Centro de Alto Rendimiento en Matemáticas

V Olimpiada Femenil: 2019

Problemas y soluciones

V Olimpiada Femenil 2019

Equipo CARMA

28 de enero de 2022

Enero 2022

Los problemas originales de este material son autoría de Equipo CARMA 2019, a saber: Armando Moreno, Cecilia Hernández, Germán Puga, Luis Islas, Itzanami Berlanga, Yareli Navarro, Eduardo Reyna, Juan Andrés Reyes y Danielle Flores. Este material puede ser distribuido de manera libre porque nuestro compromiso es con la creación y divulgación de material para Olimpiada de Matemáticas; **por favor considera hacer un donativo, porque todxs tenemos que comer y pagar renta.** Por el amor de Emmy Noether, no subas este material a Scribd ni cobres por compartirlo.

Para cualquier correción, por favor comunícate con nosotros vía Facebook o a nuestro correo electrónico en matematicascarma@gmail.com.

Una versión preliminar de este material estuvo a cargo de Cecilia Hernández. La persona a cargo del material es Danielle Flores.

Primera edición: Enero 2022

Editorial Dinosaurio
San Luis Potosí, México
`carmatematicas (at) gmail (dot) com`

Si este material te ha sido útil, por favor considera apoyar nuestro proyecto editorial. Puedes hacerlo en Patreon, comprometiendo un donativo mensual.

https://www.patreon.com/ugesaurio

También puedes hacer una donación ocasional vía PayPal.

https://www.paypal.com/paypalme/ugesaurio

O bien, mediante depósito o transferencia, a nombre de Eugenio Daniel Flores Alatorre en BBVA Bancomer, a través de su aplicación bancaria, deposito en practicaja o en cualquier Oxxo del país:

CLABE: 012700004649844474   número de tarjeta: 4152 3133 9055 2979

Introducción

Este folleto está dedicado a la V Olimpiada Matemática Femenil que organizó el Centro de Alto Rendimiento en Matemáticas, CARMA, en el mes de marzo del 2019. Con más de 3,393 participantes en más de 90 sedes repartidas por todo México, desde Ensenada hasta San Cristóbal de las Casas, esta ha sido la edición más popular hasta ahora. Esta es la lista completa de sedes donde se aplicó la V Olimpiada Femenil:

- AGS: Aguascalientes ESG 38
- AGS: Aguascalientes Sanford
- AGS: Aguascalientes UAA
- BC: Ensenada
- BC: Tijuana del Valle
- BCS: Cabo Delmar
- BCS: Cabo Gauss Euler
- BCS: Instituto Santa María
- BCS: La Paz Carrillo
- BCS: San José del Cabo Mauricio Pino Orozco
- CDMX: Venustiano Carranza
- CHIH: Chihuahua CUU
- CHIH: Cobach SEA
- CHIH: Juárez UACJ IIT
- CHIS: Comitán de Domínguez
- CHIS: Ocozocuautla
- CHIS: San Cristóbal Poniente
- CHIS: Tuxtla Gutiérrez
- COA: Torreón Británico
- COA: Torreón Cervantes
- COA: Torreón Domus
- GRO: COLMEX Chilpancingo
- GTO: Guanajuato Valenciana
- GTO: León CECyT 17
- HGO: Freinet
- HGO: Mineral de la Reforma
- HGO: Tezontepec CA
- JAL: Kumón Ajijic
- JAL: Yahualica
- MEX: EFROMMEX
- MEX: Metepec IMSC
- MEX: Preparatoria Agrícola
- MEX: Texcoco CMA
- MICH: Morelia
- NAY: Bahía de Banderas
- NAY: Tepic del Valle
- NL: Apodaca CEH
- NL: Euro Americano
- NL: Euroamericano Valle
- NL: García
- NL: Monterrey Alef
- NL: Monterrey Alfa
- NL: Monterrey FCFM
- NL: Monterrey IENU
- NL: Monterrey ITESM
- NL: Monterrey Latin
- NL: Monterrey Prepa 2 UANL
- NL: Monterrey Prepa 9 UANL
- OAX: El Carrizo Pinotepa
- OAX: Huajuapan de León IFM-UTM
- OAX: Huajuapan IFM-UTM
- OAX: Oaxaca
- OAX: Oaxaca OMMO
- OAX: Santa Ana IEBO 171
- OAX: Tuxtepec José Vasconcelos
- PUE: Puebla CBTA 184
- QR: Cancún MIS
- QR: FCP Leona Vicario
- QRO: Querétaro UAQ
- SIN: Altata Cetmar 28
- SIN: Culiacán del Valle
- SLP: Cedral Cobach 03
- SLP: Ciudad del Maíz
- SLP: Ciudad Valles Sec2
- SLP: Mexquitic Estanzuela

- SLP: Mexquitic Los Moreno
- SLP: Mexquitic Maravillas
- SLP: Mexquitic Monte Obscuro
- SLP: Mexquitic Ojo Zarco
- SLP: San Luis Ciencias
- SLP: San Luis FMdlV
- SLP: San Luis Potosino
- TAB: Atenas Asesorías
- TAB: Paideia
- TAB: Universidad IEU
- TAM: Ocampo Cuauhtémoc
- TAM: Tampico UNITAM
- TAM: Victoria NS
- TLA: Chiautempan Tec 4
- VER: Americano Xalapa
- VER: COATJRC
- VER: Nogales COBAEV
- VER: Xalapa Americano
- VER: Xalapa MateClub
- YUC: Teresiano Tizimín
- ZAC: Zacatecas IPN
- ZAC: Zacatecas Tec

Queremos resaltar que el examen no es en absoluto sencillo. Algunos problemas en la lista son extremadamente retadores, lo que representa una excelente oportunidad para animarse a participar y demostrar un alto nivel. Además, por el formato de examen, el corto tiempo para resolver y la gran cantidad de problemas aumentan la dificultad considerablemente.

Presentamos, igual que hacemos con los números dedicados a la Olimpiada Femenil, la lista de ganadores del concurso seguida de las pruebas que presentaron los participantes y sus respectivas soluciones. Es decir, lo mismo del año pasado pero ahora con lo de este año que, si nos esperamos un año, se convertirá también en el año pasado.

Ganadores

Categoría Koala

Primer Lugar

Yessy Sophia Vidal Rosaldo	Jose Morgas García TAB: Atenas Asesorías

Segundo Lugar

Natalia García Esquivel	Colegio Cervantes de Torreón COAH: Torreón Cervantes

Tercer Lugar

Libni Elizabeth Gómez Canseco	Constitución del 57 CHIS: San Cristóbal

Mención Honorífica

Alejandra Aymé Anzures Castillo	Colegio Cervantes de Torreón COAH: Torreón Cervantes
Sofía Aridahi Alvarado Méndez	Instituto Educativo Ammadeus ZAC: Zacatecas Tec
Jaziz Cortés Camiro	Colegio de las Américas MICH: Morelia UMSNH
Lesley Valeria Soto Domínguez	Colegio Cervantes de Torreón COAH: Torreón Cervantes
María Fernanda Zamarripa Vargas	Colegio Cervantes de Torreón COAH: Torreón Cervantes
Dannia Guadalupe Moreno García	Jaime Torres Bodet ZAC: Tlaltenango
Mariana González Cuéllar	Latin American School NL: Monterrey Latin
Abril Domínguez Gamboa	Colegio Cervantes de Torreón COAH: Torreón Cervantes
Daniela Danae Hernández Méndez	Presidentes de México SLP: Cedral 03
María Josefina Cantú Maldonado	Colegio Cervantes de Torreón COAH: Torreón Cervantes
Marissa Perches Urritia	Colegio Cervantes de Torreón COAH: Torreón CervantesColegio Cervantes de Torreón COAH: Torreón Cervantes
Tania Hernández Adame	Nuevo Continente QRO: Querétaro
Diana Laura Ríos Chávez	Valentín Gómez Farías MEX: Naucalpan Conalep

Categoría Walabi

Primer Lugar

Aylin Ximena Ocampo Vera	Colegio México GRO: Chilpancingo COLMEX
Valentina Acosta Bueno	Instituto Cervanes Apostólica SLP: San Luis Tec

Segundo Lugar

Viviana Carrizales Luna	CARA NL: Monterrey Prepa 9

Tercer Lugar

Cynthia Naely López Estrada	EST 34 GTO: Guanajuato Valenciana

Mención Honorífica

Claudia Itzel Pérez Lara	Colegio Gauss HGO: Mineral de la Reforma
Mariana Amy Martínez Nevárez	Isabel la Católica NL: Monterrey FCF
Daira Nájera Salinas	Secundaria del Estado No. 1 CHIS: San Cristóbal
Mayleth Medina Cárdenas	Instituto Altum SIN: Culiacán Colegio del Valle
Victoria Daniela de la Mora Rosales	Colegio Cervantes de Torreón COAH: Torreón Cervantes
Virginia Jiménez Zapata	Colegio México GRO: Chilpancingo COLMEX
Anna Paola Gómez Urquides	Instituto Altum SIN: Culiacán Colegio del Valle
Maria Fernanda Montoya López	Colegio Enrique Arreguin SIN: Culiacán Colegio del Valle
Georgina Ixel Márquez Muñoz	Latin American School NL: Monterrey Latin
Ana Sofía Salgado Bailón	Instituto Potosino Marista SLP: San Luis Tec
Bianca Daniela Maya García	Instituto Gauss-Euler BCS: Instituto Gauss-Euler
Maritza Contreras Ortega	Plan de Ayala ZAC: Tlaltenango
Perla Michell Márquez Ramos	Escuela Secunda Técnica 21 ZAC: Tlaltenango

Categoría Canguro

Primer Lugar

Alexandra Valdepeñas Ramírez	Colegio Alemán Torreón COAH: Torreón Alemán

Segundo Lugar

Dayra Hernández Rodríguez	Preparatoria no. 9 NL: Monterrey Prepa 9
Megan Ixchel Monroy Rodríguez	Secundaria Técnica 1 HGO: Mineral de la Reforma

Tercer Lugar

Mariana Ramírez Sánchez	CEDI JAL: Tlajomulco Nueva Galicia

Mención Honorífica

Samantha Ruelas Valtierra	Colegio México Nuevo	QRO: Querétaro
Lia Medina Montalvo	CECyT No. 16 “Hidalgo”	HGO: Mineral de la Reforma
Gabriela Itarii Ramírez Ferrin	Secundaria Federal Lic. Benito Juarez	OAX: Huajuapan de León UTM
Isabela Rodriguez Castañeda	Colegio Cervantes de Torreón	COAH: Torreón Cervantes
Sofía Amelia Shekinah Tuz Poot	Cecyt Campeche	CAM: Campeche Cecyte
Ana Paula Pérez Chaidez	Instituto Jean Piaget del Río	SIN: Culiacán Colegio del Valle
Isa Fernanda Guerrero Alejo	IEST	TAM: Tampico UNITAM
Ana Stephanie Esparza Dávila	BachUAA Central	AGS: Aguascalientes UAA
Eashley Brittney Martínez Vergara	Colegio Real de Minas	HGO: Mineral de la Reforma
Blanca Azucena Zamarripa Vargas	Colegio Cervantes de Torreón	COAH: Torreón Cervantes
Bárbara Sarahí Abrego Saenz	Preparatoria no. 9	NL: Monterrey Prepa 9
María Fernanda Meléndez González	Colegio Tizimín	YUC: Tizimín
Karla Rebeca Munguía Romero	Instituto Jean Piaget del Río	SIN: Culiacán Colegio del Valle

Categoría Uombat

Primer Lugar

Ana Paula Ramírez Sánchez	CEDI	JAL: Tlajomulco Nueva Galicia
Itzanami Berlanga Contreras	COBACH 28	SLP: San Luis Tec

Segundo Lugar

Corina Luca Focsan	ITESM Campus Moreli	MICH: Morelia Tec

Tercero Lugar

Ana Teresa Calderón Juárez	CeCyT 18	ZAC: Zacatecas IPN
Denisse Garnica Sánchez	Prepa Tec Zacatecas	ZAC: Zacatecas Tec

Mención Honorífica

Elida Lisset Rodríguez García	Preparatoria Alfa Fundación	NL: Monterrey Alfa
Danya Carolina Gómez Cantú	Prepa Tec Eugenio Garza Sada	NL: Monterrey FCFM
Daianna González Padilla	Prepa Tec Zacatecas	ZAC: Zacatecas Tec
Diana Laura Villa Velázquez	Prepa Tec CEGL	NL: Monterrey Prepa 9
Alejandra Médez Cabrera	Cobach 02	BCS: Instituto Gauss-Euler
Angélica Sierra Romero	Instituto Mexicano Madero	PUE: Puebla BUAP
Isabel Carrizales Luna	Preparatoria Eugenio Garza Sada	NL: Monterrey Prepa 9
Adela Verania Sánchez Arias	John J. Sparks	VER: Coatzacoalcos

Andrea Garibaldi Gamboa	Tec de Monterrey SIN: Culiacán Colegio del Valle
Danna Paola Treviño Mendoza	Preparatoria 9 NL: Monterrey Prepa 9
Marcela Victoria Lozano Correa	Preparatoria Alfa Fundación NL: Monterrey Alfa

Puedes consultar la lista completa de ganadores en undostresporcarma.com/ganadores-V-olimpiada-femenil-2019/

Enunciados de los Problemas

Presentamos los problemas que se resolvieron en la V Olimpiada Femenil de Matemáticas. A modo de recordatorio, la competencia estuvo divida en las siguientes 4 categorías:

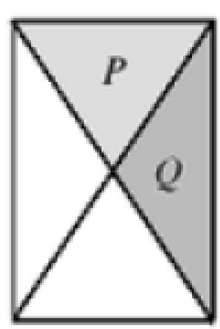
- Koala: 5° y 6° año de primaria.
- Walabi: 1° y 2° año de secundaria.
- Canguro: 3° año de secundaria y 1° año de bachillerato.
- Uombat: 2° y 3° año de bachillerato.

