando nos piden $A+G = A+B = 25$. Es importante notar que esto es siempre cierto, sin importar los valores que le pongamos a A y B.

Solución Problema 3. Veamos que el área sombreada está formada por medio círculo y algo que parece unos calzones. El medio círculo se obtiene uniendo los otros dos puntos donde se cruzan los círculos A y B con el círculo C. Esta área es fácil de calcular pues, como el radio del círculo vale 1, el área del círculo vale π.

Para calcular los calzones, vamos a construir un rectángulo usando el diámetro del medio círculo como un lado paralelo al lado que resulta de unir A con B. Los otros dos lados se obtienen uniendo los puntos extremos del diámetro con los centros A y B. Esto es un rectángulo por que las tangentes son perpendiculares a los radios que van a los puntos de tangencia.

Este rectángulo tiene base 2, que es lo que mide el diámetro, y tiene altura 1, que es lo que mide el radio. Por lo tanto, tiene área 2. El área no sombreada está formada por dos cuartos de círculo, es decir, medio círculo. Si el área del círculo es π, el área de medio círculo es $\frac{\pi}{2}$. El área de los calzones es entonces $2 - \frac{\pi}{2}$.

El área sombreada total es la suma de estas dos áreas:

$$\frac{\pi}{2} + (2 - \frac{\pi}{2}).$$

Solución 2: Trazamos un cuadrado donde tres de sus vértices son los puntos en común entre las circunferencias. Por Teorema de Pitágoras, este cuadrado tiene lado 2, es decir, tiene área 2.

Podemos ver que el área coloreada fuera del cuadrado complementa el área que le falta al cuadrado por colorear. Luego, el área coloreada cabe exactamente en el cuadrado de lado $\sqrt{2}$ y, por lo tanto, mide 2 unidades cuadradas.

Solución Problema 4. Si hay 6 equipos y cada uno jugó una vez contra cada uno de los otros equipos, en total hubo 15 partidos. Como 15 es un número impar, no es posible que todos hayan ganado la misma cantidad de juegos pues la suma de juegos ganados daría un número par. Por lo tanto, no quedaron empatados los 6 equipos.

Además, es necesario ver que un equipo que haya ganado 2 o menos juegos no puede estar empatado en primer lugar pues la suma de juegos ganados no llegaría a 15. Pensando que un equipo empatado tiene al menos 3 juegos ganados, sería posible tener 5 equipos empatados con 3 juegos ganados cada uno y el sexto equipo con puras derrotas. La suma de juegos ganados es 15.

Para ver que esto es posible, veamos el siguiente acomodo: los equipos A, B, C, D, E le ganaron todos al equipo F; además, acomodados en un círculo, cada equipo le ganó a los dos equipos a su derecha.

Solución Problema 5. Un hexágono regular puede partirse en seis triángulos equiláteros con un vértice común en el centro. Además, los triángulos que quedan como "puntas" de la estrella también son triángulos equiláteros porque los triángulos se cruzan dejando sus lados paralelos.

Para ver que los triángulos equiláteros del hexágono son iguales a los triángulos equiláteros de las "puntas", basta ver que comparten un lado. Así, la figura está formada por 12 triángulos equiláteros y sabemos que 9 de ellos suman área 4 pues esa es el área de uno de los triángulos equiláteros grandes. El área de la figura es

$$12(\frac{4}{9}) = \frac{16}{3} \approx 5{,}333.$$

Walabi, Etapa Final

Solución Problema 1. Ver solución de Koala, Etapa Final, Problema 3.

Solución Problema 2. Ver solución de Koala, Etapa Final, Problema 4.

Solución Problema 3. Ver solución de Koala, Etapa Final, Problema 5.

Solución Problema 4. Vamos a resolver este problema para los naturales. Sea x el número que escoge Daniela. Los números que dicen, por turnos, son:

$$2x, 2x + 50$$

$$4x + 100, 4x + 150$$

$$8x + 300, 8x + 350$$

$$16x + 700, 16x + 750$$

$$32x + 1500, 32x + 1550$$

El mayor número que hace fanar a Daniela debe hacerla ganar en el primer turno. Luego, buscamos x tal que

$$2x < 1000$$

$$x < 500,$$

por lo que 499 es el mayor número que la hace ganar.

Es claro que si llegan al quinto turno, Daniela pierde automáticamente. Como queremos que Valeria pierda, queremos el menor x tal que

$$16x + 750 \geq 1000$$

$$16x \geq 250$$

$$x \geq \frac{250}{16} = 15{,}625,$$

luego, el menor x entero que cumple es 16.

