Centro de Alto Rendimiento
en Matemáticas

VII Olimpiada Femenil: 2021

Problemas y soluciones

VII Olimpiada Femenil 2021

Equipo CARMA

21 de enero de 2022

Noviembre 2021

Los problemas originales de este material son autoría del Equipo CARMA, a saber: Cecilia Hernández, Germán Puga, Armando Moreno, Luis Islas, Danielle Flores, más Yareli Navarro en el Concurso de Física y José Luis Carballo en el Concurso de Informática. Este material puede ser distribuido de manera libre porque nuestro compromiso es con la creación y divulgación de material para Olimpiada de Matemáticas; **por favor considera hacer un donativo, porque todxs tenemos que comer y pagar renta.** Por el amor de Euler, no subas este material a Scribd ni cobres por compartirlo.

Para cualquier correción, por favor comunícate con nosotros vía Facebook o a nuestro correo electrónico en matematicascarma@gmail.com.

La versión preliminar de este material estuvo a cargo de Cecilia Hernández.
La persona a cargo del material es Danielle Flores.

Primera edición: Noviembre 2021

Editorial Dinosaurio
San Luis Potosí, México
`carmatematicas (at) gmail (dot) com`

Si este material te ha sido útil, por favor considera apoyar nuestro proyecto editorial.
Puedes hacerlo en Patreon, comprometiendo un donativo mensual.

https://www.patreon.com/ugesaurio

También puedes hacer una donación ocasional vía PayPal.

https://www.paypal.com/paypalme/ugesaurio

O bien, mediante depósito o transferencia, a nombre de Eugenio Daniel Flores Alatorre en BBVA Bancomer, a través de su aplicación bancaria, deposito en practicaja o en cualquier Oxxo del país:

CLABE: 012700004649844474 número de tarjeta: 4152 3133 9055 2979

Introducción

La VII Olimpiada Femenil se celebró en febrero y marzo de 2021 de manera virtual, a través de nuestra plataforma de concursos.carmaenlinea.com. Participaron estudiantes de México y Perú.

En este folleto encontrarás la lista de ganadoras del Concurso de Matemáticas, los enunciados de los problemas de cada categoría y cada etapa, así como sus soluciones. Las cinco categorías el Concurso de Matemáticas de la Olimpiada Femenil son:

Cuyo: 3ro de Primaria (3er año) y 4to de Primaria (4to año) **Koala:** 5to de Primaria (5to año) y 6to de primaria (6to año) **Walabi:** 1ro de Secundaria (7mo año) y 2do de Secundaria (8vo año) **Canguro:** 3ro de Secundaria (9no) y 1ro de Bachillerato (10mo año) **Uombat:** 2do de Bachillerato (11vo) y 3ro de Bachillerato (12vo año)

Además del Concurso de Matemáticas, la VII Olimpiada Femenil celebró concursos de Informática, a través de la plataforma omegaUp, de Física, en forma de video ensayo, y de Divulgación, en categoría de Fotografía.

Ganadoras

Para decidir a las ganadoras de la VII Olimpiada Femenil se consideraron únicamente los resultados de la segunda etapa, pero la participación total de la primera etapa. Se premia en proporción 1 : 2 : 3 : 4 : 50 para Primer Lugar : Segundo Lugar : Tercer Lugar : Mención Honorífica : Participante.

Categoría Cuyo

Primer Lugar

Emma Guadalupe Hernández Gutiérrez	Colegio Anglo Americano de Nuestra Señora de la Paz
Sophia Sandoval Montiel	Colegio Cervantes de Torreón

Segundo Lugar

Elisa Villarreal	Primaria GHS
Ivanna Jacqueline Aguilera Alvarado	Instituto Sanford Torreon
Fátima Rangel	–

Tercer Lugar

Itzayana Berenice Ramos Hernandez	Escuela Primaria Josefa Ortíz de Domínguez
Amy Fharide Lara Lopez	Instituto Sanford Torreón
Angelica Lorena Domínguez Rodríguez	Instituto Sanford Torreón
Isabla de la Cruz Reyez	Instituto Sanford Torreón
Amaia Fernanda Guerrero Lambarri	Adrien Hanneman
Montserrat Alejandro Sequera	Centro de Alto Rendimiento Académico
Ximena Cruz García	Primaria Prisciliano Villarreal Dávila

Categoría Koala

Primer Lugar

Dana Karen Medina González	Colegio Libanés Peninsular
Elisa Nohemí Carrrillo Cruz	Colegio Cervantes Vigata
Mayté Lozano Lozano	Colegio Cervantes Vigata

Segundo Lugar

Luana Raisa Alcántara Orellana	Prolog
Zariffe Yamel Céspedes Pelayo	Bartolomé de Medina
Angélica Montserrat Ortiz Aguilar	Colegio Euro Texcoco
Alejandra Mireles Barron	Colegio Cervantes de Torreón
Juliana Sofia Moreno Muñiz	Instituto Cervantes Apostólica

Tercer Lugar

Diana Camila aviles granados	Efrén rebolledo
Dannia Guadalupe Moreno García	Jaime Torres Bodet
Camila Muñoz Cortés	Profesor Candelario Nava Jiménez
Andrea Rosete Guerra	LIMECA (Liceo Mexicano Canadiense)
Camila Turcios Martínez	Colegio Cervantes Torreón, unidad Bosque
Ariana Marilyn Trujillo Gallegos	Escuela Prolog
Valeria Garcia Sanchez	Escuela Heroes Patrios
Marley Sophia Valadez Ortega	Centro de alto rendimiento académico
Ashley Tafoya Hernández	Instituto Sanford
Stefany Sofia Castillo Villanueva	Instituto Winston Churchill

Categoría Walabi

Primer Lugar

Ghalia Lizet Degales Sánchez	Esc. Sec. Tec. No. 1 Xicohténcatl Axayacatzin
Andrea Sarahí Cascante Duarte	Colegio Hamilton Junior High
Angela Maria Flores Ruiz	Escuela Jesusita Neda

Segundo Lugar

Camila Celeste Ochoa Huaman	Saco Oliveros
Sayuri Rivera	CEPAC Jalisco
Valery Olivares Torres	Colegios PROLOG
Catherine González Díaz	Esc. Sec. 2 "Jaime Torres Bodet"
Laura Villalobos Sámano	Roberto Ruiz Obregón

Tercer Lugar

Alejandra Ayme Anzures Castillo	Colegio Cervantes de Torreón Campus Bosque
Rosangel Bullon	Saco oliveros
Dulce Paloma Romero Díaz	Colegio Huetamo
Grace Alejandra Valencia Villanueva	CEPAC Jalisco
Sara Carrillo Cruz	Colegio Cervantes Vigatá
Valeria Fernanda Acosta Peña	PROLOG-Lima

Yessy Sophia Vidal Rosaldo	Escuela Técnica 9
Eugenia María Cruz Pérez	Olimpiada Oaxaca
Ana Guadalupe Báez Rovira	Éfren Ramírez Hernández
Angélica Yazmín Carrillo Casanova	Centro Educativo Huinalá
Iraida Reyes Ortiz	PrograMate
Stephania Terrazas Trejo	–
Sofía Constanza Santisteban Dávila	ConcientizArte Secundaria
Lesley Valeria Soto Domínguez	Escuela Cervantes

Categoría Canguro

Primer Lugar

María Fernanda López Tuyub	Secundaria General 4 "José Vasconcelos"
Uma Salcedo Reyes	Instituto Sanford
Diana Laura Garza de la Riva	Colegio Cervantes de Torreón
Valeria Patricia Pareja Soto	Saco Oliveros
Sofia Velázquez Velázquez	TOT
Itzel Cano Rivas	Escuela Secundaria Oficial Pénjamo
Ana Camila Cuevas González	Instituto Winston Churchill

Segundo Lugar

Argelia Sánchez Cruz	Instituto Julia García Retana
Fernanda Salazar Quiñonez	CECyT 18
Isabela Loredo Carvajal	Colegio Nuevo Santander
Dessyret Juleysi Razabal Ramos	
Maria Fernanda Montoya Lopez	Colegio Enrique Arreguín

Tercer Lugar

Irene Escudero Cázarez	Colegio Nueva Senda
Fatima Stefania Olaya Herrera	PROLOG
Aylin Ximena Ocampo Vera	Cbtis 134
Arantza Torres Báez	CBTis 03
Camila González Luján	Escuela Secundaria Estatal 3002
Yaremi Paúl Báez	CBTIS 03
Lucero Díaz Ortega	Escuela Sec 33
Pérez Lara Claudia Itzel	CECyT 16 Hidalgo
Ximena Islas Espinoza	Colegio José María Lafragua
Victoria Vanessa Esparza Ortega	Centro de Educación Media UAA Central

Categoría Uombat

Primer Lugar

Megan Ixchel Monroy Rodríguez	CECyT No.16 HIDALGO
Natalia Montserrat Cruz Pérez	Olimpiadas Oaxaca

Segundo Lugar

Ana Stephanie Esparza Dávila	BachUAA
Lia Medina	Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos No. 16 "HidalgoÏPN
Vianey Guadalupe Cortes Hernández	Sistema Educativo SEP en linea
Lina Itzek	

Tercer Lugar

Natalia Flores Vega	UCO Prepa Contemporánea
María Inés López García	Prepa Tec de Monterrey Campus Zacatecas
Sandra Gabriela Vilchis Lizárraga	Instituto Noray
Venus Carmín Lévano Fernández	PROLOG
Ana Paula Galicia Lozano	PrepaTec Santa Fe
Andrea Angulo Juarez	Preparatoria UPAEP Angelópolis

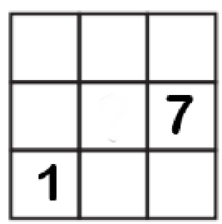
Enunciados de los Problemas

Cuyo, Primera Etapa

Problema 1. Daniela quiere comprar paletas para sus amigos. La tienda vende paletas sueltas a \$10 cada una, cajas de 3 paletas por \$20, y cajas de 5 paletas por \$30. ¿Cuál es el mayor número de paletas que Daniela puede comprar con \$80?

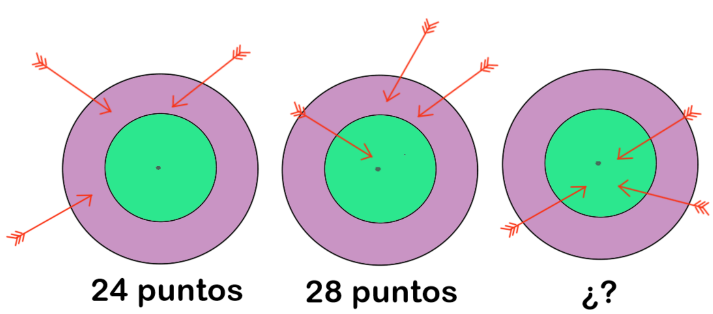
(a) 8 (b) 11 (c) 12 (d) 13 (e) 15

Problema 2. Se quiere llenar cada casilla de un tablero de 3×3 con números enteros, de forma que la suma de los números en dos casillas que comparten un lado sea la misma. Ya hay escritos dos números, como se ve en la figura. ¿Cuánto suman de todos los números que estarán escritos en el tablero?



(a) 33 (b) 45 (c) 56 (d) 72 (e) 81

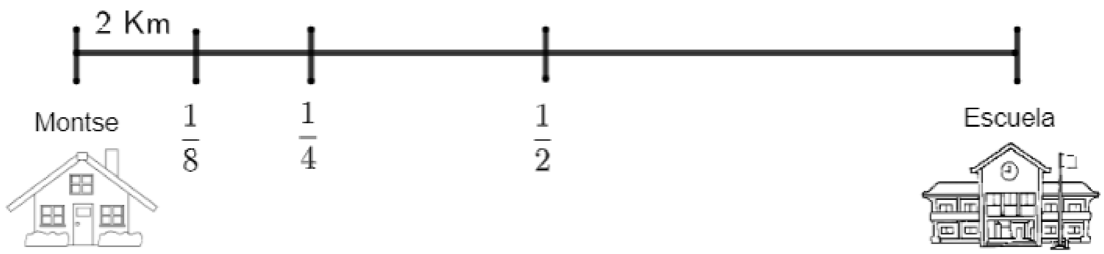
Problema 3. Diana practica tiro con arco. Una partida le permite lanzar 3 tiros al tablero, el cuál está puntuado según la zona en la que se quedan clavadas las flechas. Cada flecha en una partida suma puntos y al final los resultados de Diana fueron los siguientes: en su primer intento obtuvo un total de 24 puntos por las tres flechas; en el segundo intento sumó 28 puntos. ¿Cuántos puntos consigue en su tercer intento?