En esta sección encontrarás los problemas de la Etapa 1 tal como aparecieron en el examen en cada una de las cuatro categorías. Posteriormente, se encuentran los exámenes de correspondientes a la Etapa Final. Las soluciones a todos los problemas los encontrarás en el próximo capítulo.

Koala, Primera Etapa

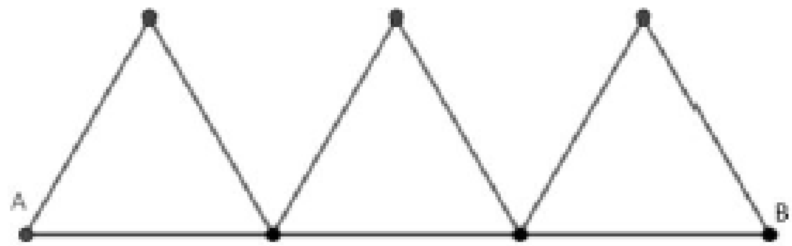
Problema 1. Un número capicúa se escribe igual al derecho y al revés; por ejemplo: 515. ¿Cuál es el número capicúa más cercano a 2019?

Problema 2. Se trazan las dos diagonales de un rectángulo, las cuales lo dividen en cuatro triángulos. Hemos nombrado uno de ellos P y a otro Q, como se muestra en la figura. ¿Cuál de los dos tiene mayor área?



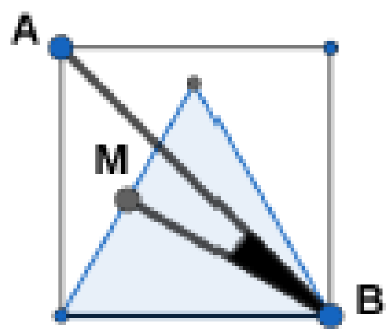
Problema 3. ¿Cuál es el menor múltiplo de 11, de 4 cifras, que tiene todos sus dígitos distintos?

Problema 4. En la figura se muestra el esquema de un parque donde Lulú saca a pasear a sus cuyos. Los movimientos del paseo son solo hacia la derecha (o en diagonal, pero moviéndose a la derecha). ¿Cuántas formas distintas hay de llegar de A a B?



Problema 5. Tres viernes de cierto mes fueron números pares. ¿Qué día de la semana fue el 15 de ese mes?

Problema 6. En la siguiente figura se ha usado un lado del cuadrado como lado del triángulo equilátero. Si M es el punto medio del lado del triángulo equilátero. Encuentra la medida del $\angle ABM$.



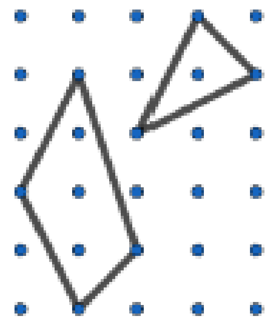
Problema 7. Jonathan colecciona álbumes de estampitas. Cada álbum tiene 32 páginas y en cada página pone la misma cantidad de estampitas. Tiene 5 álbumes llenos y ha comenzado un sexto álbum que sólo tiene completas 5 páginas. Si en el último álbum tiene 60 estampitas, ¿cuántas estampitas tiene su colección?

Problema 8. Un triángulo equilátero tiene el mismo perímetro que un hexágono regular. Si el área del hexágono mide 15 centímetros cuadrados, ¿cuánto mide el área del triángulo?

Problema 9. Sobre la diagonal AC del pentágono regular $ABCDE$ se marca el punto F de modo que $AF = FB$ y $FC = CB$. Si el perímetro de $ABCDE$ mide $65cm$ y el perímetro del triángulo BCF es de $34cm$, ¿cuál es el perímetro del triángulo ABC?

Problema 10. ¿Cuál es la cantidad mínima de movimientos que se requieren para llevar un caballo de la esquina inferior izquierda a la superior derecha de un tablero de ajedrez? (Nota: un tablero de ajedrez es una cuadrícula de 8×8 y un caballo se mueve de una esquina de un rectángulo de 2×3 ó de 3×2 a la opuesta, haciendo una "L".)

Problema 11. En la siguiente cuadrícula se tiene que el área del cuadrilátero es $2016cm^2$. ¿Cuál es el área del triángulo?



Problema 12. Un grupo de amigas se junta para recitar múltiplos de sus números favoritos mientras saltan la cuerda. Yareli dice la tabla del 3 desde 3×1 hasta 3×100. Mónica hace lo mismo, pero con la tabla del 5. Mariana con la tabla del 7, Verónica con la tabla del 9 e Isabel con la tabla del 11. ¿Cuántos de los números que dijeron terminan en 9?

Walabi, Primera Etapa

Problema 1. ¿Cuál es el mayor número de tres cifras que es múltiplo de 11 y que tiene todas sus cifras distintas?

Problema 2. En Totorolandia hay 3 tipos de monedas. Sabemos que una moneda vale 2 totoros y otra moneda vale 5 totoros. Además, sabemos que es posible sumar 13 totoros o 19 totoros usando 3 monedas. ¿Cuántos totoros vale la tercera moneda?

Problema 3. Se prolongan los lados AE y CD de un pentágono regular $ABCDE$ hasta que se tocan en F. Encuentra $\angle DBF$.

Problema 4. Andrea acaba de fundar el país de Strüdelandia y quiere diseñar su bandera. Ella quiere que sea una cuadrícula de 2×2, y quiere pintar cada cuadrado usando sólo blanco, azul o morado, aunque no tiene que usar todos los colores. No quiere que haya cuadros que comparten lado en la bandera pintados del mismo color. ¿De cuántas formas distintas puede Andrea diseñar la bandera de Strüdelandia?

Problema 5. ¿Cuántos números enteros hay tales que la suma de sus dígitos es 2019 y el producto de sus dígitos es 2?

Problema 6. $ABCDEF$ es un hexágono regular de área 60 m^2. Se marcan los puntos medios M y N de los lados AB y DE, respectivamente. ¿Cuánto vale la multiplicación de la longitud del segmento MN por la longitud del segmento FC?

Problema 7. ¿Cuál es el menor número que está formado únicamente por $5'$s y $7'$s que es divisible entre 5 y 7?

Problema 8. Sobre la diagonal AC del polígono regular $ABCDE$ se marca el punto F de modo que $AF = FB$ y $FC = CB$. Si el perímetro de $ABCDE$ mide 65cm y el perímetro del triángulo BCF es de 34 cm, ¿cuál es el perímetro del triángulo ABC?

Problema 9. ¿Qué hora es 2019 minutos después de las 20:19?

Problema 10. En la familia de Andrea hay 5 perros. Ella elige tres perros para bañar a uno, peinar a otro y pasear al otro. ¿De cuántas formas puede Andrea hacer esto?

Problema 11. Sea $ABCDE$ un pentágono regular. Se toma un punto F sobre la prolongación de AE de forma que E queda entre A y F. Si $AF = 2AE$, encuentra $\angle EDF$.

Problema 12. Fer escribe una lista de números. Comienza con el 15 y luego cada número que escribe es la suma de los cuadrados de los dígitos del número anterior. Por ejemplo, el segundo en la lista es $1^2 + 5^2 = 26$, y el tercero es $2^2 + 6^2 = 40$. ¿Qué número escribe en la posición 2019?

Canguro, Primera Etapa

Problema 1. Se prolongan los lados AE y CD de un pentágono regular $ABCDE$ hasta que se tocan en F. Encuentra $\angle DBF$.

Problema 2. Sean a y b dos números tales cumplen las siguientes propiedades:

1. Su promedio es 100

2. La diferencia entre ambos es la mitad de la suma

Encuentra esos dos números.

Problema 3. El abecedario español tiene 27 letras (la ñ cuenta). En España se imprimen placas para motos que consisten de tres letras. La primera placa fue la AAA; la segunda, la AAB; la tercera, la AAC, y así sucesivamente. (La que sigue de AAZ es ABA). ¿Cuál es la 2019^a placa en ser impresa?

Problema 4. ¿Cuántos números enteros hay tales que la suma de sus dígitos es 2019 y el producto de sus dígitos es 6?

Problema 5. Asterion encontró un número telefónico de 7 dígitos escrito de la siguiente forma $abcd - efg$. Pensó que se trataba de una resta y al realizarla obtuvo 95. Sabiendo que todos los dígitos son distintos y el número formado por efg es lo menor posible con estas condiciones, ¿cuál es el número telefónico original?

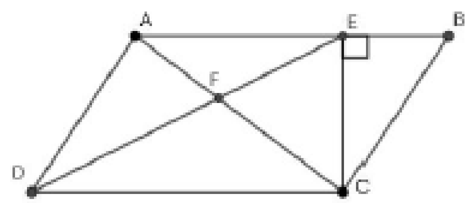
Problema 6. Se tienen todos los números enteros del 1 al 100. Se quieren elegir tres de ellos (distintos) de forma que su suma sea impar. ¿Cuántas maneras hay de hacerlo?

Problema 7. Sea ABC un triángulo equilátero. Sean M y N los puntos los puntos medios de AB y AC, respectivamente. Sea D el punto medio de MN. Por D se traza una paralela a AB, que interseca a BC en E. Sean F el punto medio de DE y G un punto sobre BC tal que FG es paralela a AC. Encuentra la razón entre las áreas del ΔABC y el ΔEFG.

Problema 8. Lulú sale a pasear a sus 1024 perritos, que son Dálmatas o San Bernardos, todos de distinta estatura. Durante el paseo se da cuenta de que el más pequeño de los San Bernardo es más alto que exactamente 9 de sus Dálmatas, hay otro San Bernardo que es más alto que exactamente 10 de los Dálmatas, otro San Bernardo es más alto que exactamente 11 de sus Dálmatas y así sucesivamente hasta llegar al último San Bernardo, que es más alto que todos los Dálmatas. ¿Cuántos de los perritos de Lulú son Dálmatas?

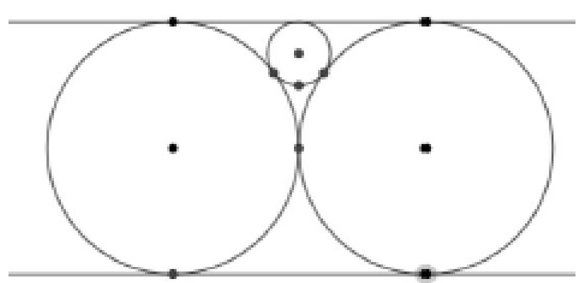
Problema 9. Un número de cuatro dígitos $abcd$ se escribe al revés y se obtiene el número $dcba$. Al mayor se le resta el menor y da como resultado otro número de cuatro dígitos, donde tres de ellos son 2, 5 y 8. ¿Cuál es el dígito que falta?

Problema 10. En un paralelogramo $ABCD$ de área 50 se traza la altura desde C, que toca a AB en E, como se ve en la figura. Sea F la intersección de AC con DE. Si se sabe que E divide a AB en razón $2:1$, encuentra el área del ΔCDF.



Problema 11. Luis presentó un examen de matemáticas. Recuerda que de los problemas de la primera página respondió correctamente 25 problemas. Desafortunadamente, casi al final de la prueba se dio cuenta de que una cuarta parte de todas las preguntas del examen estaban escritas del otro lado de la hoja, y de éstas últimas sólo contestó correctamente $\frac{1}{3}$ de ellas. Si todas las preguntas tenían el mismo valor y Luis obtuvo la mitad de los puntos, ¿cuántas preguntas tenía el examen?

Problema 12. Entre dos líneas paralelas se dibujan dos circunferencias iguales de forma que son tangentes entre ellas y a las paralelas, como se ve en la figura. También se dibuja otro círculo pequeño como se ve en la figura. Encuentra la razón entre el radio grande y el pequeño. Los puntos marcados en la figura son los puntos de tangencia y los centros de las circunferencias.

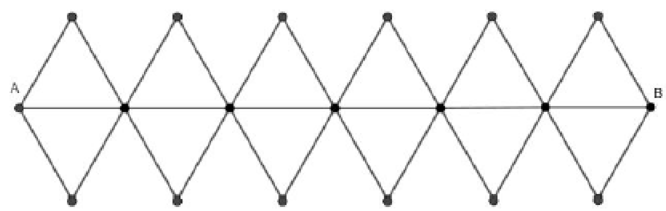


Uombat, Primera Etapa

Problema 1. Un leñador tiene una cierta cantidad de troncos de madera. Haciendo un corte con su sierra puede dividir cualquiera de sus troncos en dos. Si realiza 53 cortes y obtiene 82 troncos en total, ¿cuántos troncos tenía originalmente?