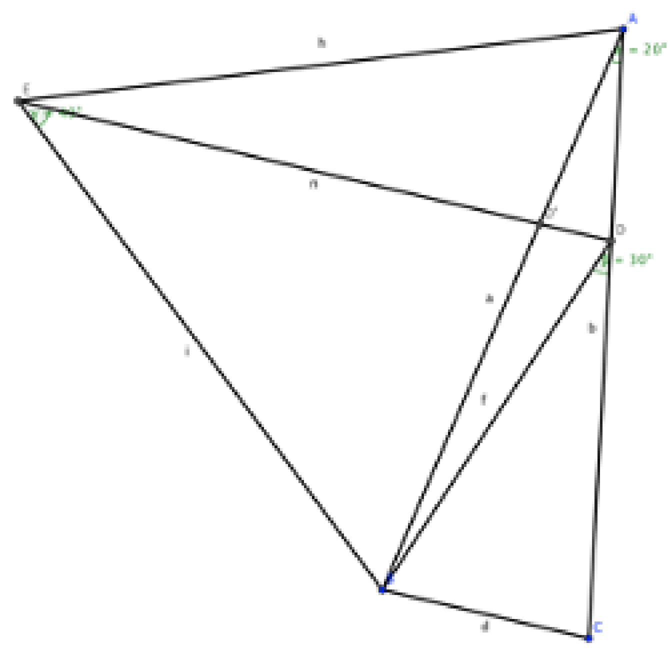
Solución Problema 5. Pintamos el tablero como tablero de ajedrez. La operación permitida escoge siempre una celda negra y una blanca. Es decir, la suma de las blancas y las negras debe ser igual. Como hay más negras que blancas, es imposible que todas valgan lo mismo.

Mini Canguro, Etapa Final

Solución Problema 1. Ver solución de Walabi, Etapa Final, Problema 5.

Solución Problema 2. Ver solución de Walabi, Etapa Final, Problema 4.

Solución Problema 3. Trazamos la paralela a la base por BC por el punto D. La extendemos hasta el punto E tal que $ED = AC$. Por criterio LAL, tenemos que los triángulos ABC, EAD son congruentes.



Luego, por la congruencia, $EA = AB$. Como $\angle EAD = 80° = \angle EAB + \angle BAC$ y $\angle BAC = 20°$, tenemos que $\angle EAB = 60°$. Como el triángulo EAB es isósceles y tiene un ángulo de $60°$, resulta que es equilátero y $\angle EAB = 60°$. Como $\angle EAB =$

$\angle AED + \angle DEB$ y $\angle AED = 20°$, tenemos que $\angle DEB = 40°$. Como el triángulo DEB también es isósceles,

$$\angle EDB = \frac{180 - 40}{2} = 70°.$$

Finalmente, como $\angle EDC = 100° = \angle EDB + \angle BDC$ y $\angle EDB = 70°$, podemos concluir que $\angle BDC = 30°$.

Solución Problema 4. Veamos que los primeros números de la primera fila se obtienen de sumar el número de la columna al número de la misma fila en la columna anterior. Es decir, los números son $1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$ que son los números triangulares, y se obtienen como la suma de los primeros naturales. Para esto, usamos la fórmula de Gauss como

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Vamos a buscar el número triangular mayor a 2015 más cercano a éste:

$$2015 \leq \frac{n(n+1)}{2} \longrightarrow 4030 \leq n(n+1).$$

Como $\sqrt{4030} \approx 63{,}48$, probamos para $n = 63$:

$$\frac{63(64)}{2} = 2016,$$

que es perfecto. Ahora que sabemos que el 2016 está en la primera fila, columna 63, podemos asegurar que el 2015 está en la segunda fila, columna 62, es decir, un escalón abajo.

Solución Problema 5. Primero, es claro que no puede haber dos pares juntos. Los impares 1, 5 y 7 no tienen problema con ningún número pero el 3 no puede ir al lado del 6. Vamos a calcular fijándonos de no juntar par e impar y después restamos aquellos donde 6 y 3 hayan quedado juntos. Vamos a usar P para par e I para impar. Podemos acomodarlos de la siguiente manera:

$$PIPIPIPI, \quad IPIPIPIP, \quad PIIPIPIP, \quad PIPIIPIP, \quad PIPIPIIP,$$

que son cinco acomodos generales. En cada uno de estos acomodos generales, el primero de los pares puede ser cualquiera de los 4, el siguiente cualquiera de los 3 restantes, el siguiente cualquiera de los 2 restantes y el último está determinado; análogamente para los impares.

Tenemos $4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 5 = 2880$ números que no tienen dos pares juntos. Queremos ver cuántos de estos tienen al 3 y 6 juntos. Podemos ver en cada caso general hay 4 casos donde hay un par y un impar juntos. En cada uno de estos casos, hay que acomodar los restantes tres pares y tres impares: esto se hace de $3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 = 36$. Como son 20 casos, son $36 \times 20 = 720$. Concluimos que hay $2880 - 720 = 2160$ números que cumplen.

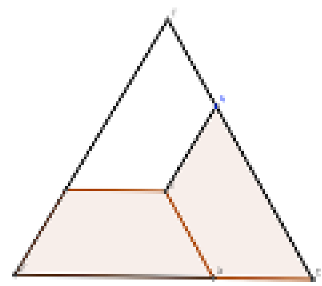
Canguro, Etapa Final

Solución Problema 1. Ver solución de Walabi, Etapa Final, Problema 4.