(a) 26 (b) 30 (c) 32 (d) 36 (e) 40

Problema 4. Lucía quiere cortar un listón en 5 trozos del mismo largo. Para esto marca los puntos donde debe hacer los cortes. Luisa quiere cortar el mismo listón en 7 partes iguales, y también marca sobre él los puntos donde hacer los cortes. Al final llega Luis y corta el listos en todos los puntos que Lucía y Luisa habían marcado. ¿Cuántos trozos de listón obtiene Luis?
(a) 5 (b) 7 (c) 9 (d) 11 (e) 13

Problema 5. ¿Cuántos Kilómetros recorre Montse para ir de su casa a la escuela?

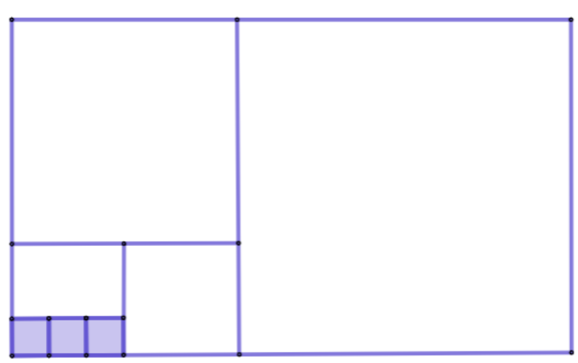


(a) 4 Km (b) 8 Km (c) 12 Km (d) 14 Km (e) 16 Km

Problema 6. Una taza llena de café pesa 450 gr. Una taza vacía pesa 150 gr. ¿Cuánto pesa una taza llena hasta la mitad de café?

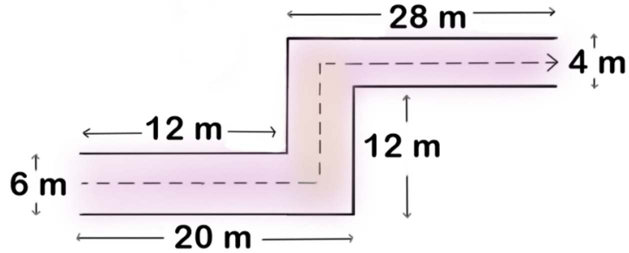
(a) 225 gr (b) 250 gr (c) 300 gr (d) 350 gr (e) 375 gr

Problema 7. La siguiente figura se ha formado usando cuadrado de diferentes tamaños. Dentro de uno de los cuadrados pequeños caben tres cuadraditos sombreados que miden 1 cm^2 de área cada uno. ¿Cuánto mide el área de toda la figura?

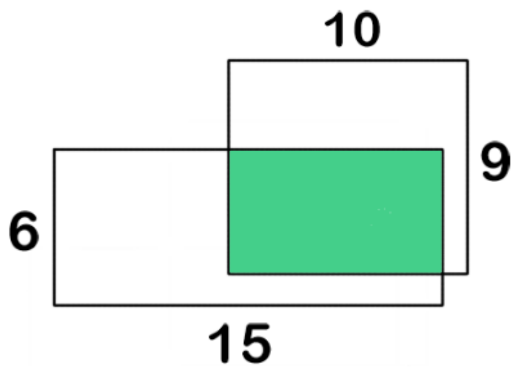


(a) 54 cm^2 (b) 90 cm^2 (c) 135 cm^2 (d) 149 cm^2 (e) 164 cm^2

Problema 8. Daniela camina en el medio de un pasillo que tiene las siguientes medidas. Su recorrido es el de la línea punteada. ¿Cuántos metros recorre?
(a) 48 cm (b) 51 cm (c) 56 cm (d) 58 cm (e) 82 cm

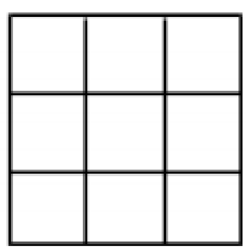


Problema 9. Dos rectángulos se sobreponen para formar tres regiones que tienen la misma área. Los rectángulos originales miden 6 cm por 15 cm, y 9 cm por 10 cm. Además, cada uno de los lados del rectángulo coloreado, también mide un número entero de centímetros. ¿Cuánto mide el **perímetro** de este rectángulo coloreado?



(a) 24 (b) 28 (c) 30 (d) 32 (e) 36

Problema 10. Nueve cuadrados de 1 cm por 1 cm se acomodan en 3 filas y en 3 columnas para formar un solo cuadrado, como el que se muestra en la figura. El perímetro del cuadrado formado es de 12 cm. Si la figura se corta en exactamente dos piezas, a lo largo de las líneas en su interior, ¿cuál es la mayor suma de perímetros, que se puede obtener de las dos figuras?



(a) 15 cm (b) 16 cm (c) 18 cm (d) 22 cm (e) 24 cm cm

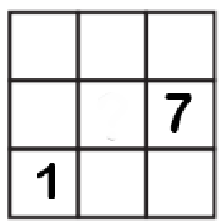
Problema 11. Alicia juega con la palabra ROMA. Cada segundo puede escoger dos letras que se encuentren juntas e intercambiarlas, para formar una nueva palabra. Por ejemplo, si decide comenzar con las dos últimas letras, el resultado será la palabra ROAM. ¿Cuántos segundos necesita para llegar a la palabra AMOR?

(a) 2 (b) 3 (c) 5 (d) 6 (e) 8

Problema 12. Angélica acomoda cuatro calcomanías de CARMA, una sobre otra, como se ve en la figura. De la más pequeña a la más grande, sus áreas son 1 cm^2, 4 cm^2, 9 cm^2 y 16 cm^2. ¿Cuál es el área de la zona morada?
(a) 9 cm^2 (b) 10 cm^2 (c) 11 cm^2 (d) 12 cm^2 (e) 13 cm^2

Koala, Primera Etapa

Problema 1. Se quiere llenar cada casilla de un tablero de 3×3 con números enteros, de forma que la suma de los números en dos casillas que comparten un lado sea la misma. Ya hay escritos dos números, como se ve en la figura. ¿Cuánto suman de todos los números que estarán escritos en el tablero?

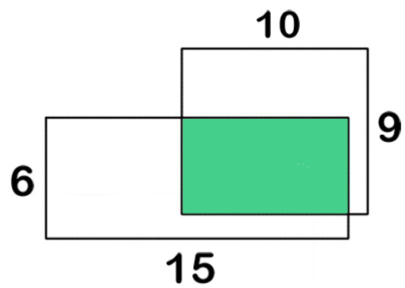


(a) 33 (b) 45 (c) 56 (d) 72 (e) 81

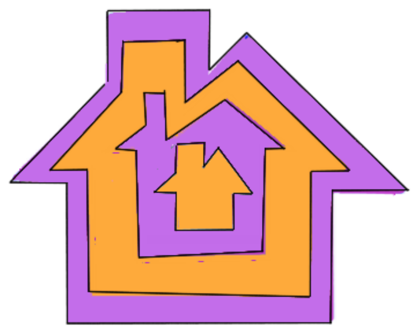
Problema 2. Al entrar al cine, Ceci lleva Una caja de palomitas llena a $\frac{3}{4}$ de su capacidad. Después de comer 54 palomitas, la caja se encuentra a la mitad. ¿Cuál es la capacidad total de la caja?
(a) 27 (b) 81 (c) 108 (d) 216 (e) 248

Problema 3. Dos rectángulos se sobreponen para formar tres regiones que tienen la misma área. Los rectángulos originales miden 6 cm por 15 cm, y 9 cm por 10 cm. Además, cada uno de los lados del rectángulo coloreado, también mide un número entero de centímetros. ¿Cuánto mide el **perímetro** de este rectángulo coloreado?
(a) 24 (b) 28 (c) 30 (d) 32 (e) 36

Problema 4. Alicia juega con la palabra ROMA. Cada segundo puede escoger dos letras que se encuentren juntas e intercambiarlas, para formar una nueva palabra. Por ejemplo, si decide comenzar con las dos últimas letras, el resultado será la palabra ROAM. ¿Cuántos segundos necesita para llegar a la palabra AMOR?
(a) 2 (b) 3 (c) 5 (d) 6 (e) 8



Problema 5. Angélica acomoda cuatro calcomanías de CARMA, una sobre otra, como se ve en la figura. De la más pequeña a la más grande, sus áreas son 1 cm^2, 4 cm^2, 9 cm^2 y 16 cm^2. ¿Cuál es el área de la zona morada?



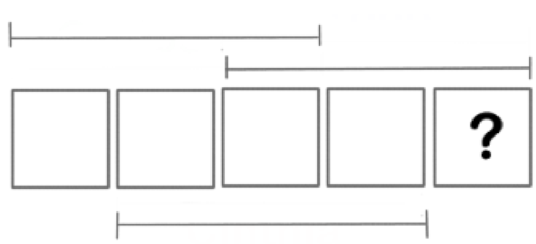
(a) 9 cm^2 (b) 10 cm^2 (c) 11 cm^2 (d) 12 cm^2 (e) 13 cm^2

Problema 6. Ali, Ale, y Alo son trillizas. Su hermano es 3 años más grande que ellas. ¿Cuál de las siguientes podría ser la suma de edades de los cuatro hermanos?
(a) 28 (b) 30 (c) 31 (d) 34 (e) 40

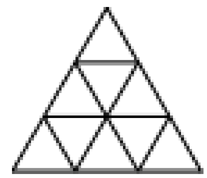
Problema 7. En la tienda de Ceci se puede intercambiar 1 café por 3 panecillos. Un panecillo se puede intercambiar por 2 sobres de azúcar. ¿Cuántos sobres de azúcar pueden cambiarse por 2 cafés?
(a) 6 (b) 8 (c) 10 (d) 12 (e) 14

Problema 8. Ximena tiene dos listones de 1 y 2 metros cada uno. Para hacer pulseras, corta los listones en trozos, todos del mismo tamaño, sin que sobre. ¿Cuál de los siguientes no puede ser el número total de trozos que obtiene?
(a) 8 (b) 9 (c) 12 (d) 15 (e) 21

Problema 9. Paty reparte los números del 1 al 5 en las siguientes casillas. Se da cuenta de que las primeras tres cifras (de izquierda a derecha) forman un múltiplo de 5, las tres cifras de en medio forma un múltiplo de 3, y las últimas tres forman un múltiplo de 4. ¿Qué número ha escrito en la casilla hasta la derecha?



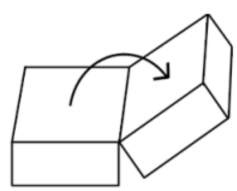
Problema 10. Un tablero en forma de triángulo equilátero está dividido en 9 triángulos iguales como se ve en la figura. Dos triángulos del tablero se llaman vecinos si comparten uno de sus lados.



Mónica escribe los números del 1 al 9, uno en cada triángulo, de forma que cada número sea divisible entre la cantidad de vecinos al triángulo que ocupa. ¿De cuántas formas puede Mónica ordenar los números en el tablero?