Problema 2. ¿Cuántos números entre 1 y 2019 utilizan a lo más dos dígitos distintos para escribirse?

Problema 3. Se tiene un segmento y se dibujan 12 triángulos equiláteros en él como se ve en la figura. Si sólo se pueden usar movimientos que te hagan avanzar hacia la derecha (o en diagonal, pero moviéndose hacia la derecha), ¿cuántas formas hay de llegar de A a B? Puedes dejar tu respuesta como una multiplicación.



Problema 4. Sea ABC un triángulo equilátero. Sean M y N los puntos los puntos medios de AB y AC, respectivamente. Sea D el punto medio de MN. Por D se traza una paralela a AB, que intersecta a BC en E. Sean F el punto medio de DE y G un punto sobre BC tal que FG es paralela a AC. Encuentra la razón entre las áreas del ΔABC y el ΔEFG.

Problema 5. David escribe todos los números de cuatro cifras que sólo tienen dígitos impares y diferentes. ¿Cuántos de ellos son múltiplos de 9?

Problema 6. ¿Cuántos números de exactamente tres dígitos hay tales que el producto de sus dígitos es el cubo de un entero positivo?

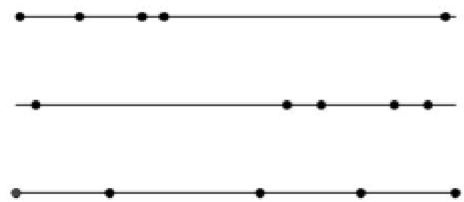
Problema 7. Sea $ABCD$ un trapecio isósceles con $AD = BC$. Se marca el punto medio de AD y se le llama X. Se sabe que $\angle BXC = 90$ y $AX = 1$. ¿Cuál es el perímetro del trapecio?

Problema 8. Se escriben todos los enteros positivos uno tras otro, de forma que todos sus dígitos se vuelven dígitos de un sólo número más grande (para aclarar: los primeros 15 dígitos de ese número más grande son 123456789101112). Cuando se han escrito 2019 dígitos en total, ¿cuántos dígitos 9 se han escrito?

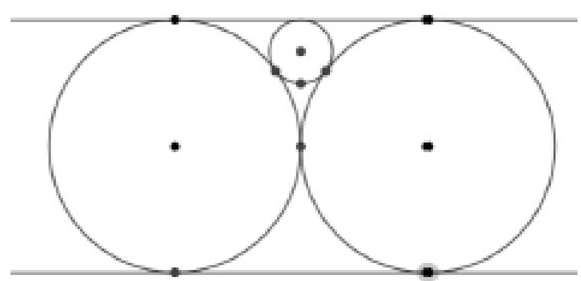
Problema 9. Un número se dice ambicioso si es par, tiene cuatro cifras y el número formado por sus primeras dos cifras es igual a 5 veces el número formado por sus últimas dos cifras. ¿Cuál es el mínimo común múltiplo de todos los números ambiciosos?

Problema 10. Los lados de un triángulo ABC se prolongan por ambos lados hasta los puntos D, E, F, G, H e I, de tal manera que $DA = AB = BG, EA = AC = CH$ y $FB = BC = CI$. Si el área de ABC es $1cm^2$, ¿cuál es el área del hexágono $DEFGHI$?

Problema 11. Se tienen tres líneas paralelas con 5 puntos marcados en cada una como se ve en la figura, de forma que la única manera en que cualesquiera 3 de los 15 puntos formen una línea es que esos 3 pertenezcan a la misma línea paralela. ¿Cuántas formas hay de elegir 5 de estos puntos para formar un pentágono?



Problema 12. Entre dos líneas paralelas se dibujan dos circunferencias iguales de forma que son tangentes entre ellas y a las paralelas, como se ve en la figura. También se dibuja otro círculo pequeño como se ve en la figura. Encuentra la razón entre el radio grande y el pequeño. Los puntos marcados en la figura son los puntos de tangencia y los centros de las circunferencias.

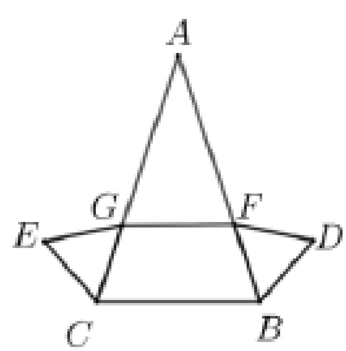


Koala, Etapa Final

Problema 1. En la siguiente figura ABC es un triángulo isósceles con $AB = AC$. Los triángulos BDF y CEG son equiláteros y sabemos que $EG = FD$, y que $AF = 2FB$. Queremos encontrar el perímetro de toda la figura, y sabemos que:

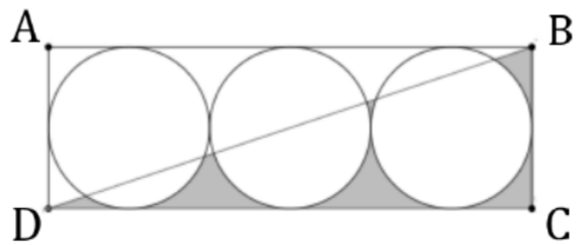
- El perímetro del triángulo AFG mide 28 cm,
- El perímetro de la figura $BCGF$ es de 30 cm,
- El perímetro de la figura $BCEGF$ es de $35cm$

Encuentra el perímetro la figura $AFDBCEG$.



Problema 2. Un número capicúa es un número que se lee igual al derecho y al revés; por ejemplo 1221, 49294 son capicúas. Lulú y Germán piensan cada uno en un número capicúa de 4 dígitos. Cuando los suman, el resultado también es un número capicúa de 5 dígitos. ¿Cuántos valores posibles hay para el resultado?

Problema 3. Sea $ABCD$ un rectángulo con tres círculos del mismo tamaño acomodados en fila dentro de él, de forma que todos ellos son tangentes entre sí y al rectángulo. Si $BC = 10$ y $AB = 30$, encuentra el valor del área sombreada.



Problema 4. Encuentra el menor entero positivo n, tal que $35n$ es un número cuyos dígitos son únicamente 0 y 2.

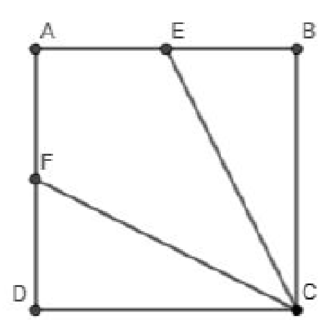
Problema 5. Un número pareado es un número de 6 cifras tal que las primeras tres son impares y las últimas tres son pares. Por ejemplo: 511282 y 715826 son dos números pareados. Encuentra la cantidad de números pareados tales que al multiplicarlos por 2, el resultado es otro número pareado.

Walabi, Etapa Final

Problema 1. Encuentra el menor entero positivo n, tal que $35n$ es un número cuyos dígitos son únicamente 0 y 2.

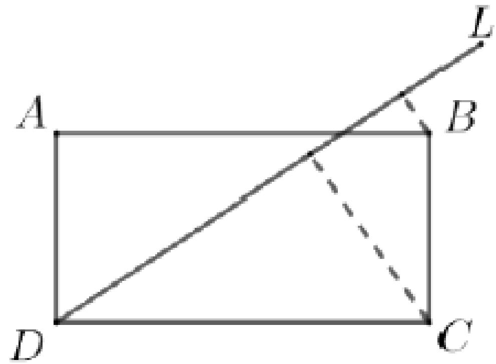
Problema 2. ¿Cuántos números de tres dígitos hay, tales que son divisibles entre la suma de sus dígitos?

Problema 3. En un cuadrado $ABCD$ de lado 2 se marcaron los puntos medios E y F de AB y AD, respectivamente, y se trazaron los segmentos CE y CF. Encuentra todos los puntos P dentro del cuadrilátero $AECF$, tales que las áreas de los cuadriláteros $CEPF$ y $AEPF$ sean iguales.



Problema 4. Para el número 1376, el núumero que tiene sus mismos dígitos, pero en orden contrario es 6731. Germán tomó un entero positivo de 4 dígitos y lo multiplicó por su contrario. El resultado fue un número de 8 dígitos que termina en tres ceros. Encuentra todos los valores posibles para el número que tomó Germán.

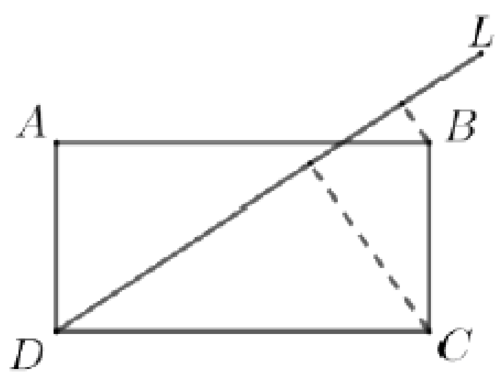
Problema 5. En la figura se muestra un rectángulo $ABCD$ y una recta L que pasa por el punto D. La distancia del punto B a la recta es 2 y del punto C a la recta es 6 (la distancia es siempre perpendicular). Si AB mide el doble que BC, ¿cuánto mide el lado AB?



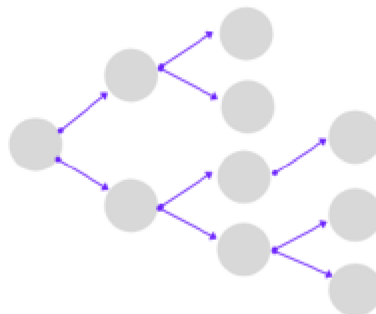
Canguro, Etapa Final

Problema 1. Los participantes de la Olimpiada salieron juntos a comer. Al terminar, la cuenta era de 1680 pesos y la dividieron en partes iguales entre todos. Sin embargo, cuando juntaron el dinero descubrieron que 4 personas se fueron sin pagar, por lo que cada uno de los demás tuvo que poner 1 peso más. ¿Cuántos participantes salieron a comer?

Problema 2. En la figura se muestra un rectángulo $ABCD$ y una recta L que pasa por el punto D. La distancia del punto B a la recta es 2 y del punto C a la recta es 6 (la distancia es siempre perpendicular). Si AB mide el doble que BC, ¿cuánto mide el lado AB?



Problema 3. En cada círculo de la figura se escribe un número del 1 al 10 sin repetir, de modo que: si dos círculos están unidos por una flecha, la flecha apunta al círculo que tenga el número menor. ¿De cuántas formas es posible acomodar los números en los círculos?



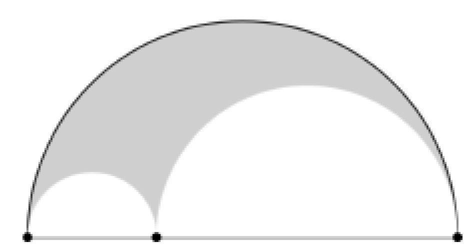
Problema 4. Dado un entero n, una cadena de divisores de n es una lista de enteros positivos distintos que inicia en 1 y termina en n, tal que cada número de la cadena es un múltiplo de su antecesor. Por ejemplo, para $n = 12$, dos posibles cadenas de divisores son $1, 3, 6, 12$ y $1, 4, 12$, pero $1, 4, 6, 12$ NO es una cadena de divisores. Para $n = 2310$, ¿cuántas cadenas de divisores posibles hay?

Problema 5. Sea ABC un triángulo isósceles con $AB = BC$. Sobre los lados BC y AC se encuentran los puntos medios M y N, respectivamente. Un punto L sobre el lado AB es tal que $BL + LM = LN = MN$. ¿Cuál es la medida del ángulo $\angle NLM$?

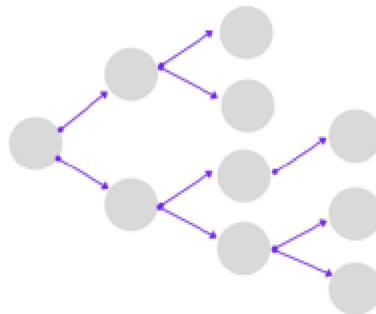
Uombat, Etapa Final

Problema 1. Los participantes de la Olimpiada salieron juntos a comer. Al terminar, la cuenta era de 1680 pesos y la dividieron en partes iguales entre todos. Sin embargo, cuando juntaron el dinero descubrieron que 4 personas se fueron sin pagar, por lo que cada uno de los demás tuvo que poner 1 peso más. ¿Cuántos participantes salieron a comer?

Problema 2. Sea AB un segmento y sea C un punto entre A y B. Se trazan los semicírculos (todos del mismo lado de AB) de diámetros AC, BC y AB, como se ve en la figura. ¿Qué posición de C hace que el área sombreada sea máxima, y cuál es esa área?