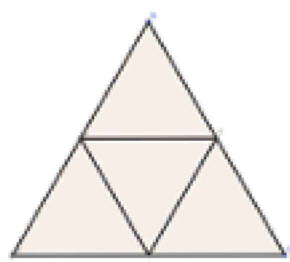
Solución Problema 2. Ver solución de Mini Canguro, Etapa Final, Problema 3.

Solución Problema 3. Ver solución de Mini Canguro, Etapa Final, Problema 4.

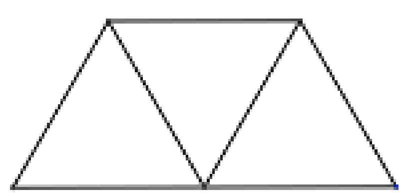
Solución Problema 4. Veamos que es posible llenar un triángulo equilátero de lado 3 con trapecios como los del problema:



Como podemos llenar uno de lado 3, podemos llenar uno de lado 6, dividiéndolo así:



Podemos agregar una nueva fila de triángulos equiláteros de lado 3 y así encontrar la manera de llenar un triángulo equilátero de lado 9. Procediendo así, podemos llenar cualquier triángulo equilátero cuyos lados midan un múltiplo de 3. Ahora, falta ver que son los únicos triángulos que se pueden llenar. Primero, veamos que un trapecio de lados 1, 1, 1, 2 se puede dividir en tres triangulitos unitarios.



Para concluir, observamos que un triángulo equilátero de lado n se puede dividir en n^2 triángulos equiláteros unitarios: dividimos cada lado en n segmentos unitarios; unimos los puntos correspondientes con paralelas a las bases. La fila superior tiene 1 triangulito; la siguiente fila tiene 1 triangulito invertido y 2 triangulitos, es decir, 3 triangulitos; la siguiente fila tiene 2 triangulitos invertidos y 3 triangulitos, es decir, 5 triangulitos; la $k-$ésima fila tiene k triangulitos y $k-1$ triangulitos invertidos, es decir, $2k-1$ triangulitos unitarios.

La cantidad de triangulitos unitarios es entonces

$$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2,$$

como cada trapecio tiene 3 triangulitos unitarios y 3 es un número primo, la única manera de llenar n^2 triangulitos unitarios de tres en tres es que n^2 sea un múltiplo de 3 que solo es posible si n es un múltiplo de 3.

Solución Problema 5. Como a es el primer dígito, no puede ser 0 pues dejaría de ser un número de 5 dígitos. Por lo tanto, $a=1$ y el número es impar. Eso reduce las opciones para c y e a continuación. Como e es el último dígito, debe ser igual a d, que es el residuo al dividir entre 5. Hacemos nuestra lista de casos posibles:

- $a=1$
- $b=0,1,2$
- $c=1,3$
- $d=1,3$
- $e=1,3$

que deja muy pocos casos posibles:

- Si $e=1$, se sigue que $d=1$. Como los últimos dos dígitos son 11, se sigue que $c=3$. Tenemos que $abcde=1b311$. Cualquier $b=0,1,2$ cumple el criterio del 3; sin embargo, como $e=1$, se sigue que $b=1$. El número 11311 es el único que cumple este caso.

- Si $e=3$, se sigue que $d=3$. Como los últimos dos dígitos son 33, se sigue que $c=1$. Sin embargo, como $e=3$, el número debe ser múltiplo de 3 por lo que $abcde=10133$ que no es múltiplo de 3. Este caso es imposible.

Luego, el único número posible es 11311.

El Centro de Alto Rendimiento en Matemáticas fue fundado en 2011 en San Luis Potosí, México. Desde entonces, nos hemos dedicado a la preparación de estudiantes, profesores y familias para distintos concursos de matemáticas, principalmente aquellos que caen bajo el paragüas de Olimpiada de Matemáticas. Hemos tenido la oportunidad de trabajar con cientos de estudiantes muy talentosos, dentro y fuera de la Olimpiada, en todo México y partes de América Latina.

En CARMA estamos comprometidos con la educación matemática, con proporcionar un espacio accesible y seguro donde todos, todas y todes puedan continuar su preparación olímpica permanente, dar sus primeros y segundos pasos en concursos, o acercarse a las matemáticas desde una perspectiva lúdica y un aprendizaje basado en problemas.

Para más información sobre CARMA: Centro de Alto Rendimiento en Matemáticas, te presentamos los siguientes enlaces:

- Cursos en https://cursos.carmaenlinea.com/
- Concursos en https://concursos.carmaenlinea.com/.
  Anualmente organizamos Olimpiada Femenil (febrero-marzo), Olimpiada Virtual de Matemáticas (agosto) y Olimpiada de Otoño (septiembre-octubre).
- Nuestra página de Facebook en http://fb.com/carmatematicas
- Nuestro canal de YouTube en https://youtube.com/carma2011
- El canal de YouTube de ugesaurio en https://www.youtube.com/ugesaurio

CENTRO DE ALTO RENDIMIENTO EN MATEMATICAS

CARMA

·2011·

CENTRO DE ALTO RENDIMIENTO EN MATEMATICAS

CARMA

·2011·