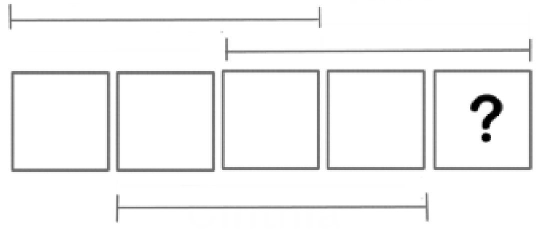
Problema 11. N es un número entero de 5 dígitos. A es el número que se obtiene de escribir un 1 a la derecha del último dígito (unidades) de N. B es el número que se obtiene al escribir un 1 a la izquierda del primer dígito (decenas de millar) de N. Si A es el triple de B, ¿cuánto vale N?

Problema 12. Un cubo sólido de 2 cm por 2 cm por 2 cm se corta en dos prismas rectangulares idénticos, como se muestra en la figura. La mitad superior se voltea completamente sobre uno de los bordes, de modo que ahora queda justamente coincidiendo lado a lado con la mitad inferior para formar un nuevo sólido. ¿Cuántos centímetros cuadrados tiene la superficie total de este nuevo sólido?

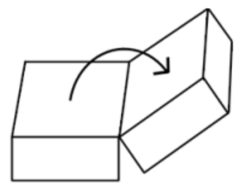


Walabi, Primera Etapa

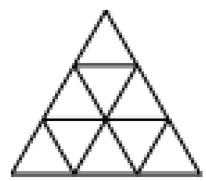
Problema 1. Paty reparte los números del 1 al 5 en las siguientes casillas. Se da cuenta de que las primeras tres cifras (de izquierda a derecha) forman un múltiplo de 5, las tres cifras de en medio forma un múltiplo de 3, y las últimas tres forman un múltiplo de 4. ¿Qué número ha escrito en la casilla hasta la derecha?



Problema 2. Un cubo sólido de 2 cm por 2 cm por 2 cm se corta en dos prismas rectangulares idénticos, como se muestra en la figura. La mitad superior se voltea completamente sobre uno de los bordes, de modo que ahora queda justamente coincidiendo lado a lado con la mitad inferior para formar un nuevo sólido. ¿Cuántos centímetros cuadrados tiene la superficie total de este nuevo sólido?



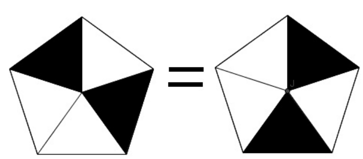
Problema 3. Un tablero en forma de triángulo equilátero está dividido en 9 triángulos iguales como se ve en la figura. Dos triángulos del tablero se llaman vecinos si comparten uno de sus lados. Mónica escribe los números del 1 al 9, uno en cada triángulo, de forma



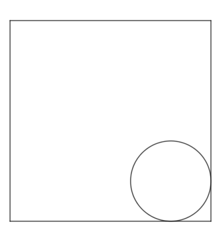
que cada número sea divisible entre la cantidad de vecinos al triángulo que ocupa. ¿De cuántas formas puede Mónica ordenar los números en el tablero?

Problema 4. N es un número entero de 5 dígitos. A es el número que se obtiene de escribir un 1 a la derecha del último dígito (unidades) de N. B es el número que se obtiene al escribir un 1 a la izquierda del primer dígito (decenas de millar) de N. Si A es el triple de B, ¿cuánto vale N?

Problema 5. En el pizarrón hay dibujado el siguiente pentágono. Paty tiene dos colores distintos, blanco y negro. ¿Cuántos pentágonos distintos podría obtener usando sus colores, teniendo en cuenta que va a pintar todas las regiones y que dos pentágonos son iguales si uno es resultado que girar el otro como los de la figura?



Problema 6. En el diagrama se representan un marco de madera cuadrado que tiene lado 20 y una rueda de bicicleta que tiene diámetro 2.



Se hace girar la rueda de modo que va avanzando por el interior del marco, siempre en el mismo sentido. ¿Cuántas vueltas completas da la rueda sobre sí misma una vez que llega al mismo punto en el que comenzó?

Problema 7. Es posible pegar cuatro octágonos regulares por lados consecutivos, de manera que no se traslapen y se forme un hueco en forma de cuadrado, como muestra la imagen. Es posible hacer algo similar con tres polígonos regulares idénticos, formando un hueco en forma de triángulo equilátero. ¿Cuántos lados tienen estos polígonos?

Problema 8. Camila multiplica los números impares consecutivos en orden, comenzando desde el 1, $(1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots)$ y se detiene cuando su resultado sea divisible entre 2021. ¿Cuál es el último número por el cual multiplicó Camila?

Problema 9. El perrito de Ceci sabe hacer cuatro trucos: girar, sentarse, dar la patita y equilibrarse en dos patas. Cuando quiere llamar la atención de su dueña, hace una rutina con 4 de sus trucos, siguiendo algunas reglas: no puede sentarse dos veces seguidas, y no puede girar más de tres veces en total, porque se marea. ¿Cuántas rutinas diferentes puede hacer su perrito?

Problema 10. Un gusano avanza 60 cm en 100 minutos. Para llegar de su casa a casa de su mamá tarda menos de dos días. De hecho, tarda una cantidad entera exacta de horas y recorre una cantidad entera exacta de metros. ¿Cuántas horas tarda en llegar a casa de su mamá?

Problema 11. ¿Cuántos números enteros entre 1 y 1000 cumplen a la vez las siguientes dos condiciones?

- Son múltiplos de 3
- La suma de sus dígitos es divisible entre 7

Nota: Si el número es un solo dígito, la suma de sus cifras es igual al dígito.

Problema 12. Encuentra el resultado de la siguiente operación:

$$0 - 1 - 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 7 - 8 + 9 + \ldots + 2018$$

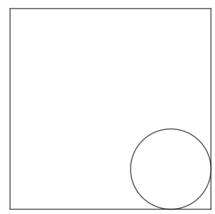
donde los signos ”menos” están en todas las potencias de 2 y los signos ”más” en el resto de los números.

Canguro, Primera Etapa

Problema 1. Cuando un reloj de manecillas marca las $4:48$, ¿cuántos grados mide el ángulo más chico formado entre sus manecillas?

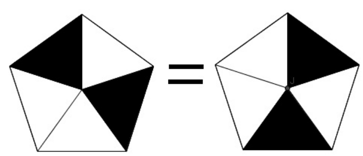
Problema 2. En una reunión hay 5 niñas: Alma, Bere, Ceci, Diana, Elda y Felipa. Bere tiene 1 amigas en la reunión, Ceci tiene 2, Diana tiene 3 y Elda tiene 4. ¿Cuántas amigas tiene Felipa en la reunión?

Problema 3. En el diagrama se representan un marco de madera cuadrado que tiene lado 20 y una rueda de bicicleta que tiene diámetro 2.



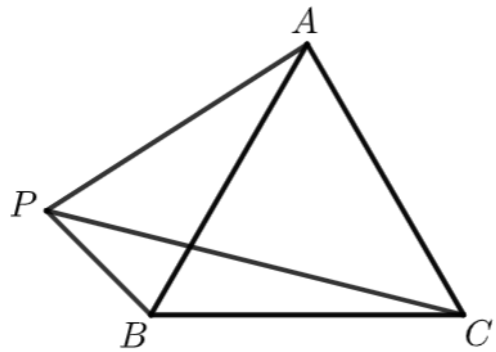
Se hace girar la rueda de modo que va avanzando por el interior del marco, siempre en el mismo sentido. ¿Cuántas vueltas completas da la rueda sobre sí misma una vez que llega al mismo punto en el que comenzó?

Problema 4. En el pizarrón hay dibujado el siguiente pentágono. Paty tiene dos colores distintos, blanco y negro. ¿Cuántos pentágonos distintos podría obtener usando sus colores, teniendo en cuenta que va a pintar todas las regiones y que dos pentágonos son iguales si uno es resultado que girar el otro como los de la figura?



Problema 5. Es posible pegar cuatro octágonos regulares por lados consecutivos, de manera que no se traslapen y se forme un hueco en forma de cuadrado, como muestra la imagen. Es posible hacer algo similar con tres polígonos regulares idénticos, formando un hueco en forma de triángulo equilátero. ¿Cuántos lados tienen estos polígonos?

Problema 6. En la siguiente figura ABC es un triángulo equilátero y P es un punto tal que $\angle BCP = 20$ y $CPA = 40$. ¿Cuánto mide el ángulo BAP?

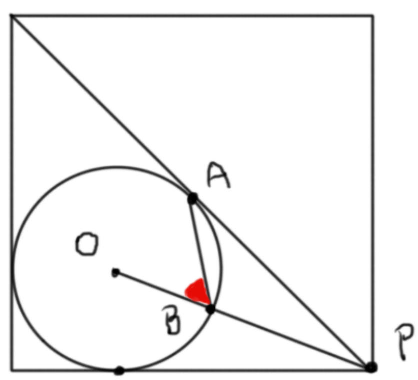


Problema 7. Un gusano avanza 60 cm en 100 minutos. Para llegar de su casa a casa de su mamá tarda menos de dos días. De hecho, tarda una cantidad entera exacta de horas y recorre una cantidad entera exacta de metros. ¿Cuántas horas tarda en llegar a casa de su mamá?

Problema 8. El reverso de 159 es el número 951, y estos suman 1110, el cual es divisible por 30. ¿Cuántos números de tres dígitos tienen la propiedad de que, cuando se suman con su reverso, el resultado es divisible entre 30?

Problema 9. Dana quiere leer un libro de 378 páginas. En la primer hoja, están las páginas 1 y 2; en la segunda hoja están las páginas 3 y 4, y así sucesivamente. Por supersticiosa, Camila arrancó todas las hojas que tienen una página con número múltiplo de 6. Por otra superstición distinta, Uma arrancó todas las hojas que tienen una página con número múltiplo de 7. ¿Cuántas hojas le quedan al libro de Dana?

Problema 10. Se tiene un cuadrado de vértice P al que se le ha trazado una de sus diagonales. El círculo de centro O es tangente a los tres lados del triángulo, a la diagonal del cuadrado en A. La recta OP corta al círculo en B. Determina la medida del ángulo marcado en rojo que corresponde al ángulo $\angle OBA$.



Problema 11. Encuentra la suma de todos los enteros n menores a 100 tales que $n+2, n+4, n+8$ y $n+16$ sean números primos.

Problema 12. Con un mazo de cartas numeradas del 1 al 100, German juega a tomar algunas y multiplicar los números que aparecen en ellas. ¿Cuál es la mayor cantidad de cartas que puede escoger de tal manera que el resultado no sea múltiplo de 18?

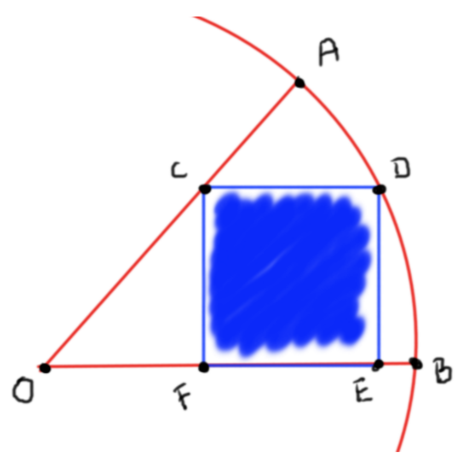
Uombat, Primera Etapa

Problema 1. Cuando un reloj de manecillas marca las $4:48$, ¿cuántos grados mide el ángulo más chico formado entre sus manecillas?

Problema 2. Al momento de presionar el botón $\sqrt{\ }$, la calculadora de Germán muestra en pantalla el resultado positivo de la raíz cuadrada del número que haya estado en la pantalla. Germán escribió en su calculadora un número entero entre $1,000$ y $10,000$. Luego presionó el botón $\sqrt{\ }$ en 3 ocasiones seguidas y obtuvo otro número entero. ¿Con qué número empezó Germán?

Problema 3. ¿Cuántos números enteros entre 100 y 999, inclusive, tienen la propiedad de que sus dígitos en algún orden forman un múltiplo de 11? Por ejemplo, 132 y 312 tienen esta propiedad.