Problema 3. En cada círculo de la figura se escribe un número del 1 al 10 sin repetir, de modo que: si dos círculos están unidos por una flecha, la flecha apunta al círculo que tenga el número menor. ¿De cuántas formas es posible acomodar los números en los círculos?



Problema 4. Dado un entero n, una cadena de divisores de n es una lista de enteros positivos distintos que inicia en 1 y termina en n, tal que cada número de la cadena es un múltiplo de su antecesor. Por ejemplo, para $n = 12$, dos posibles cadenas de divisores son $1, 3, 6, 12$ y $1, 4, 12$, pero $1, 4, 6, 12$ NO es una cadena de divisores. Para $n = 2310$, ¿cuántas cadenas de divisores posibles hay?

Problema 5. Sean x y y números reales tales que $0 \leq x, y \leq 1$. Demuestra que:

$$\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-y^2} \geq \frac{2}{1-xy}.$$

Soluciones a los Problemas

Aunque para casi todos los problemas de olimpiada existen distintas formas de llegar a la respuesta, en este capítulo te mostramos sólo una de las posibles formas de resolver cada una de las preguntas de la V Olimpiada Femenil. Ya que hemos dicho que tales soluciones no son únicas, te advertimos que tal vez tampoco sean las más cortas o sencillas. Eso lo decidirás. Es por esto que te invitamos a persistir e intentar resolver los problemas por tu cuenta, antes de leer las siguientes soluciones.

Esperamos que sigas disfrutando de resolver problemas matemáticos como estos y de cualquier otra ciencia, y compartas este gusto con tus amigos, papás, hermanos, primos, con nosotros o con quién tú más quieras. Por último, no permitas que ninguno de estos problemas te desaliente (ni tampoco otros), pues los verdaderos retos son en realidad los grandes maestros del entendimiento.

Koala, Primera Etapa

Solución Problema 1. 2002. Menor a 2019, los capicúas anteriores son 2002 y 1991. Mayor a 2019, el siguiente capicúa es 2112, por lo que el más cercano es 2002.

Solución Problema 2. Las áreas son iguales. El triángulo de área P tiene la misma base pero la mitad de la altura que el rectángulo mientras que el triángulo de área Q tiene la misma altura pero la mitad de la base que el rectángulo; por lo tanto, las dos son iguales.

Solución Problema 3. 1023. El menor múltiplo de 11 de 4 cifras es 1001 y no tiene todas sus cifras distintas. Si le sumamos 11, obtenemos 1012 que no tiene todas sus cifras distintas. Si le volvemos a sumar 11 obtenemos 1023 que sí tiene todas sus cifras distintas.

Solución Problema 4. 8 caminos. Si Lulú decide irse "por arriba", entonces luego debe tomar "por abajo" y volver al siguiente punto sobre la línea. Es decir, únicamente puede tomar decisiones en los puntos. En total son 3 puntos de decisión y en cada uno puede elegir entre 2 caminos (seguir derecho o irse "por arriba"). Entonces hay un total de $2 \times 2 \times 2 = 8$ caminos distintos.

Solución Problema 5. Jueves. En la siguiente tabla, vamos a tratar de acomodar 31 días para que haya 3 viernes con número par. Como máximo puede haber 5 viernes en total, de modo que el primer viernes fue par. Vamos a ver qué pasa si el primer viernes es el día 2:

Lun	Mar	Mié	Jue	Vie	Sáb	Dom
-	-	-	1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

En este acomodo sí es posible y podrían ser 30 o 31 días. El día 15 sería jueves. Vamos a ver ahora qué pasa si el primer viernes es el día 4:

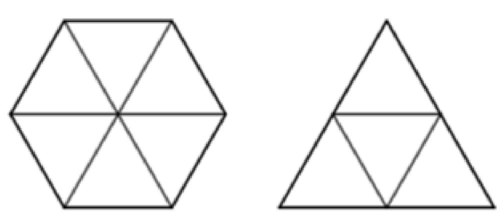
Lun	Mar	Mié	Jue	Vie	Sáb	Dom
-	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	-	-	-

Para que este acomodo fuera posible, necesitaríamos que fueran 32 días, pero ningún mes tiene tantos. Por lo tanto, esta opción (y ninguna otra) es posible. El día 15 del mes fue jueves.

Solución Problema 6. 15 grados. Vamos a encontrar el ángulo como una resta. Primero, como AB es la diagonal de un cuadrado, parte el ángulo de 90 a la mitad, es decir, el ángulo $ABX = 45^o$. Como BM es eje de simetría de un triángulo equilátero, parte al ángulo de 60 grados a la mitad, es decir, el ángulo $BMX = 30^o$. El ángulo de 30 grados está "adentro" del ángulo de 45 grados y el ángulo buscado, sombreado en negro, es justamente la diferencia. El ángulo que buscamos mide $45 - 30 = 15°$.

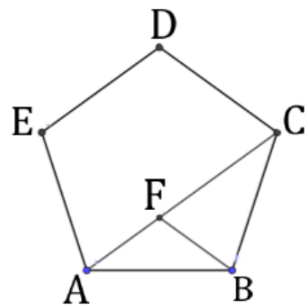
Solución Problema 7. 1980. Como en cada página tiene la misma cantidad de estampitas, quiere decir que cada página tiene $60 \div 5 = 12$. Los primeros 5 álbumes tienen $5 \times 32 = 160$ páginas llenas, con $160 \times 12 = 1920$ estampitas. Si sumamos las 60 estampitas del sexto álbum, en total su colección tiene $1920 + 60 = 1980$.

Solución Problema 8. 10 cm^2. Tomamos los puntos medios del triángulo equilátero y los unimos para formar cuatro triángulos congruentes, más pequeños. El hexágono lo partimos en seis triángulos congruentes trazando las diagonales. Todos estos triángulos son iguales entre sí porque el lado del hexágono mide la mitad del lado del triángulo, por lo tanto, todos sus lados miden lo mismo.

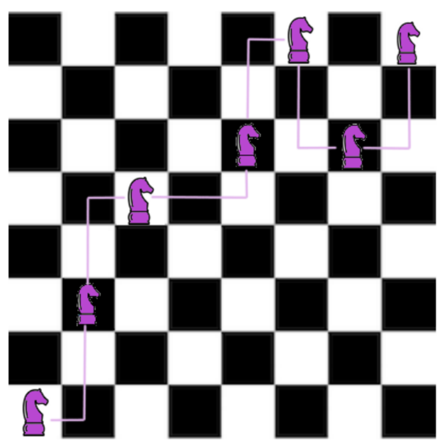


El área del hexágono es de 15 centímetros cuadrados y está formado por 6 triángulos iguales. Esto quiere decir que cada 2 triángulos tienen un área de 5 centímetros cuadrados y, por lo tanto, el área del triángulo equilátero es de 10 centímetros cuadrados.

Solución Problema 9. 49 cm. Como $ABCDE$ es un pentágono regular, cada uno de sus lados mide lo mismo. Como el perímetro mide 65, esto quiere decir que cada lado mide $65 \div 5 = 15$.
En el triángulo BCF tenemos dos de esos lados pues $FC = CB = 15$. Como todo el perímetro es 34 y esos dos lados suman $15 + 15 = 30$, el lado faltante $FB = 4$.
Para calcular el perímetro de ABC tenemos que sumar $AB + BC + CA$. Por la figura, $AC = AF + FC$. Además, ya sabemos que $AF = FB = 4$ y que $FC = BC = AC = 15$. Sumando las medidas de los segmentos llegamos al resultado.

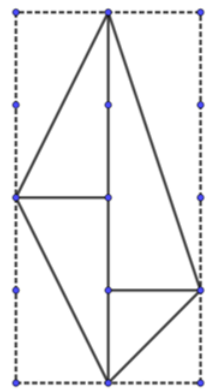


Solución Problema 10. 6 movimientos. Digamos que el caballo se encuentra en una esquina blanca y desea pasar a la esquina contrario que es del mismo color.



Cada movimiento de L, hace que cambie a una casilla del color contrario al cual se encuentra, por lo que llegar a su objetivo le tomará una cantidad par de movimientos. El caballo debe avanzar 7 cuadros en cada dirección, es decir, 14 desplazamientos en total. Con 4 movimientos de caballo, a lo más lo desplazaremos 12 cuadros (tres cuadros por cada L), por lo que la cantidad mínima de movimientos necesarios será 6 tal como se muestra en la siguiente imagen.

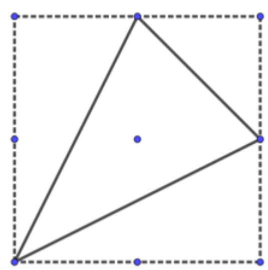
Solución Problema 11. $\frac{2019}{4} + \frac{2019}{8} \approx 757$. Vamos a encontrar el área de las figuras partiéndolas en triángulos simples y, después, encerrándolas en rectángulos. Con esto podemos asegurar que el área de dicho triángulo es la mitad del área del rectángulo y es fácil calcular el área del rectángulo. Primero, con el cuadrilátero:



Podemos encerrar la figura en un rectángulo que mide en total 8 cuadritos de área. Además, podemos dividir el cuadrilátero en 4 triángulos rectángulos que parten al rectángulo mayor en 4 rectángulos más pequeño. Cada uno de los triángulos es la mitad de su respectivo rectángulo, de manera que la suma de los 4 es igual a la mitad del área total. Si representamos el área de cada cuadradito con x, lo que tenemos es que

$$2019 = \frac{8x}{2} = 4x.$$

Repetimos esta idea ahora con el triángulo que queremos:



El triángulo queda encerrado en un cuadrado que ocupa 4 cuadritos. En este caso, es más sencillo contar el área que está "fuera" de nuestro triángulo: el triángulo más pequeño ocupa la mitad de un cuadradito mientras que los otros dos pueden juntarse para formar un rectángulo de dos cuadraditos. Es decir, el triángulo ocupa $4-2-\frac{1}{2} = 1{,}5$ cuadraditos.
Sabemos que $4x = 2019$. Entonces $x = \frac{2019}{4} = 504{,}75$ y $\frac{x}{2} = \frac{2019}{8} = 252{,}375$. Entonces, el área que buscamos es $504{,}75 + 252{,}375 = 757{,}125$, si se expresa como decimal.

Solución Problema 12. 40 números. Para las tablas del $3, 7, 9$ y 11 tenemos un número que termina en 9 cada 10 múltiplos. Entonces, Yareli, Mariana, Verónica e Isabel dijeron, cada una, 10 números que terminan en 9; entre las 4 dijeron 40. Los números de la tabla del 5 sólo terminan en 0 o en 5, de modo que Mónica no dijo ni un solo número que termina en 9.

Walabi, Primera Etapa

Solución Problema 1. 968. El mayor múltiplo de 11 de tres cifras es 990, que no tiene todas sus cifras distintas. Si le restamos 11 obtenemos 979 que tampoco tiene todas sus cifras distintas. Si volvemos a restar 11 obtenemos 968.

Solución Problema 2. 9 totoros. Llamamos x al valor de la tercera moneda que no conocemos. En total podemos hacer 6 combinaciones con las monedas:

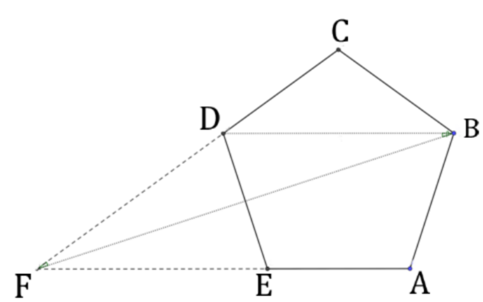
$$2 + 5 + x$$
$$2 + 2 + x$$
$$5 + 5 + x$$
$$2 + x + x$$
$$5 + x + x$$

Además de $2 + 2 + 2 = 6$, $5 + 5 + 5 = 15$, $x + x + x = 3x$. Sabemos que éstas no funcionan porque 13 y 19 no son múltiplos de 3. Para cada uno de los otros casos debemos considerar cuando suman 13 y cuando suman 19. Buscamos un valor de x que aparezca dos veces.

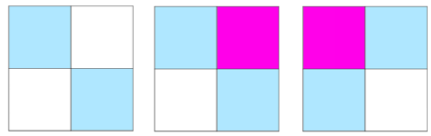
	suma 13	suma 19
$2 + 5 + x$	$x = 6$	$x = 12$
$2 + 2 + x$	$x = 9$	$x = 15$
$5 + 5 + x$	$x = 3$	$x = 9$
$2 + x + x$	$x = 5{,}5$	$x = 8{,}5$
$5 + x + x$	$x = 4$	$x = 7$

El número que aparece en ambas sumas es $x = 9$, que corresponde al valor de la moneda.

Solución Problema 3. 18°. Cada uno de los ángulos interiores de un pentágono regular mide $\frac{180\times 3}{5} = 108°$. Luego, los ángulos exteriores miden $180-108 = 72°$. En el triángulo FED hay dos ángulos de 72°, por lo que el tercero mide $180-72-72 = 36°$. Los ángulos del triángulo ΔDBE también miden $72°,\ 72°$ y $36°$ por lo que los triángulos ΔFDE y ΔBDE son congruentes al compartir el lado DE. De todo lo anterior se puede concluir que el cuadrilátero $DBEF$ es un *cometa* o (deltoide). Como la línea FB es un eje de simetría parte al ángulo $\angle DBE$ a la mitad concluimos que $\angle DBF = \angle B = 18°$.



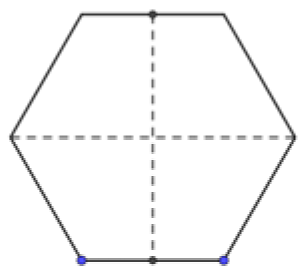
Solución Problema 4. 18 banderas. Andrea tiene que usar al menos 2 colores distintos, para que no haya cuadros de la bandera que comparten color. Además, como son 4 cuadros y sólo 3 colores, debe haber al menos 2 iguales, en diagonal. Puede pintar la bandera con 3 patrones distintos:



El primer patrón es cuando hay dos diagonales iguales. El segundo y tercero es cuando solo una de las dos diagonales es igual. Hay $3 \times 2 = 6$ banderas con el primer patrón y $2(3 \times 2 \times 1) = 12$ con los otros dos.

Solución Problema 5. 2018. Si el producto de sus dígitos es 2, uno de los dígitos del número es 2 y el resto de dígitos son 1's. Si la suma de los dígitos es 2019, debe haber en total 2017 dígitos 1. El número está formado por 2018 dígitos en total y hay 2018 números distintos que podemos formar, uno por cada posición en la que podemos colocar al 2.

Solución Problema 6. 80 m. Las dos líneas en cuestión se cruzan en el centro del hexágono. La línea MN es en realidad dos veces la apotema de la figura y la línea CF es dos veces el radio, que en el caso de un hexágono regular es también dos veces el lado.



Queremos calcular $MN \times CF = 2l \times 2a = 4la$. Por la fórmula de área sabemos que $\frac{6la}{2} = 3la = 60$, esto último por hipótesis. Entonces $la = 20$, $4la = 80$ m.

Solución Problema 7. 5775. El número debe ser múltiplo de 5 por lo que el dígito de sus unidades es 5. Para trabajar con la divisibilidad entre 7, los dígitos ocupados por 7 no afectan. Los dígitos ocupados por 5 forman un múltiplo de 1, 11, 101, 111, 1001, 1011, 1101, 1111, ... De estos, el menor que es múltiplo de 7 es 1001, de manera que 5775 es el número buscado.

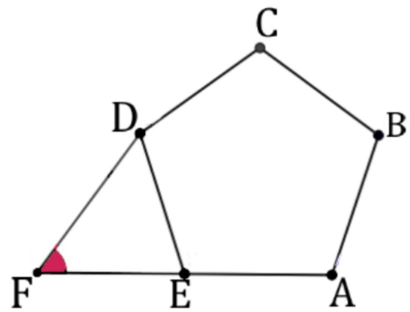
Solución Problema 8. Ver solución de Koala, Problema 9.

Solución Problema 9. La 5:58 de la mañana. Veamos primero que 2019 minutos son 33 horas y 39 minutos. Esas 33 horas son 1 día y 9 horas. Veamos que $19 + 39 = 58$ minutos; luego, sobre las horas: $20 + 9 = 29$; como el día llega hasta 24 horas, las 29 son las 5 de la mañana del día siguiente.
Concluimos que 2019 minutos después de las $20 : 19$ son las $5 : 58$ de dos días después.

Solución Problema 10. 60 opciones. Andrea tiene 5 opciones para elegir al perro que va a bañar; como son perros distintos, le quedan 4 opciones para elegir al que va a peinar; finalmente, le quedan 3 opciones para elegir a cuál va a pasear. En total, tiene $5 \times 4 \times 3 = 60$ maneras distintas de hacer la elección.

Solución Problema 11. 54 grados. Como ya vimos en la solución 8, cada ángulo interior del pentágono regular mide 108 grados. Luego, el ángulo exterior FED mide $180 - 108 = 72$ grados. Como $AF = 2AE$, entonces $FE = EA = ED$ y el triángulo FED es isósceles. Entonces

$$\angle EDF = \angle EFD = \frac{180 - 72}{2} = 54.$$



Solución Problema 12. El 65. Trabajaremos la lista hasta encontrar un ciclo.

Número inicial	Número siguiente
15	$1^2 + 5^2 = 1 + 15 = 26$
26	$2^2 + 6^2 = 4 + 36 = 40$
40	$4^2 + 0^2 = 16$
16	$1^2 + 6^2 = 1 + 36 = 37$
37	$3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58$
58	$5^2 + 8^2 = 25 + 64 = 89$
89	$8^2 + 9^2 = 64 + 81 = 141$
141	$1^2 + 4^2 + 1^2 = 1 + 16 + 1 = 18$
18	$1^2 + 8^2 = 1 + 64 = 65$
65	$6^2 + 5^2 = 36 + 25 = 61$
61	$6^2 + 1^2 = 36 + 1 = 37$
37	58 (ya lo calculamos)

Hemos encontrado un ciclo. Los primeros 4 elementos (15, 26, 40, 16) están fuera del ciclo, que tiene 7 pasos (37, 58, 89, 141, 18, 65, 61). Buscamos la posición 2019; quitando los primeros 4, debemos dar 2015 pasos adicionales. Esto completa 287 ciclos completos y sobran 6. Es decir, el número es 65.

Canguro, Primera Etapa

Solución Problema 1. Ver solución de Walabi, Problema 3.

Solución Problema 2. $a = 150$ y $b = 50$. Como su promedio es 100, sabemos que $\frac{a+b}{2} = 100$, que es lo mismo que "la mitad de la suma", es decir, $a - b = 100$. La primera ecuación se puede convertir en $a + b = 200$ y tenemos un sistema de ecuaciones de 2×2 bastante sencillo: sumando ambas ecuaciones obtenemos los valores buscados.

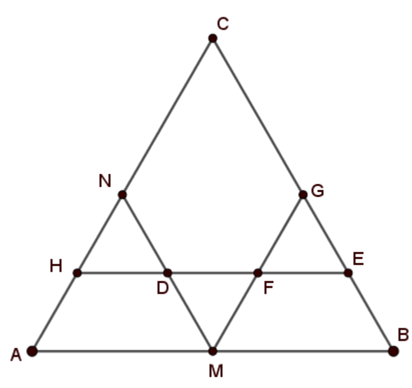
Solución Problema 3. CTT. En total se pueden hacer $27 \times 27 = 729$ placas que empiezan con la letra A. Si sumamos otras 729 que empiezan con la letra B, llevamos $729 + 729 = 1458$. Sabemos que la placa buscada va a empezar con C. Nos faltan $2019 - 1458 = 561$ placas y cada que cambiamos la segunda letra avanzamos 27. Luego, $561/27 = 20{,}77$, por lo que necesitamos llegar hasta la letra 21, que es la T. Llevamos ahora $20 \times 27 = 540$ placas más, $1458 + 540 = 1998$ placas en total. Para la placa 2019 necesitamos avanzar 21 letras más, llegando a la CTT.

Solución Problema 4. 4064254. Hay dos opciones para que el producto de sus dígitos sea 6: que haya un dígito 6 o que haya un dígito 2 y un dígito 3. Los demás dígitos serían 1s, tantos como se necesite para que la suma sea 2019.
Si uno de los dígitos es 6, necesitamos 2013 dígitos 1. Son 2014 dígitos en total, son 2014 números distintos que podemos hacer así, pues solo elegimos la posición del dígito distinto. Si hay un dígito 2 y un dígito 3, necesitamos 2014 dígitos 1. Ya que son 2016 dígitos podemos hacer $2016 \times 2015 = 4062240$ números distintos de esta manera. En total son $4062240 + 2014 = 4064254$ números en total que cumplen lo pedido.

Solución Problema 5. Asterion encontró el teléfono 1037 - 942. Como $abcd$ es de cuatro dígitos y $abcd = efg + 95$ entonces $efg \geq 905$. Notemos que en $g + 5$ no hay acarreo pues c sería las unidades de $1 + f + 9$, es decir $c = f$. Hasta este momento tenemos que $abcd$ es de la forma $10cd$ y efg es de la forma $9fg$. En este momento no podemos usar los dígitos $1, 0, 9$ para c, d, f, g. Tratado de hacer fg lo más pequeño posible tenemos los intentos $fg = 23, 32, 42$ verificando que 23 y 32 no sirven se concluye que $efg = 942$ y por tanto $abcd = 1037$.

Solución Problema 6. 80850. Hay dos maneras posibles en que la suma de tres números sea impar: 3 impares, o 1 impar y 2 pares. Para el primer caso hay $\binom{50}{3} = 19600$; en el segundo caso hay $50 \times \binom{50}{2} = 61250$. Sumando estos casos llegamos a la respuesta.

Solución Problema 7. Las áreas de ABC y EFG están a razón 16: 1. Nombremos H a la intersección de DE con AC. Dado que N es punto medio de AC y H es punto medio de AN, por el teorema de Thales la razón de semejanza entre HCE y ACB es $3:4$. Por otro lado, la razón de semejanza entre HND y HCE es $1:3$. Dado que F es punto medio de DE, se sigue que $HD = DF = FE = \frac{AC}{4}$. Así, la razón de semejanza entre GEF y CEH también es $1:3$. Por lo tanto la razón de semejanza de EFG con el tirágulo ABC es $1:4$. Por último, la razón entre las áreas de los triángulos es igual al cuadrado de la razón entre sus lados, llegando así a la respuesta.



Solución Problema 8. 516 dálmatas. Ordenados por estatura, los 9 perritos de menor estatura son dálmatas. Después de ellos, los perritos alternan entre san bernardo y dálmatas. Si restamos los primeros 8 dálmatas, los restantes $1024 - 8 = 1016$ perritos se pueden emparejar dálmata/san bernardo, por lo que hay 508 dálmatas más: 516 dálmatas en total.

Solución Problema 9. 5. Observemos que el número $\overline{abcd}$ puede escribirse mediante notación desarrollada como $1000a + 100b + 10c + d$ y el número $\overline{dcba}$ como $1000d + 100c + 10b + a$. Supongamos que el mayor de ellos es el primero (ya veremos que no afecta), y la resta quedaría $1000(a - d) + 100(b - c) + 10(c - b) + (d - a)$.
Observemos que $a - d = -(d - a)$ y que $b - c = -(c - b)$. Es decir, tenemos para a y d la resta de ambos dígitos en ambos sentidos, y lo mismo para c y b. Hagamos un ejemplo: $15 - 7 = 8$ y $7 - 5 = 2$, igualmente $13 - 6 = 7$ y $6 - 3 = 3$. Lo que sucederá entonces es que los dígitos en las posiciones de $a - d$ y $d - a$ son complementos a 10, es decir que suman 10. Como los dígitos del número resultante son 2, 8 y 5, y 2 y 8 son complementos a 10, entonces el otro número debe ser el complemento de 5, que es 5 nuevamente.

Solución Problema 10. 15. Dado que $\frac{BE}{EA} = \frac{1}{2}$ y $CD = AB$, se sigue que $\frac{EA}{CD} = \frac{2}{3}$, que a su vez es la razón de la semejanza $AEF \sim CDF$. Por lo tanto, la razón de las alturas es la misma, y concluimos que la razón de la altura del triángulo CDF y la altura CE es $3 : 5$. Como CDE y CDF comparten base y el triángulo CDE es la mitad del área del paralelogramo, se concluye que el área de $\triangle CDF$ es $\frac{3}{5} \times 25 = 15$.

Solución Problema 11. 60 preguntas. Expresaremos el enunciado "25 respuestas correctas, más un tercio de un cuarto del total de las preguntas, es igual a la mitad del total de las preguntas", por medio de la siguiente ecuación:

$$25 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{x}{2}.$$

Donde x representa el número de preguntas. Resolviendo esta ecuación, obtenemos la respuesta.

Solución Problema 12. Los círculos están a razón 4:1. Nombremos A al punto de tangencia de los círculos grandes, B al centro de uno de estos círculos y C al centro del círculo pequeño. Notemos que AC es perpendicular a AB pues una es tangente y otra es el radio del círculo. Sean R el radio de los círculos grandes y r el radio del círculo pequeño. Usando el teorema de Pitágoras en el triángulo ABC, obtenemos la ecuación $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Sustituyendo los valores de los radios y manipulando la ecuación obtenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned}
R^2 + (R - r)^2 &= (R + r)^2 \\
R^2 + R^2 - 2Rr + r^2 &= R^2 + 2Rr + r^2 \\
R^2 &= 4Rr \\
R &= 4r.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\frac{R}{r} = 4$, de donde obtenemos la respuesta.

Uombat, Primera Etapa

Solución Problema 1. 29. Observemos que un corte aumenta la cantidad de troncos del leñador en 1. Por lo tanto, si la cantidad original de troncos es x podemos escribir la cantidad final de troncos como $82 = x + 53$, de dónde obtenemos la respuesta.