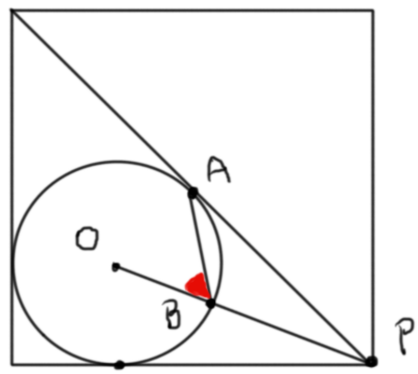
Problema 4. La sección circular formada por el segmento OA, OB y el arco AB es un octavo de la circunferencia de centro O y radios OA y OB (por lo que $\angle AOB$ es de 45 grados). Se ha dibujado un cuadrado $CDEF$ (en azul). Su lado EF está en el lado OB, su vértice C está en el segmento OA y el vértice D está en el arco AB. Si OB mide 10 unidades, encuentra el área del cuadrado azul.



Problema 5. Dana quiere leer un libro de 378 páginas. En la primer hoja, están las páginas 1 y 2; en la segunda hoja están las páginas 3 y 4, y así sucesivamente. Por supersticiosa, Camila arrancó todas las hojas que tienen una página con número múltiplo de 6. Por otra superstición distinta, Uma arrancó todas las hojas que tienen una página con número múltiplo de 7. ¿Cuántas hojas le quedan al libro de Dana?

Problema 6. Se tienen cinco segmentos de longitudes 2 cm, 3 cm, 4 cm, 8 cm y 9 cm. ¿Cuántos triángulos diferentes puede construir usando tres de estos segmentos?

Problema 7. Se tiene un cuadrado de vértice P al que se le ha trazado una de sus diagonales. El círculo de centro O es tangente a los tres lados del triángulo, a la diagonal del cuadrado en A. La recta OP corta al círculo en B. Determina el valor de $4\cdot\angle OBA$.



Problema 8. Definimos

$$P(x) = (x - 1^2)(x - 2^2) \cdot \ldots \cdot (x - 100^2)$$

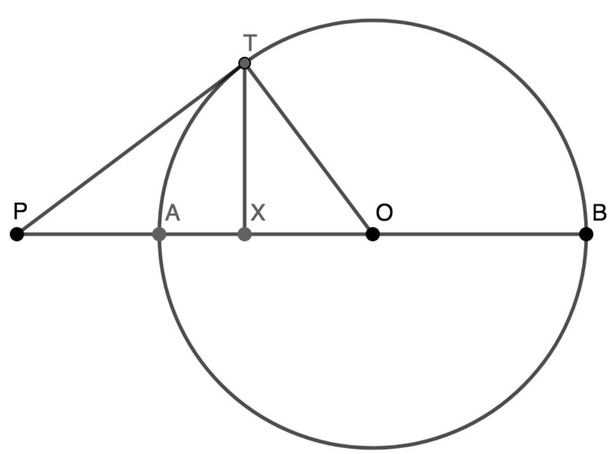
¿Cuántos enteros n cumplen que $P(n) \leq 0$

Problema 9. Diez jugadores de fútbol se pueden acomodar en la cancha como defensivos, medios o delanteros. Si en el equipo Totoro la mayor cantidad de jugadores que puede haber en una de estas posiciones es 4, ¿de cuántas maneras se pueden acomodar los jugadores del equipo Totoro?

Nota: No importa el orden de los jugadores dentro de cada posición.

Problema 10. Encuentra todos los enteros n menores a 100 tales que $n+2, n+4, n+8$ y $n+16$ sean números primos.

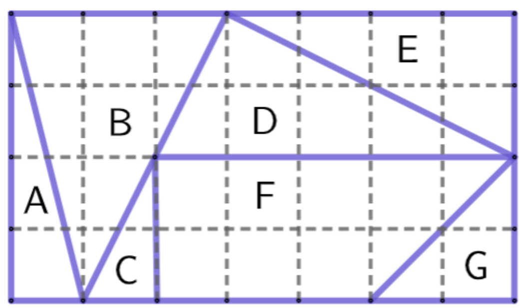
Problema 11. Se tiene una circunferencia con centro en O y diámetro AB. Se prolonga AB por A hasta un punto P. Sea T el punto de tangencia desde P hacia la circunferencia, y sea X el pie de la perpendicular desde T hacia AB. Si PB mide 156 cm, ¿qué medida entera debe tener el radio de la circunferencia para que AX mida 1 cm?



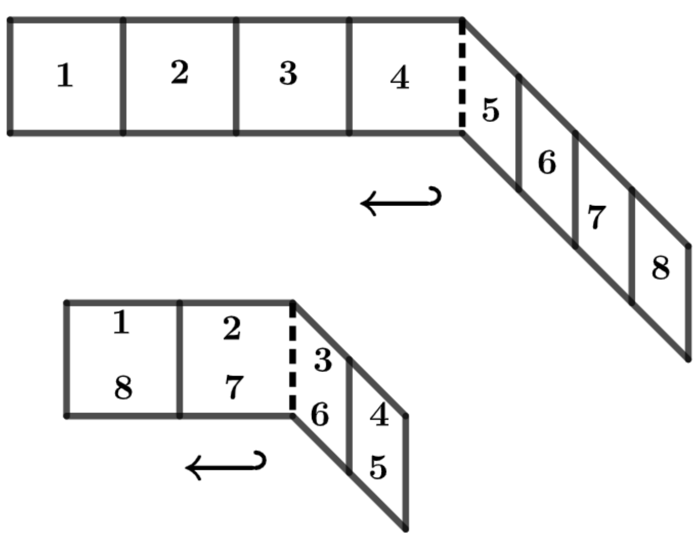
Problema 12. Se construye un conjunto S de la siguiente manera. Para comenzar $S = \{0, 10\}$. Repetidamente, en tanto sea posible, si x es raíz entera de un polinomio $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ para algún $n \geq 1$, con todos los coeficientes a_i elementos de S, entonces se pone a x en S. Cuando ya no se puede añadir más elementos a S, ¿cuántos elementos tiene S?

Cuyo, Etapa Final

Problema 1. Cinco amigas tenían una tableta de chocolate de 4×7 centímetros partida en trozos como se ve a continuación. Alma comió el trozo más grande. Bety y Ceci, comieron la misma cantidad de chocolate, pero Bety comió tres trozos y Ceci solo uno. Daniela comió solo $\frac{1}{7}$ del total y Elda comió el trozo que quedaba. Indica qué trozo comió cada quién y por qué.

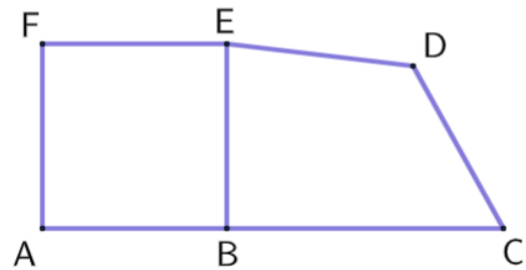


Problema 2. La siguiente tira de papel tiene escritos los números del 1 al 8. Al doblarla a la mitad el 1 coincide con el 8; el 2 coincide con el 7; el 3 coincide con el 6 y el 4 coincide con el 5. Al hacer un doblez más; los números 1,8,4 y 5 coinciden sí como los números 2,3,6 y 7 coinciden. Si en lugar de tener 8 números, tenemos 32 números escritos necesitaríamos cinco dobleces por la mitad hasta que todos coinciden en un cuadrado. ¿Qué números coinciden con el 1 cuando se han hecho solamente cuatro dobleces a la mitad?

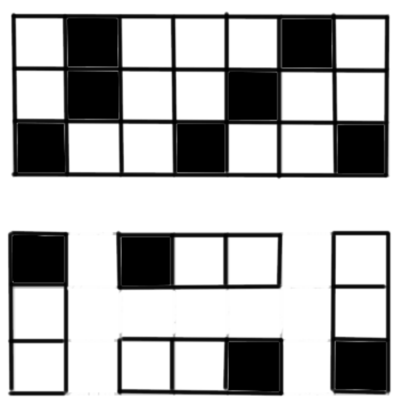


Problema 3. El payaso *sonrisa* antes de salir a acto escoge: Unos zapatos, un pantalón, una camisa, una peluca y un globo. Tiene zapatos color azul, naranja verde y rojo; pantalón azul, naranja, verde, amarillo y rojo; Camisa amarilla y roja; peluca amarilla y roja; globo azul, naranja, verde, rojo, amarillo, gris, negro y morado. ¿De cuántas formas puede salir vestido si no quiere llevar dos artículos del mismo color?

Problema 4. En la siguiente figura, $ABEF$ es un cuadrado que mide 48 cm de perímetro. Los segmentos CD, DE y EF miden lo mismo y además se sabe que AC mide 30 cm. ¿Cuánto mide el perímetro de $BEDC$?



Problema 5. En la figura se tienen cuatro fichas de 3×1 con uno de sus cuadraditos pintados de negro. ¿Es posible construir un tablero de 3×7 usando fichas de este tipo, sin que se sobrepongan ni se salgan del tablero?



Koala, Etapa Final

Problema 1. Cuando Luisa ve un número de más de un cifra le asigna el resultado de multiplicar sus dígitos, y repite esto hasta que obtiene una única cifra. Por ejemplo, con 94 y 37 le pasa lo siguiente:

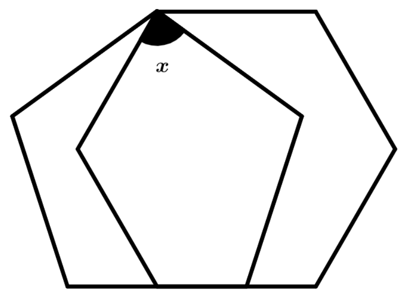
$$94 \xrightarrow{9\times 4} 36 \xrightarrow{3\times 6} 18 \xrightarrow{1\times 8} \boxed{8}$$

$$37 \xrightarrow{3\times 7} 21 \xrightarrow{2\times 1} \boxed{2}$$

¿A cuántos números de dos dígitos les asigna el 0?

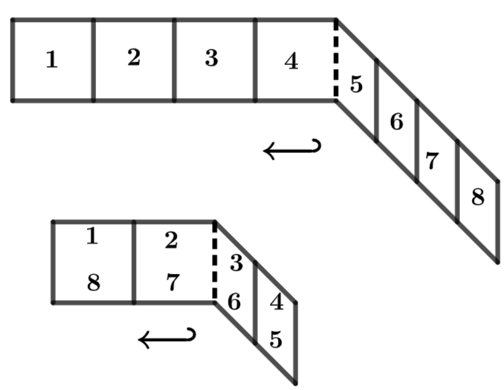
Problema 2. El payaso *sonrisa* antes de salir a acto escoge: Unos zapatos, un pantalón, una camisa, una peluca y un globo. Tiene zapatos color azul, naranja verde y rojo; pantalón azul, naranja, verde, amarillo y rojo; Camisa amarilla y roja; peluca amarilla y roja; globo azul, naranja, verde, rojo, amarillo, gris, negro y morado. ¿De cuántas formas puede salir vestido si no quiere llevar dos artículos del mismo color?

Problema 3. En la siguiente figura se tiene un pentágono regular y un hexágono regular. Sus bases están alineadas y coinciden en un vértice. Encuentra la medida del ángulo x.



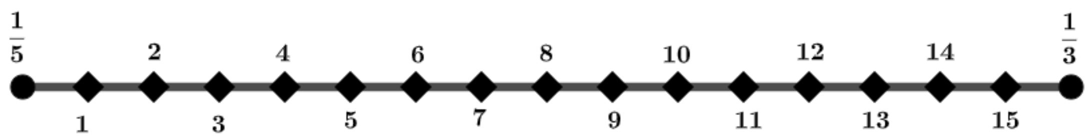
Problema 4. Un herrero cobra 3 pesos por cada corte que hace a un tubo, 5 pesos por soldar una junta entre dos pedazos de tubo, y 5 pesos por cada 10 centímetros de tubo utilizados. Una escalera de 3,6 metros de alto, tiene los peldaños separados por 30 cm entre ellos y cada peldaño mide 40 cm. Si esa escalera la va a sacar toda de un solo tubo que mide exactamente lo que necesita, ¿cuál será su costo final? Nota: No hay peldaños justo en los bordes finales de la escalera. Los peldaños de los extremos están también a 30 cm de los bordes.