Solución Problema 2. 417. Los números del 1 al 99 se forman con a lo más dos dígitos. Del 100 al 199, hay 28, dos de ellos en cada decena, excepto en la de 110 que hay 10. De manera análoga, hay 28 en cada centena del 100 al 999. Hasta aquí llevamos $99 + (28 \times 9) = 351$.
Los 28 números de la centena 100, vuelven a ser contados para 1100. Mientras que para las otras centenas sólo habrá 4: $1xxx, 1xx1, 1x1x, 1x11,$. Del 1001, al 1999, hay $28 + (4 \times 9) = 64$.
Por último, $2000, 2002$ son los únicos que hay del 2000 al 2019. Por lo tanto, hay $351 + 64 + 2 = 417$ números que utilizan a lo más dos dígitos distintos para escribirse.

Solución Problema 3. 729. En cada intersección sobre el segmento AB, hay 3 opciones para avanzar: arriba, abajo o derecha. Observemos que, una vez tomada cualquiera de estas 3 opciones, llega hasta las siguiente intersección por un solo camino. Así, usando el principio multiplicativo, hay 3^6 caminos posibles.

Solución Problema 4. Ver solución de Canguro, Problema 7.

Solución Problema 5. 24. Existen 5 conjuntos de 4 dígitos impares: $\{1, 3, 5, 7\}$, $\{1, 3, 5, \}$, $\{1, 3, 7, 9\}$, $\{1, 5, 7, 9\}$ y $\{3, 5, 7, 9\}$. De éstos, sólo el conjunto $\{1, 3, 5, 9\}$ satisface que la suma de sus elementos sea un múltiplo de 9. Por lo tanto, estos 4 son los dígitos impares que forman los números que buscamos. Sabemos que hay $4! = 24$ formas de ordenar estos números, por lo que 24 de los que números que David ha escrito son múltiplos de 9.

Solución Problema 6. Ver solución de Canguro, Problema 4.

Solución Problema 7. 6. Prolonguemos CX desde X hasta que toque a la prolongación de AB desde A en un punto Y. Por ser alternos internos, $\angle YAX = \angle CDX$; por ser opuestos por el vértice, $\angle YXA = \angle CXD$. Además, como X es punto medio, entonces $AX = DX$. Con esto, los triángulos AXY y DXC son congruentes, bajo el criterio ALA. Siendo así, $AY = CD$ y $YX = CX$.
Ahora, por criterio LAL (por tener ambos ángulo recto), los triángulos BXY y BXC son congruentes. Por lo tanto, $BY = BC = 2$ y como, $BY = AB + AY$ y $AY = CD$, podemos reescribir la ecuación como $BY = AB + CD$. Como $BY = 2$, entonces tenemos que $2 = AB + CD$. Ahora, el perímetro del trapecio se calcula sumando cada uno de sus lados: $AB + BC + CD + AD = AB + 2 + CD + 2 = (AB + CD) + 4 = 2 + 4 = 6$.

Solución Problema 8. 141. Excluyendo al 0 hay 9 números de un dígito; 90 de dos y 900 de tres. Los números de una cifra nos proporcionan 9 dígitos, los de 2 cifras nos dan 180, y los de 3 nos dan 2700. Como $180 + 9 = 189$, solo necesitamos $2019 - 189 = 1830$ dígitos de los números que tienen 3 cifras. Entonces solo se necesitan los primeros $\frac{1830}{3} = 610$ números de 3 cifras, siendo el numero 709 el que ocupa este lugar. Por lo tanto para escribir los 2019 dígitos del número se necesitan todos los dígitos de los números del 1 al 709, así que para resolver el problema basta con encontrar todos los dígitos 9 que hay entre 1 y el 709. Veamos que los que son la forma $0 < \overline{ab9} < 700$ son $7*10*1 = 70$; de la forma $0 < \overline{a9c} < 700$ hay $6*1*10 = 60$ y de la forma $0 < \overline{a99} < 700$ hat $7*1*1 = 7$, por lo que el numero total de 9´s en que hay entre los números del 1 al 700 es $70 + 70 = 140$. Como entre 700 y 709 solo hay un nueve se tiene que el número total de 9´s entre 1 al 709 son 141.

Solución Problema 9. 1002. Sea d el máximo común divisor de los números ambiciosos. Dado que 1002 es un número ambicioso obtenemos que $d \mid 1002$. Por otro lado, sea $\overline{abcd}$ un número ambicioso. Por hipotésis:

$$\begin{aligned}\overline{abcd} &= 100\overline{ab} + \overline{cd}\\ &= 500\overline{cd} + \overline{cd}\\ &= 501\overline{cd}.\end{aligned}$$

Dado que cd es par, se concluye que $\overline{abcd}$ es un múltiplo de $501 \times 2 = 1002$ i.e cada número ambicioso es múltiplo de 1002, por lo que $1002 \mid d$.

Solución Problema 10. 13. Por criterio LAL, los triángulos EAD, ICH, FBG y ABC son congruentes y son todos de área 1. Por Tales, podemos ver que, como $\frac{AB}{BG} = \frac{AC}{CH} = 1$, entonces BC es paralela a HG, por lo que ABC y AGH son semejantes en razón ($\frac{AB}{AG} = \frac{AC}{AH} = \frac{BC}{GH} = 2$). Por ello, el área del AGH es cuatro veces el área (doble de base, doble de altura) del ABC. Si el área del AGH es 4, al restarle el ABC (de área 1) quedaría un trapecio $BCHG$ de área 3. El mismo razonamiento se usa para mostrar que los trapecios $ABFE$ y $ACID$ tienen área 3. El hexágono está conformado por tres trapecios de área 3 y cuatro triángulos de área 1, de donde obtenemos su área total.

Solución Problema 11. 1500. Para formar un pentágono deben elegirse 5 puntos. No se pueden elegir 3 o más puntos de sobre una línea porque eso haría que dos aristas (o más) sean una sola, lo que terminaría volviendo la figura un cuadrilátero, triángulo o línea. Por lo tanto, la selección de vértices debe ser: dos en una línea, dos en otra y el restante en la otra línea. Calculamos por separado las formas distintas de tomar cada elección:

- $\binom{3}{1} = 3$ formas de elegir la línea que aportará sólo un vértice.
- $\binom{5}{2} = 10$ formas de elegir el par de vértices en cada una de las otras dos líneas.
- 5 formas de elegir el vértice sobrante sobre la primer línea.

Empleando el principio multiplicativo el resultado es $3 \cdot \binom{5}{2}^2 \cdot 5 = 15 \cdot 10^2 = 1500$.

Solución Problema 12. Ver solución de Canguro, Problema 12.

Koala, Etapa Final

Solución Problema 1. 67 cm. Sea $EG = FD = x$, como los triángulos EGC y FDB son equiláteros se tiene que todos sus lados son iguales. Por lo tanto

$$CE = CG = GE = x = FD = DB = BF.$$

Al ser $AC = AB$ y $GC = FB$, se tiene que $AG = FA$. Como $FA = 2FB = 2x$, se tiene que $AG = 2x = FB$.
Como el perímetro del triángulo AFG es 28 se tiene que

$$AF + AG + GF = 2x + 2x + GF = 28 = 5x + GF.$$

Análogamente se tiene que al ser los perímetros de $BCGF$ y $BCEGF$ iguales a 30 y 35, respectivamente, se obtienen

$$BC + CG + GF + FB = 2x + BC + GF = 30$$
$$BC + CE + EG + GF + FB = 3x + BC + GF = 35.$$

De donde se sigue que el perímetro de la figura es

$$AF + GE + EC + CB + BD + DF + FA = 10x + CB.$$

Como $28 = 5x + GF$ y $3x + BC + GF = 35$, entonces se tiene que

$$(3x + BC + GF) - (5x + GF) = 35 - 28 = BC - 2x = 7.$$

Como $2x + BC + GF = 30$ y $3x + BC + GF = 35$ de tiene que

$$x = (3x + BC + GF) - (2x + BC + GF) = 35 - 30 = 5,$$

de donde se tiene que $12x = 12 \times 5 = 60$. Por lo tanto:

$$(BC - 2x) + (12x) = 7 + 60 = BC + 10x = 67,$$

que representa el perímetro de la figura.

Solución Problema 2. 12221 y 11011. Sean $abba$ y $cddc$ los dos números capicúas que escogieron tales que $abba + cddc = efgfe$ que también es capicúa. Veamos que, como $9999 \geq abba, cddc$, entonces $2(9999) = 19998 \geq abba + cddc = efgfe$. Además $efgfe > 10000$. Por lo que $e = 1$ y con ello $efgfe = 1fgf1$.
Vemos que la suma máxima de dos dígitos es 18, cuando los dos son iguales a 9, entonces $a + c \leq 18$. Por otro lado, $abba + cddc = 1fgf1$. Así que, o bien $a + c = 11$, o bien $1 \leq 18$. Sin embargo, veamos que si $a + c = 1$, se tiene que $abba + cddc < 3000$. No puede ser $a + c = 1$.
Hasta ahora sabemos que $a+c = 11$ y $abba+cddc = 1fgf1$. Dado que $bba+ddc \leq 1998$, entonces la f que está a la izquierda es igual a 1 ó 2: 1 si $bba + ddc < 1000$ y 2 si $bba + ddc > 1000$.
Denotamos por $hi = d + b \leq 18$, donde h e i son dígitos. Consideremos el caso en que $f = 1$. Se tiene $abba+cddc = 11g11$. Como $ba+dc$ termina en 11 y $a+c = 11$, entonces $i + 1 = 1$. Por lo tanto $i = 0$. Dado que la suma $abba + cddc$, lo anterior implica que $g = 0$. Así 11011 es una posible solución.
Ahora veamos el caso en que $f = 2$. Se tiene que $abba + cddc = 12g21$. Como $ba + dc$ termina en 21 y $c + a = 11$, entonces $i + 1 = 2$. Así $i = 1$. Como $abba + cddc$ empieza con $12g$, se sigue que $h + 1 = 2$. Con lo anterior $h = 1$. Concluimos que 12221 es una posible solución.
Para demostrar que ambas soluciones son posibles basta con encontrar dos parejas de capicúas que sumen esos números. Estas parejas son: $5665 + 5665 = 12221$ y $5005 + 6006 = 11011$.

Solución Problema 3. $\frac{300-75\pi}{2}$ El área del todo el rectángulo es $10 \times 30 = 300$ y el área de cada círculo es igual a $5^2\pi = 25\pi$. La diagonal de un rectángulo divide al mismo en dos triángulos congruentes y por ello, dos triángulos de la misma área. Observamos que también divide a los 3 círculos en dos partes iguales. Por lo tanto el área sombreada es la mitad de la diferencia entre el área del rectángulo y el área de los tres círculos.

Solución Problema 4. 572. El número $35n$ es un múltiplo de 5 y 7. Usando el criterio de divisibilidad del 5, $35n$ termina en 0, pues sus dígitos solo pueden ser 0's y 2's. Observemos, por ejemplo, que si el número 20020, lo dividimos entre 2 se obtiene el mismo número, sólo que en donde hay 2's ahora habrá 1's: $\frac{20020}{2} = 10010$. Como $2, 5$ y 7 no comparten divisores entre cualesquiera dos de ellos, si 7 divide a $35n$ entonces 7 divide a $\frac{35n}{2}$. Por tanto 7 divide a una combinación de 1's y 0's que termina en 0. Veamos que las congruencias de las potencias de 10^n módulo 7 son:

$$\begin{aligned} 10 &\simeq 3 \ (mod\ 7), \\ 100 &\simeq 2 \ (mod\ 7), \\ 1000 &\simeq 6 \ (mod\ 7), \\ 10000 &\simeq 4 \ (mod\ 7). \end{aligned}$$

Observamos que 7 no divide a ninguno de los siguientes números: 10, 100, 110, 1000, 1100, 1010 y 1110. Luego, el número más chico que divide es 10010. De modo que $35n = 20020$ es el menor número que encontramos y $n = \frac{20020}{35} = 572$.

Solución Problema 5. 324. Sea $\overline{abcdef} = f + 10e + 100d + 1000c + 10000b + 100000a$ uno de los números que buscamos. Así a, b, c son dígitos impares, d, e, f son pares y $2(\overline{abcdef}) = \overline{ghijkl}$, donde g, h, i son impares y j, k, l pares.
Supongamos que $10 > f > 5$ y sea $2f = \overline{xy}$. se tiene que $20 > xy > 10$ y con ello $x = 1$. Por lo tanto $2e + x = 2e + 1 = k$, un número par. Pero $2e + 1$ no puede ser par. Así que $f \leq 5$. Análogamente se tiene que $e < 5$.
Si $d < 5$, entonces $10 > 2d$. Por lo tanto $2c + 0$ es igual a un número impar, lo cual no es posible. De donde $d \geq 5$. Análogamente $c \geq 5$ y $b \geq 5$.
Como $2(\overline{abcdef}) = \overline{ghijkl} < 100000$, se sigue que $\overline{abcdef} < 50000$. De modo que $a < 5$. Vemos que las formas de escoger a f y e son tres cada una: $0, 2y4$, las formas de escoger a d son dos 6 y 8, las formas de escoger a c y b son tres cada una: 5,7 y 9, y las formas de escoger a a son dos: 1 y 3. Por lo tanto, la cantidad de números pareados que cumplen la condición son $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 324$.

Walabi, Etapa Final

Solución Problema 1. Ver solución de Koala, Etapa Final, Problema 4

Solución Problema 2. 162. Para cada $1 \leq m \leq 27$ encontraremos los múltiplos de m de tres cifras cuya suma de dígitos es m. Si $m \geq 7$ y es coprimo con 9 podemos usar el siguiente acercamiento: Si K satisface ser múltiplo de m entonces $K \equiv 0 \pmod{\text{m}}$ y por otro lado, si su suma de dígitos es m entonces $K \equiv m \pmod 9$ por lo que por teorema chino de residuo $K = m + 9mr$ para algún entero positivo r. Entonces para cada $1 \leq m \leq 27$ las soluciones que buscamos son de las forma $100 \leq m + 9mr \leq 999$

para algún r a estos números los llamaremos *la clase de* m. Entre estos números habrán algunos que funcionen y otros no. De los que funcionen habrán algunos que tengan suma m y otros no. Tomaremos los que tienen suma m pues los que funcionen y no tengan suma m los deberemos encontrar también para alguna otra clase para algún otro valor de m, esto va evitar repeticiones. Vamos a hacer un ejemplo: Para $m = 11$ la clase de 11 son de la forma $0 \leq 11 + 99r \leq 999$ o sea los números 110, 209, 308, 407, 506, 605, 704, 803 y 902. De ellos todos son solución, pero en esta clase no tomaríamos al 110 pues ese lo encontraríamos en la clase del 2. A continuación ponemos para cada $7 \leq m \leq 27$ coprimo con 9 los números en su clase y después cuales tomaríamos como solución:

- $m = 7$: 133, 196, 259, 322,385, 448, 511, 574, 637, 700, 763, 826, 889, 952. Y los que tomaríamos como solución son 133, 322, 511 y 700. Aquí no tomamos al 448 pues aunque es solución deberíamos poder encontrarlo en la clase del 16.

- $m = 8$: 152, 224, 296, 368, 440, 512, 584, 656, 728, 800, 872, 944. Y tomamos 152, 224, 440, 512 y 800.

- $m = 10$: 100, 190, 280, 370, 460, 550, 640, 730, 820, 910. Y tomamos todos salvo el 100.

- $m = 11$: 110, 209, 308, 407, 506, 605, 704, 803, 902. Y tomamos todos salvo el 110.

- $m = 13$: 130, 247, 364, 481, 598, 715, 832, 949. Y tomamos 247, 364, 481, 715, 832.

- $m = 14$: 140, 266, 392, 518, 644, 770, 896. Y tomamos 266, 392, 518, 644, 770.

- $m = 16$: 160, 304, 448, 592, 736, 880. Y tomamos 448, 592, 736, 880.

- $m = 17$: 170, 323, 476, 629, 782, 935. Y tomamos 476, 629, 782, 935.

- $m = 19$: 190, 361, 532, 703, 874, 874. Y tomamos 874.

Para $m = 20, 22, 23, 25, 26$ siguiendo este procedimiento ya no encontraremos soluciones. Ahora hagamos los casos $1 \leq m \leq 6$

- $m = 1$: Solamente el 100 tiene suma de dígitos 1.

- $m = 2$: El 110 y 200 son los únicos con suma de dígitos 2.

- $m = 3$: Aquí encontramos al 111, 120, 210, 102,201 y 300.

- $m = 4$: 400, 220, 112.

- $m = 5$: si acaba en 5 ya los demás deben ser cero. Si es 0 los números 140, 410, 230, 320.

Para $m = 6, 9, 12, 18, 21, 24$

- $m = 6$: Los números son 600, 330, 240, 420, 312, 132, 402, 222, 114, 204.

- $m = 9$: Aquí se debe responder la pregunta ¿De cuántas maneras podemos obtener al nueve como suma de tres dígitos? esa pregunta es claramente de combinatoria. La respuesta es 45.

- $m = 12$: El primer dígito debe ser par, el segundo junto con el primero debe formar un múltiplo de 4 y el tercero debe ser tal que se sume 12. Por ejemplo si el primer dígito es 6, los primeros dos pueden ser 16, 36, 56 y el número debe ser 516,336 o 156. Trabajando de esta manera los números son 912, 732, 652, 372, 192, 804, 624, 444, 264, 516, 336, 156, 408, 228, 840, 660, 480.

- $m = 18$: El primer dígito debe ser par, digamos d y después encontraremos las parejas de dígitos que sumen $18 - d$. Por ejemplo para $d = 4$ los otros dos dígitos deben sumar 14 y las parejas de dígitos que suman eso son (5,9) (6,8) y (7,7) esto nos da las soluciones 594, 954, 684, 864, 774. Trabajando de esta manera obtenemos las soluciones 990, 792, 972, 882, 594, 954, 684, 864, 864, 774, 396, 936, 486, 846, 576, 756, 666, 198, 918, 288, 828, 378, 738, 468, 648, 558.

- $m = 21$: Como su suma de dígitos es 21 debe ser de la forma $9k+3$ y este número debe ser múltiplo de 7 por lo que $k = 7n + 2$ es decir nuestras soluciones son de la forma $63n + 18$ por lo que la clase del 21 es 147, 210, 273, 336, 399, 462, 525, 588, 651, 714, 777, 840, 903, 966. Y tomamos 399, 588, 777 y 966.

- $m = 24$: Como la suma de sus dígitos es 24 debe ser de la forma $9k+6$ y debe ser múltiplo de 8 por lo que k es de la forma $8n + 2$, la clase del 24 son de la forma $72n+24$ i.e los números 168, 240, 312, 384, 456, 528, 600, 672, 744, 816, 888, 960. De aquí tomamos al 888.

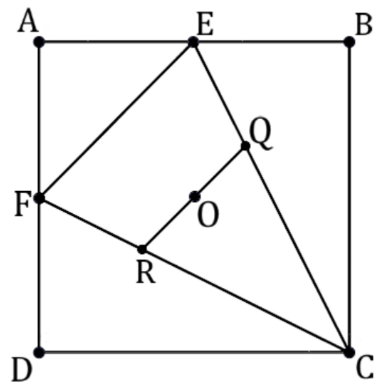
- $m = 27$: sólo el 999.

En conclusión las soluciones son 133, 322, 511, 700, 152, 224, 440, 512, 800, 190, 280, 370, 460, 550, 640, 730, 820, 910, 209, 308, 407, 506, 605, 704, 803, 902, 247, 364, 481, 715, 832, 266, 392, 518, 644, 770, 448, 592, 736, 880, 476, 629, 782, 935, 100, 110, 200, 111, 120, 210, 102, 201, 300, 400, 220, 112, 410, 230, 320, 600, 330, 240, 420, 312, 132, 402, 222, 114, 204, 912, 732, 652, 372, 192, 804, 624, 444, 264, 516, 336, 156, 408, 228, 840, 660, 480, 990, 792, 972, 882, 594, 954, 684, 864, 864, 774, 396, 936, 486, 846, 576, 756, 666, 198, 918, 288, 828, 378, 738, 468, 648, 558, 399, 588, 777, 966, 999, 888 y 45 soluciones de $m = 9$.

Solución Problema 3. Observamos que al trazar la diagonal AE, los triángulos AEC y AFC tienen la misma área. Si O es el centro del cuadrado (el punto de intersección de las diagonales), entonces los triángulos AEO y EOC tienen misma área, pues $AO = OC$ y la altura desde E es la misma para ambos. Análogamente, AFO y FOC tienen misma área también. Las igualdades de áreas anteriores implican que $AEOF$ y $CEOF$ son iguales en área así como $\frac{(AECF)}{2}$.

Nombremos Q al punto de intersección de EC con la diagonal BD y R al punto de intersección de FC con la diagonal BD. Dado que E y F son puntos medios de AB y AD, respectivamente, se sigue que EF y QR son paralelas. Por lo tanto, para cualquier punto P sobre QR, se satisface que el área EFP es igual al área EFO (son triángulos que comparten la base EF y tienen las mismas alturas). Con ello, los cuadriláteros

$AEOF$ y $AEPF$ tienen las mismas áreas para cualquier punto P sobre QR: $\frac{(AECF)}{2}$. Concluimos que todos los puntos P sobre QR cumplen que las áreas $CEPF$ y $AEPF$ son iguales.



Por último, observemos que si elegimos un punto P' dentro del pentágono $AEQRF$, entonces el área $AEP'F$ es menor que el área de $AEOF$, es decir, menor que $\frac{(AECF)}{2}$. Por otro lado, si P' está dentro del triángulo QRC, notamos que el área $AEP'F$ es mayor que $\frac{(AECF)}{2}$. De lo anterior concluimos que los puntos en QR (incluyendo los puntos Q y R) son los únicos que satisfacen lo indicado por el problema.

Solución Problema 4. 4625, 4875, 5216, 5264, 5736, 5784, 6125 y 6375. Notemos que si Germán escoge el número $\overline{abcd}$ (donde a, b, c, y d representan dígitos), se tiene que es igual que es escoger el número $\overline{dcba}$ ya que son contrarios entre ellos. Sin pérdida de generalidad digamos que Germán escoge el número $\overline{abcd}$. Llamaremos $x = \overline{abcd} \times \overline{dcba}$, que es un número de 8 dígitos que termina en tres ceros. Notamos que $a \neq 0 \neq d$, pues serían números de sólo 3 dígitos. Dado que x termina en 3 ceros, es múltiplo de $1000 = 2^3 \times 5^3$. Por tanto 5^3 y 2^3 dividen a x. Entonces, 5 divide a $\overline{abcd}$ y/ó a $\overline{dcba}$, y debe(n) terminar en 0 ó en 5. Sabemos que $a \neq 0 \neq d$. En caso de que a y d fuesen ambos 5, la multiplicación de éstos terminaría en 5. Lo cual contradice la hipótesis de que x termina en cero. Así, sólo uno es igual a 5. Sin perdida de generalidad, $a = 5$. Dado que $0 \neq d \neq 5$, se tiene que $\overline{abcd} = \overline{5bcd}$ no tiene ningún factor de 5. Por lo tanto 125 divide a $\overline{dcb5}$. Luego, $\overline{dcb5}$ debe terminar en 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875 ó 000, pero como su último dígito es 5, sólo son posibles las terminaciones 125, 375, 625 y 875. Los únicos valores posibles de $\overline{dcb5}$ son:

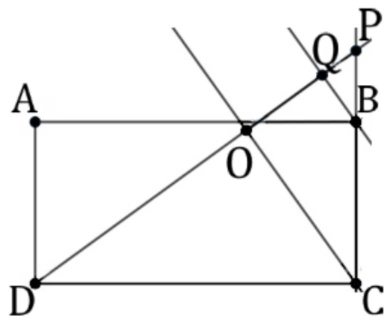
$$\overline{d125}, \overline{d375}, \overline{d625} \text{ y } \overline{d875}.$$

Los únicos valores posibles de $\overline{5bcd}$ son:

$$\overline{521d}, \overline{573d}, \overline{526d} \text{ y } \overline{578d}.$$

Como $\overline{dbc5}$ es impar, no tiene ningún factor 2. Luego, $2^3 = 8$ divide a $\overline{5bcd}$. Dados los únicos valores que puede tomar $\overline{abcd}$ y por el criterio de divisibilidad del 8, se tiene que 8 divide a $\overline{21d}$, $\overline{73d}$, $\overline{26d}$ ó $\overline{78d}$. De aquí, los posibles valores de $\overline{abcd}$, son: 5216, 5736, 5264 y 5784. Se puede comprobar que las multiplicaciones correspondientes son de 8 dígitos y por lo tanto Germán pudo haber escogido 5216, 6125, 5736, 6375, 5264, 4625, 5784 y 4875.

Solución Problema 5. 10 unidades. Sean P la intersección de L con la recta BC, Q y O las proyecciones de B y C a la recta L (intersecciones de las rectas perpendiculares a L que pasas por B y C, respectivamente).



Nombremos $x = BC = AD$. De las hipótesis del problema: $2x = AB = DC$. Debido a que QB y OC son perpendiculares a L, se tiene que QB y OC son paralelas. Por la semejanza de los triángulos POC y PQB, se tiene que $\frac{QB}{OC} = \frac{PB}{PC}$. Luego $\frac{2}{6} = \frac{PB}{PB+x}$, por lo que $PB = \frac{x}{2}$ y $PC = PB + BC = \frac{3x}{2}$. Por teorema de Pitágoras en el triángulo PDC, se tiene que

$$DP^2 = DC^2 + PC^2 = (4x^2) + \left(\frac{9x^2}{4}\right) = \frac{25x^2}{4}.$$

Luego $DP = \frac{5x}{2}$. Por criterio AA se tiene una semejanza entre los triángulos PCD y POC, dado que $\angle POC = 90^o = \angle PCD$ y comparten el ángulo en P. Por lo tanto $\frac{OC}{CD} = \frac{PC}{PD}$. Con lo cual $\frac{6}{2x} = \frac{\frac{3x}{2}}{\frac{5x}{2}}$. Concluimos que $\frac{3}{x} = \frac{3}{5}$ y con ello $AB = 2x = 10$.