Problema 5. La siguiente tira de papel tiene escritos los números del 1 al 8. Al doblarla a la mitad el 1 coincide con el 8; el 2 coincide con el 7; el 3 coincide con el 6 y el 4 coincide con el 5. Al hacer un doblez más; los números 1,8,4 y 5 coinciden, al igual que los números 2,3,6 y 7. Si en lugar de tener 8 números, tenemos 64 números escritos necesitaríamos seis dobleces a la mitad hasta que todos coinciden en un cuadrado. Cuando se han hecho únicamente cinco dobleces por la mitad ¿Cual es la suma de los números con los que coincide el 1?

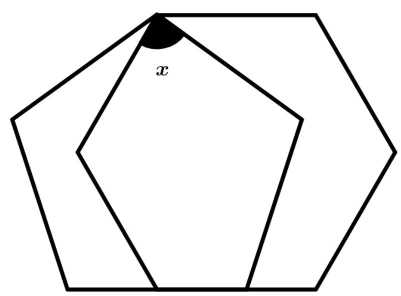


Walabi, Etapa Final

Problema 1. La siguiente recta numérica inicia en un quinto y termina en un tercio. Además, se han puesto en el segmento 15 etiquetas igualmente espaciadas entre ellas y de los extremos del segmento. ¿Qué etiqueta le corresponde al número 0.25?



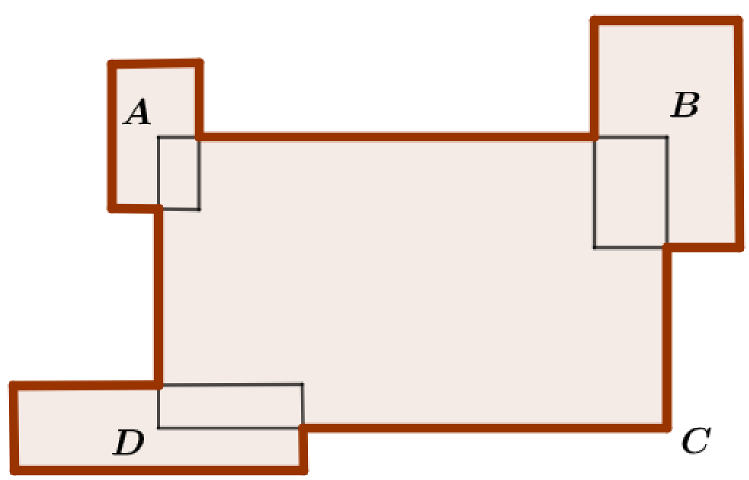
Problema 2. En la siguiente figura se tiene un pentágono regular y un hexágono regular. Sus bases están alineadas y coinciden en un vértice. Encuentra la medida del ángulo x.



Problema 3. ¿Cuántos números de 15 cifras cuyos dígitos son solo 1, 2 y 3 hay, tales que cualquier par de dígitos vecinos difieran en 1? Un ejemplo de estos números es 321232121212123.

Problema 4. Halle el menor entero positivo n tal que la suma de los dígitos de n y de $n+1$, sea cada una múltiplo de 7.

Problema 5. El perímetro del rectángulo $ABCD$ es 30 cm. Otros tres rectángulos son colocados, de tal manera que sus centros están ubicados en los puntos A, B y D (ver la figura) la suma de los perímetros de estos tres rectángulos es 20 cm. ¿Cuál es la longitud total de la línea gruesa?

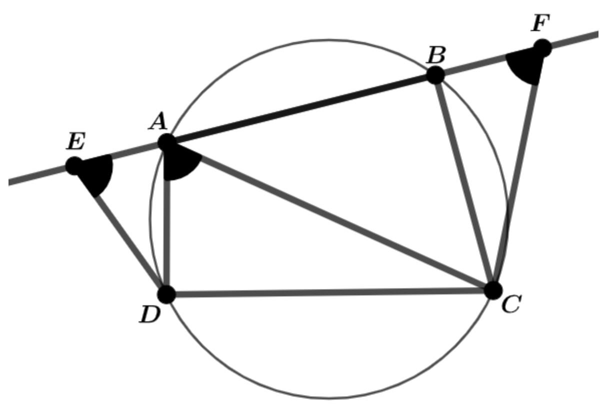


Canguro, Etapa Final

Problema 1. Se tiene la lista de nueve números: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80,90. Hay que borrar la menor cantidad de números posible para que el resultado de la multiplicación de los números que quedan sin borrar sea el mayor cuadrado perfecto posible. Calcular la multiplicación de los números que hay que borrar.

Problema 2. ¿Cuántos números de 15 cifras cuyos dígitos son solo 1, 2 y 3 hay, tales que cualquier par de dígitos vecinos difieran en 1? Un ejemplo de estos números es 321232121212123.

Problema 3. En la figura el cuadrilátero $ABCD$ tiene todos sus vértices en la circunferencia. Si se cumple que $\angle DEA = \angle CFB = \angle DAC$. Demuestra que $EA = FB$.



Problema 4. Ceci y German tienen un mazo de cartas numeradas del 1 al 100 y juegan a escogerlas de la siguiente forma. Ponen una tarjeta sobre la mesa y si alguno la quiere, dice en voz alta la palabra coprimo. Ceci dice coprimo si ve que el número en la tarjeta es primo relativo con 100. German dice coprimo si es número en la tarjeta es primo relativo con 98. La persona que dice coprimo, conserva la carta hasta el final del juego y se saca una nueva del mazo. Si ambos dicen coprimo en la misma tarjeta, esa se queda sobre la mesa junto al resto que no fueron elegidas, para evitar conflictos. Cuando ya no quedan cartas en el mazo, cada uno suma los números en sus tarjetas y gana el que obtenga la suma mayor. Di quién será el ganador del juego y explica por qué.

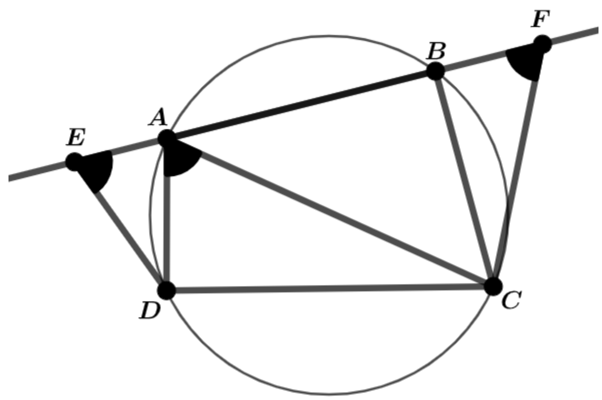
Problema 5. Sean m y n enteros mayores a 1. Demuestra que existen enteros positivos a, b, c y p, q, r tales que

- a, b y c son coprimos por parejas.
- p, q y r son coprimos por parejas.
- a y p son coprimos.
- b divide q.
- c es múltiplo de r.

Uombat, Etapa Final

Problema 1. La colección infinita de números 1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 17,... se ha formado de la siguiente manera: Se coloca primero el primer número impar (1), luego los siguientes dos pares (2, 4), después los siguientes tres impares (5, 7, 9), luego los cuatro pares siguientes (10, 12, 14, 16) y así sucesivamente. ¿El número 2021 pertenece a esta colección de números?

Problema 2. En la figura el cuadrilátero $ABCD$ tiene todos sus vértices en la circunferencia. Si se cumple que $\angle DEA = \angle CFB = \angle DAC$. Demuestra que $EA = FB$.



Problema 3. Orlando tiene 31 cartas cada una con un lado blanco y el otro rojo. Las cartas llevan un número entre 1 y 31 en el lado rojo. Y otro número entre -15 y 15 en el lado blanco. Además de dichas cartas, Orlando tiene 31 amigas a cada una se le asigna un número entre 1 y 31. Si una de sus amigas tiene el número n ella toma las cartas del 1 al n en su lado rojo y multiplica los números de estas cartas en su lado blanco y lo anota. ¿Cuál es la mayor cantidad de números positivos que pueden tener anotadas las amigas de Orlando?

Problema 4. Sean a, b y c enteros positivos tales que $a+b+c$ y c son números impares. Demuestra que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene soluciones enteras.

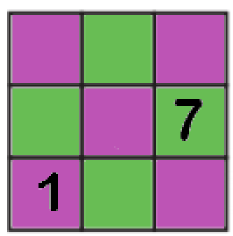
Problema 5. Se tiene la siguiente operación: dado un número entero n, se le resta su mayor divisor propio (divisor distinto de n). Calcular el número de operaciones necesarias para llegar del número 19^{19} al número 1.

Soluciones a los problemas

Cuyo, Primera Etapa

Solución Problema 1. La respuesta es (d). Puede comprar dos cajas de 5 y una caja de 3, obteniendo 13 paletas en total.

Solución Problema 2. La respuesta es (a). Observa que cuando se coloque un 1, este debe dar el mismo resultado si se suma con el 1, que si se suma con la casilla del centro. Por lo que que en el centro debe ir el número 1 también. Además, el número siente se encuentra junto a la casilla del centro, por lo que la suma de cada dos casillas vecinas es igual a $1 + 7 = 8$. El tablero debe llenarse entonces con 1's y 7's. Se han pintado de morado las casillas donde debe ir el 1, y de verde las de 7's. Como son cinco 1's y cuatro 7's, los números en el tablero suman $5 \times 1 + 4 \times 7 = 33$.



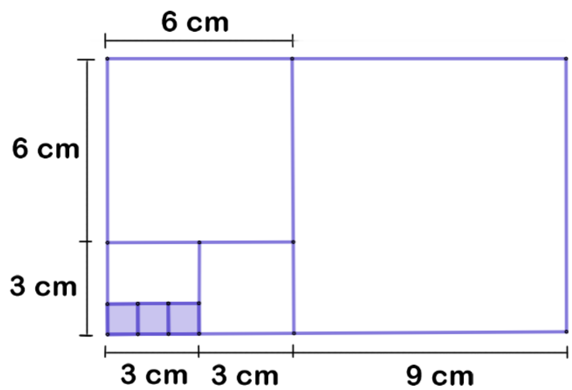
Solución Problema 3. La respuesta es (d) En el primer intento, las tres flechas cayeron en la zona morada, por lo que cada flecha en esa zona vale $24 \div 3 = 8$. En el segundo intento dos flechas cayeron en la zona morada, con estas Diana obtendría $2 \times 8 = 16$ puntos, pero con su tercer tiro obtuvo un total de 28, por lo que cada flecha en esa zona vale $28 - 16 = 12$ puntos. En la última partida, diana tiró todas sus flechas al área verde, consiguiendo $3 \times 12 = 36$ puntos.

Solución Problema 4. La respuesta es (e) 11 trozos. Para dividir el listo en 5 partes, se necesitan solamente 4 marcas, por lo que Lucía marcas en los puntos $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$ y $\frac{4}{5}$. Por otro lado, Luisa hace 6 marcas en el listón en los puntos: $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}$ y $\frac{6}{7}$. Ninguna de las marcas de Lucía coincide con las de Luisa, por lo que al final hay $4 + 6 = 10$ marcas en el listón, lo que lo divide en $10 + 1 = 11$ trozos de distintos tamaños.

Solución Problema 5. La respuesta es (c). Un octavo de la distancia es igual a 2 Km y Montse tiene que caminar 8 veces esa cantidad para llegar a la escuela. En total recorre $8 \times 2 = 16$ Km.

Solución Problema 6. La respuesta es (c). La taza vacía pesa 150 gr, y llena de café pesa 450 gr, por lo que el café completo pesa $450 - 150 = 300$ gr. Entonces sólo la mitad de café pesa $\frac{300}{2} = 150$ gr., y al agregar el peso de la taza da un peso total de $150 + 150 = 300$ gr.

Solución Problema 7. La respuesta es (c). Los tres cuadraditos sombreados caben a lo largo de de un cuadrado más grande, por lo que este nuevo cuadrado mide 3 cm de lado. A su derecha tiene otro cuadrado de la misma altura, por lo que también mide 3 cm por cada lado. Estos dos cuadrados juntos caben a lo largo del cuadrado que

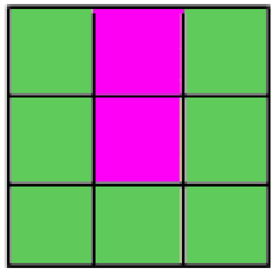


tienen junto encima y que por esto mide 6 cm por lado. Con esto observamos que el rectángulo en la figura mide $3 + 6 = 9$ cm de alto, y que a su vez, esta es la medida del lado del cuadrado mayor, que se encuentra en la parte derecha de la figura. Finalmente el rectángulo mide $3 + 3 + 9 = 15$ cm de largo y su área total es de $915 = 135$ cm^2.

Solución Problema 8. La respuesta es (b). En sentido horizontal, Daniela camina por todo el largo de la figura, la cual,según las medidas marcadas mide $12 + 28 = 40$ metros. Para medir su recorrido vertical, veamos que la altura de la figura es igual a $4+12 = 16$ metros. Sin embargo, Daniela comienza a caminar de forma vertical, estando a la mitad de primer pasillo horizontal y termina al llegar a la mitad del segundo pasillo horizontal. Por lo que a la altura de la figura debemos restar la distancia que no fue recorrida por Daniela: $\frac{6}{2} = 3$ m del primer pasillo y $\frac{4}{2} = 2$ m del segundo. Finalmente su distancia vertical fue de $16 - 3 - 2 = 11$ metros, y su recorrido total de $40 + 11 = 51$ metros.

Solución Problema 9. La respuesta es (b) 28. Primero sumamos el área de los rectángulos grandes, la cual da como resultado: $6 \times 15 + 9 \times 10 = 90 + 90 = 180$ cm^2. En el área de estos dos rectángulos, están incluidas las dos regiones blancas y el área del rectángulo verde dos veces, ya que esta parte de la figura se encuentra en ambos rectángulos. Como estas piezas tienen misma área, cada una de ellas tiene un área de $\frac{180}{4} = 45$ cm^2. El rectángulo verde tiene por tanto área de 45 cm^2 y de la figura puede verse que su largo mide menos 10 cm, y su altura es menor a 6 cm. Como sus medidas son números enteros, la única posibilidad es que tenga 5 cm de alto y 9 cm de largo. Por lo que su perímetro mide $5 + 5 + 9 + 9 = 28$ cm.

Solución Problema 10. La respuesta es (d). La figura puede dividirse en dos piezas como se muestra a continuación. La mayor suma de perímetros se alcanza cuando se realiza un corte lo más largo posible por el interior del cuadrado. Aunque existen otras formas de dividir la figura, podemos notar que un corte más largo dentro de cuadrado dividiría a la figura en más de dos partes. Al sumar perímetro de las dos



figuras propuestas se obtiene un total de 22 cm.

Solución Problema 11. La respuesta es (d). La letra A se encuentra al final de la palabra ROMA y debemos acomodarla al inicio, por lo que se necesitan por lo menos 3 intercambios. De forma similar, se necesita intercambiar de extremo a la letra R, agregando al menos otros 2 intercambios adicionales. Finalmente, se deben acomodar las letras restantes. Los intercambios necesarios son los siguientes:

ROMA - ROAM - ORAM - OARM - AORM - AOMR - AMOR

En total se necesitan 6 intercambios, lo que a Alicia le tomará 6 segundos.

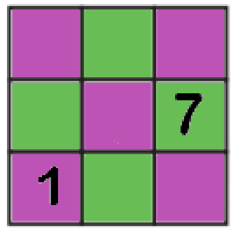
Solución Problema 12. La respuesta es (b). Angélica tiene dos calcomanías moradas, y dos naranjas. Para cada color tiene una grande y una chica. En la figura, se observa un pedazo de la calcomanía morada grande, que mide 16 cm^2 menos 9 cm^2, que es el área de la calcomanía naranja grande, esto es $16 - 9 = 7$ cm^2. Así bien, la otra región morada que se observa es la de la calcomanía morada chica, y ya que se encuentra por debajo del la calcomanía naranja más pequeña, el área que se puede observar mide solo $4 - 1 = 3$ cm ^{2}. En total el área morada en la figura mide $7 + 3 = 10$ cm^2.

Koala, Primera Etapa

Solución Problema 1. La respuesta es (a). Observa que cuando se coloque un 1, este debe dar el mismo resultado si se suma con el 1, que si se suma con la casilla del centro. Por lo que que en el centro debe ir el número 1 también. Además, el número siente se encuentra junto a la casilla del centro, por lo que la suma de cada dos casillas vecinas es igual a $1 + 7 = 8$. El tablero debe llenarse entonces con 1's y 7's. Se han pintado de morado las casillas donde debe ir el 1, y de verde las de 7's. Como son cinco 1's y cuatro 7's, los números en el tablero suman $5 \times 1 + 4 \times 7 = 33$.

Solución Problema 2. La respuesta es (d). Al comer 54 palomitas la caja pasó de tener $\frac{3}{4}$ a $\frac{1}{2}$ del total por lo que éstas equivalen a $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ del contenido de la caja. Su capacidad es de $54 \times 4 = 216$ palomitas.

Solución Problema 3. La respuesta es (b) 28. Primero sumamos el área de los rectángulos grandes, la cual da como resultado: $6 \times 15 + 9 \times 10 = 90 + 90 = 180$ cm^2.



En el área de estos dos rectángulos, están incluidas las dos regiones blancas y el área del rectángulo verde dos veces, ya que esta parte de la figura se encuentra en ambos rectángulos. Como estas piezas tienen misma área, cada una de ellas tiene un área de $\frac{180}{4} = 45$ cm^2. El rectángulo verde tiene por tanto área de 45 cm^2 y de la figura puede verse que su largo mide menos 10 cm, y su altura es menor a 6 cm. Como sus medidas son números enteros, la única posibilidad es que tenga 5 cm de alto y 9 cm de largo. Por lo que su perímetro mide $5 + 5 + 9 + 9 = 28$ cm.

Solución Problema 4. La respuesta es (d). La letra A se encuentra al final de la palabra ROMA y debemos acomodarla al inicio, por lo que se necesitan por lo menos 3 intercambios. De forma similar, se necesita intercambiar de extremo a la letra R, agregando al menos otros 2 intercambios adicionales. Finalmente, se deben acomodar las letras restantes. Los intercambios necesarios son los siguientes:

ROMA - ROAM - ORAM - OARM - AORM - AOMR - AMOR

En total se necesitan 6 intercambios, lo que a Alicia le tomará 6 segundos.

Solución Problema 5. La respuesta es (b). Angélica tiene dos calcomanías moradas, y dos naranjas. Para cada color tiene una grande y una chica. En la figura, se observa un pedazo de la calcomanía morada grande, que mide 16 cm^2 menos 9 cm^2, que es el área de la calcomanía naranja grande, esto es $16 - 9 = 7$ cm^2. Así bien, la otra región morada que se observa es la de la calcomanía morada chica, y ya que se encuentra por debajo del la calcomanía naranja más pequeña, el área que se puede observar mide solo $4 - 1 = 3$ cm ^{2}. En total el área morada en la figura mide $7 + 3 = 10$ cm^2.

Solución Problema 6. La respuesta es (c). Si a la suma de las edades de los hermanos se le resta 3, se obtendría cuatro veces la edad de las trillizas, que debe ser un número entero. Es decir, si a la suma de las edades de los hermanos se le resta 3, el resultado se puede dividir entre 4 y no sobra nada en la división. La única de las opciones que cumple es 31, ya que $31 - 3 = 28$ y $28 \div 4 = 7$. Por lo que las trillizas tienen 7 años y el hermano mayor tiene 10.

Solución Problema 7. La respuesta es (d). Para recibir 2 cafés tenemos que dar 6 panecillos. Además cada panecillo vale lo mismo que 2 sobres de azúcar, por lo que 6 panecillos se intercambian por $6 \times 2 = 12$ sobres. De modo que, para recibir dos cafés tenemos que dar 6 panecillos, o bien su equivalente, que son 12 sobres de azúcar.

Solución Problema 8. La respuesta es (a). Puede dividir el listón de 1 metro en la cantidad de trozos de su elección, siempre y cuando los corte del mismo tamaño. Supongamos que Ximena decide sacar 3 trozos del listón que mide un metro. Si los hace del mismo tamaño, del segundo listón le saldrán 6, es decir, el doble de los que obtuvo en el primero y en total tendría 9 pedazos de listón. Por otro lado, si hubiera partido el primer listón en 4 partes, del segundo hubiera obtenido 8 partes y en total serían 12 trozos. Observa que la cantidad total que obtiene, es el triple de la cantidad de trozos que saca del primer listón. Como este número siempre un múltiplo de 3, entonces 8 no puede ser el resultado final.

Solución Problema 9. Se escribe el número 2. El número formado por las primeras tres cifras es múltiplo de 5, por lo que su dígito en las unidades debe ser 5 o 0. Solo se escriben los números del 1 al 5, por lo que el 5 va en la casilla del centro. Por otro lado, el número formado por las tres cifras de en medio es un múltiplo de 3, por lo que la suma de sus dígitos también lo es. Como el 5 está en la posición del centro, la suma de los dígitos puede ser igual a 9 o 12. De modo que números que pueden ir a los costados del 5 son 1 y 3, o bien, 3 y 4. Observa que en la cuarta posición (de izquierda a derecha), esto nos dice que no puede ir el número 2, pero sí 1, 3 o 4. Ahora bien, por el criterio de divisibilidad del 4, las últimas dos cifras en la figura deben formar un múltiplo de 4, por lo que con los dígitos permitidos únicamente puede tratarse del 12 o 32. Hay dos opciones para el número que puede formar Paty: 43512 y 41532. Sin importar cual se elija, el número en la quinta casilla es el 2.

Solución Problema 10. La respuesta es 216. Los triángulos de las esquinas tienen 1 vecino. Los triángulos de las orillas tienen 2 vecinos y los triángulos del centro tienen 3 vecinos. Dado que $1, 5, 7$ no son divisibles ni por 2 ni por 3, deben ir en alguna de las esquinas; podemos acomodarlos de $3! = 6$ maneras distintas. Los números $3, 6, 9$ son los únicos divisibles entre 3, de manera que deben ocupar los tres triangulitos del centro; podemos acomodarlos de $3! = 6$ maneras distintas. Por último, los números de las orillas deben ser $2, 4, 8$, que solo son divisibles entre 2, y que también podemos acomodar de $3! = 6$ maneras distintas. En total, hay $6 \times 6 \times 6 = 216$ maneras distintas de llenar el tablero.

Solución Problema 11. El valor de N es 42857. Podemos escribir $A = 10N + 1$ y $B = 100000 + N$. Sabemos que $A = 3B$, es decir, $10N + 1 = 300000 + 3N$. Podemos simplificar esto como $7N = 299999$ de donde $N = 42857$.

Solución Problema 12. La respuesta es 28 cm^2. Podemos contar caras del cubo original. La cara superior es igual a 2 caras del cubo original, la inferior también. Las caras de frente y detrás son igual a 1 cara del cubo original, pues es la misma cara pero desdoblada. Por último, las caras izquierda y derecha son igual a la mitad de la cara de un cubo original. En total tenemos $2 + 2 + 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 7$ caras del cubo original. Como cada una tenía área de $2 \times 2 = 4$, el área de la superficie del nuevo sólido es $4 \times 7 = 28cm^2$.