Canguro, Etapa Final

Solución Problema 1. 21 personas. Sean N la cantidad de participantes que salieron a comer y K la cantidad de dinero que tendrían que pagar si todos lo hubieran hecho. Es decir $NK = 1680$. Sabemos que sólo pagaron $N-4$ personas y cada uno pagó $K+1$. Luego $(N-4)(K+1) = 1680 = NK$. Entonces $NK = NK + N - 4K - 4$. Por lo que $N = 4(K+1)$. Sustituyendo en la ecuación $NK = 1680$. Obtenemos $4(K+1)(K) = 1680$ y con ello $K(K+1) = 420$.
Sabemos que $420 = 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Vemos que K y $K+1$ tienen diferentes paridades, por lo que sólo uno es divisible entre 4 y debe dividir a 420. Las opciones son: 4, 12, 20, 28, 60, 84, 140 y 420. De esto obtenemos las siguientes parejas:

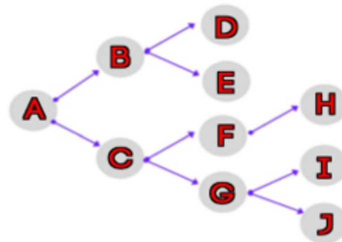
$$4 \cdot 105 = 12 \cdot 35 = 20 \cdot 21 = 28 \cdot 15$$

$$= 60 \cdot 7 = 84 \cdot 5 = 140 \cdot 3 = 420 \cdot 1 = 420.$$

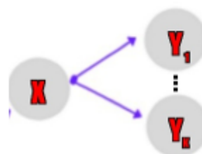
De las cuales, la única de la forma $K(K+1)$ es la $\{20, 21\}$.

Solución Problema 2. Ver solución de Walabi, Etapa Final, Problema 5.

Solución Problema 3. 8960. Sean las letras $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ y J, los números que se encuentra acomodados en la figura tal como se muestra en la imagen.



Por hipótesis del problema se tiene que $A > B, C$; $B > D, E$; $C > F, G$; $F > H$; $G > I, J$. Por transitividad se tiene que A es el mayor número de todos, es decir $A = 10$ pues no es permitido repetir números. Similarmente, $C > F, G, H, I, J$. Luego $9 \geq C \geq 6$. Veamos que si, de forma general, se tiene una figura del siguiente tipo, donde $X > Y_1, \ldots, Y_K$ y se tienen que los números que pueden ir en los $K+1$ espacios son $a_1 < \ldots < a_N$ (un total de N números).



Se tienen $\binom{N}{K+1}$ formas de escoger los $K+1$ números de los N disponibles y para acomodarlos basta con que el número que se encuentra en la posición X sea el más grande de todos los escogidos. Los demás números pueden ser ordenados de $K!$ formas, de donde las maneras de formar la figura general es $\binom{N}{K+1}K!$, donde N es la cantidad de números disponibles y K la cantidad de espacios. Veamos que para escoger B, F y G se tienen las siguientes tres figuras:

Quedan 8 números disponibles para escoger (los números del 1 al 9 menos el número que se escogió para C) dando así para la primera figura un total de $\binom{8}{3} \cdot 2! = \frac{(8 \cdot 7 \cdot 6)}{(32)} \cdot 2 = 112$. Para el segundo caso se tiene que ahora $N = 5$ (ya que se escogió 3 números para el primer caso) dando así $\binom{5}{3} \cdot 2! = \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 2 = 20$. Notemos que el último caso queda definido al ser N =2 ya que se pone el valor más grande primero. Por lo tanto, hay $(4)(112)(20) = 8960$ formas de acomodar los números en la figura.

Solución Problema 4. 541. La descomposición canónica (en factores primos) de 2310 es $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$, por lo que cuenta con 5 factores. Al realizar una cadena se le agrega alguna cantidad de factores al elemento anterior. Siendo así, el problema se transforma en calcular las diferentes formas que tenemos de colocar 5 factores y en algún orden. Podemos:

1. Agregar un factor a la vez (ejemplo: 1, 2, 6, 30, 210, 2310). Esto nos genera diferentes cadenas según el orden en que lo hagamos, por lo que hay $5! = 120$ cadenas para este caso.

2. Agregar tres factores uno a la vez, y un número que sea el resultado de multiplicar dos factores (ejemplo: 1, 6, 30, 210, 2310). Aquí habría que elegir los dos factores que se juntarán y después permutar para generar cadenas distintas según el orden en que se agregan los factores, por lo que hay $\binom{5}{2} \cdot 4! = 240$ cadenas para este caso.

3. Agregar dos factores a la vez en dos etapas distintas de la cadena y un solo factor en otra (ejemplo: 1, 6, 210, 2310). Primero se elige cuál de los factores de 2310 irá solo, y de los cuatro restantes se elige un par para que se agrupen (el otro par queda determinado al ser los números que sobran). Considerando que el factor que se quedó solo, puede ser el primero, el segundo o el último de estos tres elementos de la cadena, el total de cadenas para este caso es $5 \cdot \binom{4}{2} \cdot 3 = 90$.

4. Un número compuesto por tres de los cinco factores y otros dos de factor único (ejemplo: 1, 30, 210, 2310). Primero debe elegirse el grupo de tres factores que formarán al elemento de la cadena, y luego se coloca en la primera, segunda o tercera posición entre estos tres elementos de la cadena. Para este caso hay un total de $\binom{5}{3} \times 3! = 60$ cadenas.

5. Un elemento compuesto por dos factores y otro compuesto por tres factores (ejemplo: 1, 30, 2310). Elegimos los dos factores del primer elemento (los otros tres forzosamente se determinan a formar el segundo elemento) y podemos luego permutar ambos elementos de lugar en la cadena. Para este caso hay un total de $\binom{5}{2} \cdot 2 = 20$ cadenas.

6. Agregar un elemento de cuatro factores y agregar el factor restante en otra etapa de la cadena (ejemplo 1, 210, 2310). Para este caso hay que contar cuántos grupos de cuatro se pueden hacer con los 5 factores y permutarlo en la cadena con el factor que se quedó solo. El total de cadenas para este caso es $\binom{5}{1} \cdot 2 = 10$.

7. Agregar los 5 factores en una sola etapa de la cadena (ejemplo: 1, 2310). Para este caso, sólo hay una cadena.

Realizando la suma de todos estos casos llegamos al resultado.

Solución Problema 5. $72°$. Sea P un punto sobre AL tal que $PL = BM$; así $BP = BM + BL = MN$ (P termina siendo punto medio de AB). Como M y N son puntos medios, MN es paralela a AB, por lo que $\triangle NMC$ es semejante a $\triangle ABC$, con $MN = CN$. Como N es punto medio, AN también es igual a esos segmentos; y por construcción, NL también lo es, entonces $AN = LN = MN = CN$.
Como P es punto medio, PN es paralela a BC. Sea $\angle NMC = \theta$, por lo que $\angle APN = \theta$. Sea $\angle PLN = \alpha$. Ya que P, N y M son puntos medios, $PN = BM$, por lo que $\triangle PNL$ es isósceles con $\angle PLN = \angle PNL = \alpha$. De aquí que, por el ángulo externo en P, $\theta = 2\alpha$.

Además, $\angle MNC = \angle BAC = \alpha$ porque $MN \parallel AB$. La suma de ángulos en $\triangle MNC$ es $2\theta + \alpha = 180°$. Recordemos que $\theta = 2\alpha$, por lo que $5\alpha = 180°$, y entonces $\alpha = 36°$. Viendo los ángulos en el punto N, se tiene que $\angle ANP + \angle PNL + \angle LNM + \angle MNC = 180°$. Por lo tanto, $\angle LNM = 36°$. Ya que $\triangle LMN$ es isósceles con $\angle NML = \angle NLM$, se concluye que $\angle NLM = 72°$.

Uombat, Etapa Final

Solución Problema 1. 84. Este problema puede representarse con la siguiente ecuación:

$$\frac{1680}{x} + 1 = \frac{1680}{x-4}.$$

Para resolver y encontrar el valor de x realizamos los siguientes pasos algebraicos:

$$\begin{aligned} \frac{x+1680}{x} &= \frac{1680}{x-4} \\ (x+1680)(x-4) &= 1680x \\ x^2 - 4x + 1680x - 6720 &= 1680x \\ x^2 - 4x - 6720 &= 0 \\ (x+80)(x-84) &= 0. \end{aligned}$$

Ya que x debe ser un número positivo, la solución es $x = 84$.

Solución Problema 2. C es el punto medio de AB y el área máxima es $\frac{AB^2\pi}{16}$. El área sombreada puede calcularse mediante la siguiente expresión:

$$\frac{\pi \cdot AB^2}{2} - \frac{\pi \cdot AC^2}{2} - \frac{\pi \cdot BC^2}{2}.$$

Tomando la longitud de AB como constante, el máximo valor del área sombreada se alcanza cuando $\frac{\pi \cdot AC^2}{2} + \frac{\pi \cdot BC^2}{2}$ es mínimo; esto es lo mismo que $\frac{\pi}{2}(AC^2 + BC^2)$. Como π y $\frac{1}{2}$ también son constantes, lo anterior se traduce a encontrar el mínimo de $AC^2 + BC^2$. Ahora pensemos que AC es una variable x, y que eso vuelve a BC una función que depende de la constante AB y la variable x. Es decir, $AC = x$, $BC = AB - x$. Queremos encontrar entonces el mínimo de

$$x^2 + (AB - x)^2 = 2x^2 - 2x \cdot AB + AB^2.$$

El coeficiente del término cuadrático de la parábola anterior es positivo, por lo que ésta abre hacia arriba y en efecto tiene un valor mínimo cuando la pendiente de esta curva es 0. Derivando la expresión respecto a x e igualando a 0, se tiene $4x - 2AB = 0$ y despejando obtenemos $x = \frac{AB}{2}$. De modo que cuando el punto C está a la mitad del segmento AB el área sombreada es máxima.

Solución Problema 3. Ver solución de Canguro, Etapa Final, Problema 3.

Solución Problema 4. Ver solución de Canguro, Etapa Final, Problema 4.

Solución Problema 5. La desigualdad útil dice que $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$ con x, y positivos. Vemos que la desigualdad en cuestión es muy parecida en estructura, por lo que podemos utilizar la *útil*. Esto es posible porque tanto x como y, por definición del problema son positivos menores a 1, por lo que sus cuadrados serán también menores a 1, y las expresiones $1 - x^2$ y $1 - y^2$ son positivas. Con ello, tenemos que

$$\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-y^2} \geq \frac{(1+1)^2}{2 - x^2 - y^2} = \frac{4}{2 - x^2 - y^2}.$$

Si mostramos que este último extremo de la desigualdad es mayor o igual al extremo derecho de la desigualdad original, habremos concluido. Intentemos ver si, por medio de pasos reversibles podemos llegar de esa nueva desigualdad a una conocida o verdadera:

$$
\begin{aligned}
\frac{4}{2-x^2-y^2} &\geq \frac{2}{1-xy} \\
\frac{2}{2-x^2-y^2} &\geq \frac{1}{1-xy} \\
2-2xy &\geq 2-x^2-y^2 \\
-2xy &\geq -x^2-y^2 \\
x^2-2xy+y^2 &\geq 0 \\
(x-y)^2 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Esta última sabemos que es verdadera porque todos los números reales, al elevarse al cuadrado son 0 o positivos (mayores que 0). Dado que es posible construir la desigualdad que queríamos probar a partir de esta última (haciendo los pasos a la inversa), hemos mostrado lo que se quería mostrar.

El Centro de Alto Rendimiento en Matemáticas fue fundado en 2011 en San Luis Potosí, México. Desde entonces, nos hemos dedicado a la preparación de estudiantes, profesores y familias para distintos concursos de matemáticas, principalmente aquellos que caen bajo el paragüas de Olimpiada de Matemáticas. Hemos tenido la oportunidad de trabajar con cientos de estudiantes muy talentosos, dentro y fuera de la Olimpiada, en todo México y partes de América Latina.

En CARMA estamos comprometidos con la educación matemática, con proporcionar un espacio accesible y seguro donde todos, todas y todes puedan continuar su preparación olímpica permanente, dar sus primeros y segundos pasos en concursos, o acercarse a las matemáticas desde una perspectiva lúdica y un aprendizaje basado en problemas.

Para más información sobre CARMA: Centro de Alto Rendimiento en Matemáticas, te presentamos los siguientes enlaces:

- Cursos en https://cursos.carmaenlinea.com/
- Concursos en https://concursos.carmaenlinea.com/.
  Anualmente organizamos Olimpiada Femenil (febrero-marzo), Olimpiada Virtual de Matemáticas (agosto) y Olimpiada de Otoño (septiembre-octubre).
- Nuestra página de Facebook en http://fb.com/carmatematicas
- Nuestro canal de YouTube en https://youtube.com/carma2011
- El canal de YouTube de ugesaurio en https://www.youtube.com/ugesaurio

CENTRO DE ALTO RENDIMIENTO EN MATEMATICAS

CARMA

·2011·

CENTRO DE ALTO RENDIMIENTO EN MATEMATICAS

CARMA

·2011·