Walabi, Primera Etapa

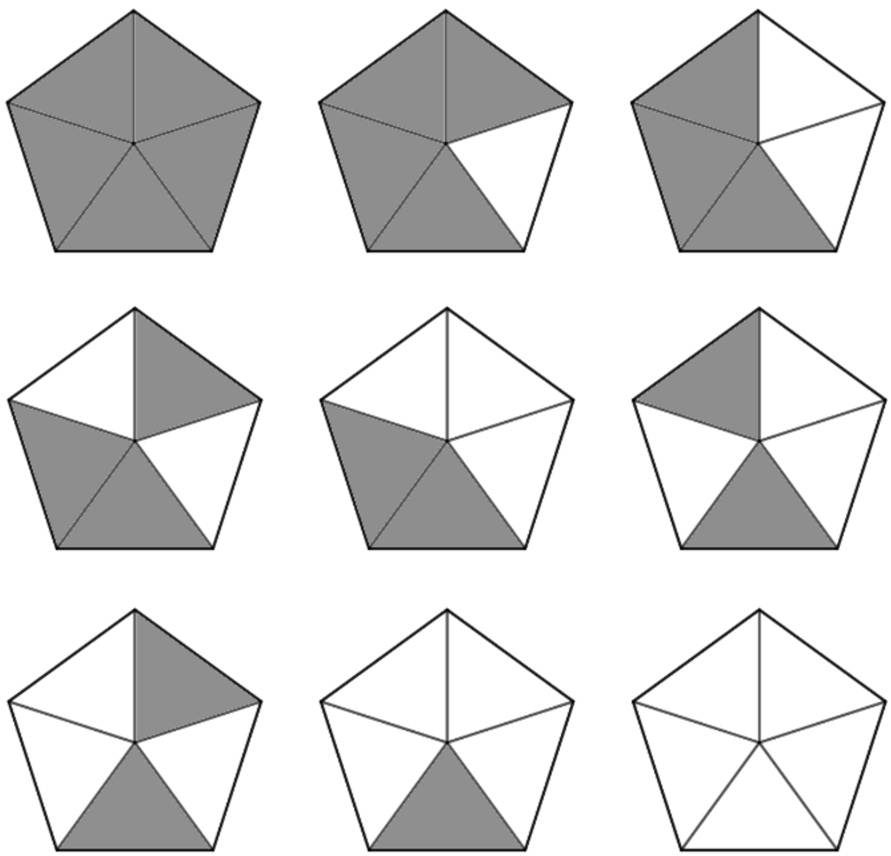
Solución Problema 1. Se escribe el número 2. El número formado por las primeras tres cifras es múltiplo de 5, por lo que su dígito en las unidades debe ser 5 o 0. Solo se escriben los números del 1 al 5, por lo que el 5 va en la casilla del centro. Por otro lado, el número formado por las tres cifras de en medio es un múltiplo de 3, por lo que la suma de sus dígitos también lo es. Como el 5 está en la posición del centro, la suma de los dígitos puede ser igual a 9 o 12. De modo que números que pueden ir a los costados del 5 son 1 y 3, o bien, 3 y 4. Observa que en la cuarta posición (de izquierda a derecha), esto nos dice que no puede ir el número 2, pero sí 1, 3 o 4. Ahora bien, por el criterio de divisibilidad del 4, las últimas dos cifras en la figura deben formar un múltiplo de 4, por lo que con los dígitos permitidos únicamente puede tratarse del 12 o 32. Hay dos opciones para el número que puede formar Paty: 43512 y 41532. Sin importar cual se elija, el número en la quinta casilla es el 2.

Solución Problema 2. Ver solución de Koala, problema 12.

Solución Problema 3. Ver solución de Koala, problema 10.

Solución Problema 4. Ver solución de Koala, problema 11.

Solución Problema 5. Podemos enlistar todas las maneras posibles. Vamos a seguir un orden según cuántas regiones están pintadas de negro, considerando las rotaciones.



Esperamos que no sea difícil convencernos de que cualquier otra manera de colorear es el resultado de una rotación de alguna de estas. En total son 9 pentágonos distintos.

Solución Problema 6. 11 vueltas. Sabiendo que la rueda tiene diámetro 2, radio 1, podemos saber que hay que quitar $1cm$ de cada extremo de cada lado, pues la rueda no llegará por ahí. Esto nos dice que la longitud del lado pasa a ser $18cm$. Como la rueda tiene perímetro aproximado $6{,}14cm$, alcanza a dar $18 \div 6{,}14 = 2{,}91$ vueltas en cada lado, aproximadamente 11,72 vueltas en total. La cantidad de vueltas completas es 11.

Solución Problema 7. 12 lados. Vamos a verificar que es posible en el octágono: los ángulos interiores suman $180(8-2) = 1080$, por lo que cada uno mide $1080 \div 8 = 135°$. Luego, dos de ellos suman 270, y faltan 90 para una vuelta completa, dejando espacio para un cuadrado. Si esto mismo ocurre para formar un triángulo equilátero, entonces el "hueco" es de $60°$, por lo que cada ángulo interior mide $(360-60) \div 2 = 300 \div 2 = 150$. Sabemos que los ángulos interiores de un polígono regular de 12 lados miden $\frac{180(10)}{12} = 150°$, de modo que hemos llegado a la respuesta.

Solución Problema 8. 47. Los factores primos de 2021 son $7, 7, 47$. El mayor de ellos es el último número que necesitamos, es decir, 47.

Solución Problema 9. Contamos en casos, según si hay o no trucos repetidos.

1. 4 trucos distintos. No hay restricciones en este caso y solo hay 4 trucos en total; son $4! = 24$ rutinas en este caso.

2. Un truco se repite. Hay $\binom{4}{2} = 6$ maneras de elegir en qué momento se dan los dos trucos iguales. Si el truco que se repite no es sentarse, no hay restricciones; hay 3 opciones para el truco que se repite y $3 \times 2 = 12$ maneras de completar la rutina para un total de $6 \times 3 \times 12 = 216$ en este caso. Si el truco que se repite es sentarse, hay solo 3 maneras en que puede ordenarlos en la rutina sin que ocurran una después de otra; son $3 \times 12 = 36$ rutinas en este caso.

3. Dos trucos se repiten. Vamos a separar el caso en que uno de los trucos es sentarse; solo hay 3 maneras de acomodarlo en la rutina: $1010, 1001, 0101$ para que no ocurra uno después de otro. Hay 3 opciones para el otro truco, son $3 \times 3 = 9$ rutinas en este caso. Ahora, si ninguno de los trucos es sentarse, hay seis maneras de acomodar la rutina: $1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011$. Vamos a elegir el truco marcado con 1, de 3 maneras distintas y luego el truco marcado con 0, de 2 maneras distintas y esto garantiza que no hay repeticiones. Hay $6 \times 3 \times 2 = 36$ rutinas en este caso.

4. Un truco se repite 3 veces. Hay 4 maneras de acomodar el truco que se repite en la rutina. El truco que se repite no puede ser giro ni sentarse. Luego, hay solo 2 opciones para el truco que se repite, 3 para el otro y $4 \times 2 \times 3 = 12$ rutinas en este caso.

5. 4 trucos iguales. No podrían ser ni giros, porque se marea, ni sentarse, porque necesariamente ocurrirían sucesivamente. Luego, hay solo 2 rutinas en este caso.

En total son $24 + 216 + 36 + 9 + 36 + 12 + 2 = 335$ rutinas distintas que puede hacer el perrito de Ceci para llamar la atención.

Solución Problema 10. 25 horas. No podemos tener $100cm$ ni $200cm$ en una cantidad entera de minutos, pero sí $300cm = 3m$ en 500 minutos. Para tener una cantidad entera de horas, necesitaríamos que el número fuera múltiplo de 60, por lo que el mínimo son 1500 minutos, que son 25 horas. Esto es más de un día pero menos de dos, y 50 horas es más de dos días. Por lo tanto, esta debe ser la respuesta.

Solución Problema 11. Hay 28 números. Los múltiplos de 3 cumplen que la suma de sus cifras también lo es, por lo que vamos a contar aquellos cuya suma de cifras sea múltiplo de 3 y 7 al mismo tiempo, es decir, sea un múltiplo de 21. Dicho esto, observemos que la mínima suma posible par la cifras de los números buscados es 21, por lo que no hay números de una, ni dos cifras, que cumplan lo pedido.
Entre los números menores a 1000, la suma máxima de cifras es 27, correspondiendo al 999. Por tanto, las suma de los números a buscar deberá ser exactamente 21. Las formas de sumar 21 con tres dígitos se listan a continuación: (9,9,3), (9,8,4), (9,7,5), (9, 6, 6), (8, 8, 5), (8, 7, 6) y (7,7,7).
Para cada terna de dígitos distintos hay $3! = 6$ diferentes formas de ordenarlos, dando como resultado 6 diferentes números de tres cifras. En el caso de las ternas con dos dígitos repetidos, por ejemplo, (9,9,3) hay solo 3 formas de ordenarlos; y en el caso de que los tres dígitos sean iguales, como (7,7,7) solo se puede formar un único número, el 777. Haciendo el conteo de ordenamientos para cada terna, obtenemos que hay $3 + 6 + 6 + 3 + 3 + 6 + 1 = 28$ números menores a 1000 que cumplen la condiciones.

Solución Problema 12. La mayor potencia de 2 que es menor a 2018 es $2^{10} = 1024$. Estamos restando $1 + 2 + 4 + \cdots + 1024 = 2047$ Luego, podemos transformar la suma como sigue:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 2018 - 2(2047).$$

Haciendo los cálculos, obtenemos

$$\frac{2018(2019)}{2} - 4094 = 2,033,073$$

.

Canguro, Primera Etapa

Solución Problema 1. Dado que un círculo tiene 360° y hay 60 minutos en el reloj, de un minuto a otro hay

$$\frac{360°}{60} = 6°.$$

Cuando van 48 minutos de una hora, se ha recorrido $\frac{48}{60} = \frac{4}{5}$ de dicha hora. Por lo tanto cuando son las $4:48$ la manecilla horaria ha recorrido $\frac{4}{5}$ del espacio que hay entre las 4 y las 5. Es decir, señala la cuarta rayita de minutos que hay entre las 4 y las 5. Lo que en términos del minutero sería 24.
Por lo tanto, debemos encontrar los grados que hay del minuto 24 al minuto 48. Como son 24 minutos de diferencia, la cantidad de grados será

$$24 \times 6° = \boxed{144°}.$$

Solución Problema 2. Como Elda tiene 4 amigas y solo hay 5 niñas en la fiesta, Elda tiene que ser amiga de Felipa. Bere tiene 1 amiga y debe ser Elda. Diana tiene 3 amigas y una de ella es Elda; Bere no tiene más amigas, así que Diana debe ser amiga de Ceci y de Felipa. Luego, las dos amigas de Ceci son Elda y Diana. En total, Felipa tiene 2 amigas: Elda y Diana.

Solución Problema 3. Ver solución de Walabi, problema 6.

Solución Problema 4. 8. FALTA SOLUCIÓN.

Solución Problema 5. Ver solución de Walabi, problema 7.

Solución Problema 6. Como $\angle CPA = 40$ y $\angle PCA = \angle BCA - \angle BCP = 60 - 20 = 40$, el triángulo APC es isósceles y $\angle PAC = 180 - 40 - 40 = 100$. Luego, $\angle BAP = \angle PAC - \angle BAC = 100 - 60 = 40$.

Solución Problema 7. Ver solución de Walabi, problema 10.

Solución Problema 8. 27 números. Para que sea múltiplo de 30 tiene que ser múltiplo de 3 y múltiplo de 10. Para que sea divisible entre 3, la suma de sus dígitos debe ser divisible entre 3; como es el mismo número pero al revés, al duplicar la suma no afectamos la divisibilidad entre 3, de manera que los números deben ser divisibles entre 3. Para que sea divisible entre 10, el primer y último dígito deben sumar 10, para que quede un dígito 0 al sumar un número con su reverso; para que la suma sea mútiplo de 3, como dos dígitos suman 10, el otro puede ser $2, 5$ u 8 para sumar $12, 15$ o 18. Hacemos la lista en casos:

- Los dígitos son $1, 9$. Podemos formar los números $129, 921, 159, 951, 189, 981$.
- Los dígitos son $2, 8$. Podemos formar los números $228, 822, 258, 852, 288, 882$.
- Los dígitos son $3, 7$. Podemos formar los números $327, 723, 357, 753, 387, 783$.
- Los dígitos son $4, 6$. Podemos formar los números $426, 624, 456, 654, 486, 684$.
- Los dígitos son $5, 5$. Podemos únicamente formar los números $525, 555, 585$.

En total tenemos $6 + 6 + 6 + 6 + 3 = 27$ números.

Solución Problema 9. 90 hojas. En la hoja k están las páginas $2k - 1, 2k$. La página 42, que es par, es la última de la hoja 21; es múltiplo tanto de 6 como de 7 y hay un ciclo cada 21 hojas. De esas primeras 21 se arrancan la $3, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 14, 15, 18, 21$, en total 11 páginas. En 378 páginas hay 189 hojas, 9 ciclos completos de 21 hojas. Por lo tanto, entre Uma y Camila arrancaron $9 \times 11 = 99$ hojas y quedaron $189 - 99 = 90$ hojas en el libro.

Solución Problema 10. Sea X el otro punto de tangencia marcado en la figura. Observemos que $OA = OX$ porque son radios y $PA = PX$ porque son tangentes, de manera que $OAPX$ es un papalote y su diagonal OP es bisectriz; $\angle OPA = 22{,}5$ grados. Sabiendo que $\angle OAP = 90$, tenemos que $\angle OAB = 90 - 22{,}5 = 67{,}5$. Por último, como OAB es isósceles con $OA = OB$, entonces $\angle OAB = \angle OBA = \frac{180 - 67{,}5}{2} = 56{,}25$ grados.

Solución Problema 11. Los números $2, 4, 8, 16$ tienen diferentes congruencias módulo 5 y ninguna es 0; si n no es un múltiplo de 5, alguno de los números en la sucesión sería múltiplo de 5. Para esos casos, veamos que con $n = 1$ obtenemos $3, 5, 9, 17$ donde no todos son primos y con $n = 3$ obtenemos $5, 7, 11, 19$ que sí cumple; para los demás casos, el múltiplo de 5 sería distinto de 5 y, por lo tanto, no sería primo.

Ahora, n tiene que ser un múltiplo impar de 5. Si n fuera par, los cuatro números serían pares. Probamos con cada uno y obtenemos:

- Para $n = 5$, los números $7, 9, 13, 21$, que no funciona.
- Para $n = 15$, los números $17, 19, 23, 31$, que sí funciona.
- Para $n = 25$, los números $27, 29, 33, 41$, que no funciona.
- Para $n = 35$, los números $37, 39, 43, 51$, que no funciona.
- Para $n = 45$, los números $47, 49, 53, 61$, que no funciona.
- Para $n = 55$, los números $57, 59, 63, 71$, que no funciona.
- Para $n = 65$, los números $67, 69, 73, 81$, que no funciona.
- Para $n = 75$, los números $77, 79, 83, 91$, que no funciona.
- Para $n = 85$, los números $87, 89, 93, 101$, que no funciona.
- Para $n = 95$, los números $97, 99, 103, 111$, que no funciona.

Luego, únicamente funcionan $n = 3$ y $n = 15$ y su suma es $3 + 15 = 18$.

Solución Problema 12. Para que sea múltiplo de 18 debe tener factores $2, 3, 3$. Luego, podríamos tomar cartas pares, a lo más un múltiplo de 3 y todas las demás. (Si tomamos múltiplos de 3 y a lo más una carta par, estaríamos tomando menos cartas). Hay 50 cartas pares, de las cuales 16 son múltiplos de 3; de esas 50 cartas tomamos 35. De las otras 50 cartas, 17 son múltiplos de 3; tomamos todas las demás que son 33. En total, son a lo más $35 + 33 = 68$ cartas las que puede tomar Germán.

Uombat, Primera Etapa

Solución Problema 1. Dado que un círculo tiene $360°$ y hay 60 minutos en el reloj, de un minuto a otro hay
$$\frac{360°}{60} = 6°.$$
Cuando van 48 minutos de una hora, se ha recorrido $\frac{48}{60} = \frac{4}{5}$ de dicha hora. Por lo tanto cuando son las $4 : 48$ la manecilla horaria ha recorrido $\frac{4}{5}$ del espacio que hay entre las 4 y las 5. Es decir, señala la cuarta rallita de minutos que hay entre las 4 y las 5. Lo que en términos del minutero sería 24.
Por lo tanto, debemos encontrar los grados que hay del minuto 24 al minuto 48. Como son 24 minutos de diferencia, la cantidad de grados será
$$24 \times 6° = \boxed{144°}.$$

Solución Problema 2. Suponiendo que el número con el que termina Germán es x, entonces antes de presionar $\sqrt{\ }$ por última vez, tenía en pantalla x^2. Antes de presionar el botón por penúltima vez, tenía en pantalla $(x^2)^2 = x^4$. Y antes de presionar $\sqrt{\ }$ por primera vez, el número mostrado en pantalla era $(x^4)^2 = x^8$.

Como x debe ser un entero, podemos probar con algunos enteros. Si $x = 1$, entonces $x^8 = 1$. Si $x = 2$, entonces $x^8 = 256$. Si $x = 3$, entonces $x^8 = 6561$. El cual satisface estar entre $1,000$ y $10,000$. Si $x = 4$, entonces $x^8 = 65536$. Para cualquier otro número más grande que 4, su octava potencia será más grande que 65536. Por lo tanto, la única opción posible para x es 3 y Germán comenzó con $\boxed{x^8 = 6561}$.

Solución Problema 3. Sea abc nuestro número de tres dígitos y supongamos que es múltiplo de 11. Luego, se debe cumplir que $a + c - b$ es un múltiplo de 11. Sin embargo, $9 \leq a + c - b \leq 18$ y los únicos múltiplos de 11 en ese intervalo son 0 y 11.

- Caso 1: $a + c = b$.
  - Si $b = 1$, tenemos la pareja $(1, 0)$. como tenemos dos dígitos iguales, y el 0 no puede ir al inicio, podemos formar únicamente 2 números: $110, 101$.
  - Si $b = 2$, tenemos $(2, 0), (1, 1)$. Podemos formar $2 + 3 = 5$ números.
  - Si $b = 3$, tenemos $(3, 0), (2, 1)$. Podemos formar $2 + 6 = 8$ números.
  - Si $b = 4$, tenemos $(4, 0), (3, 1), (2, 2)$. Podemos formar $2+6+3 = 11$ números.
  - Si $b = 5$, tenemos $(5, 0), (4, 1), (3, 2)$. Podemos formar $2+6+6 = 14$ números.
  - Si $b = 6$, tenemos $(6, 0), (5, 1), (4, 2), (3, 3)$. Podemos formar $2+6+6+3 = 17$ números.
  - Si $b = 7$, tenemos $(7, 0), (6, 1), (5, 2), (4, 3)$. Podemos formar $2+6+6+6 = 20$ números.
  - Si $b = 8$, tenemos $(8, 0), (7, 1), (6, 2), (5, 3), (4, 4)$. Podemos formar $2 + 6 + 6 + 6 + 3 = 23$ números.
  - Si $b = 9$, tenemos $(9, 0), (8, 1), (7, 2), (6, 3), (5, 4)$. Podemos formar $2 + 6 + 6 + 6 + 6 = 26$ números.
  - En total en este caso podemos formar $2+5+8+11+14+17+20+23+26 = 126$.
- Caso 2: $a + c = b + 11$.
  - Si $b = 0$, $a + c = 11$. Tenemos $(9, 2), (8, 3), (7, 4), (6, 5)$. Todos los casos son tres dígitos distintos, son $4 \times 6 = 24$ números.
  - Si $b = 1$, $a+c = 12$. Tenemos $(9, 3), (8, 4), (7, 5), (6, 6)$. Tenemos $3\times6+3 = 21$ números.
  - Si $b = 2$, $a+c = 13$. Tenemos $(9, 4), (8, 5), (7, 6)$. Tenemos $3\times6 = 18$ números.
  - Si $b = 3$, $a + c = 14$. Tenemos $(9, 5), (8, 6), (7, 7)$. Tenemos $6 + 6 + 3 = 15$ números.
  - Si $b = 4$, $a + c = 15$. Tenemos $(9, 6), (8, 7)$. Tenemos $6 + 6 = 12$ números.
  - Si $b = 5$, $a + c = 16$. Tenemos $(9, 7), (8, 8)$. Tenemos $6 + 3 = 9$ números.
  - Por último, si $b = 6$ o si $b = 7$, entonces $a + c = 17$ o $a + c = 18$, respectivamente. Tenemos las parejas $(9, 8)$ y $(9, 9)$ y en total $6 + 3 = 9$ números.
  - En total, en este caso tenemos $24 + 21 + 18 + 15 + 12 + 9 + 6 + 3 = 108$ números.

En total, hay $126 + 108 = 234$ números.

Solución Problema 4. 20 unidades cuadradas. Veamos que el triángulo OCF debe ser rectángulo isósceles; rectángulo, porque el ángulo $\angle OFC = 90°$; isósceles porque el ángulo $\angle COF = 45°$. Luego, si el lado del cuadrado $CDEF$ es x, el segmento $OF = x$ también.

El triángulo ODE también es rectángulo, porque $\angle DEO = 90°$. Además, $ED = x, OE = 2x$, por lo que $OD = \sqrt{5}x = 10$. Podemos calcular entonces que $x^2 = \frac{10^2}{5} = 20$, y esa es el área del cuadrado azul.

Solución Problema 5. Ver solución Canguro, problema 9.

Solución Problema 6. Si usamos los segmentos de 2 y 3, el otro debe medir menos de $2 + 3 = 4$, únicamente podemos usar 4. Si los dos segmentos menores son 2 y 4, no podemos formar ningún triángulo. Si los dos segmentos menores son 2 y 8, podemos formar un triángulo con 9. Si los dos segmentos menores son 3 y 4, no podemos formar ningún triángulo. Si los dos segmentos menores son 3 y 8, podemos formar un triángulo con 9. Por último, también se puede formar un triángulo con $4, 8, 9$. En total, son cuatro los triángulos que podemos formar:

$$(2,3,4),(2,8,9),(3,4,9),(4,8,9).$$

Solución Problema 7. Ver solución Canguro, problema 10.

Solución Problema 8. Veamos que la expresión se puede factorizar como

$$(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)\ldots(x+100)(x-100).$$

Luego, para cualquier valor entero $-100 \leq x \leq 100$ distinto de 0, la expresión es igual a 0. Para cualquier $x > 100$, cada uno de los términos es positivo, por lo que la expresión es positiva también; para cualquier $x < -100$, cada uno de los términos es negativo, como es una cantidad par, la expresión es positiva también. Por lo tanto, tenemos únicamente 200 valores enteros para n que cumplen la expresión.

Solución Problema 9. Dado que no es posible colocar más de cuatro jugadores en una sola posición, sólo hay dos posibles maneras en las que se pueden distribuir dentro de la cancha.

Caso 1. Distribuimos 4 jugadores en una posición, 4 jugadores en otra posición y 2 jugadores en la tercera.

Caso 2. Distribuimos 4 jugadores en una posición, 3 jugadores en otra posición y 3 jugadores en la tercera.

Cualquier otra distribución de jugadores requiere que haya 5 o más jugadores en alguna posición.

Para el **caso 1** tenemos 3 posibles formaciones, en la que la defensa tiene sólo 2, en la que la media es la de sólo 2 jugadores y en la que la delantera es la que tiene 2 jugadores. Digamos que usan la formación 4 defensas, 4 medios y 2 delanteros. Entonces hay $\binom{10}{4} = 210$ maneras distintas de elegir a los defensas. Quedan sólo 6 jugadores disponibles para las otras 6 posiciones. Así que hay $\binom{6}{4} = 15$ maneras de elegir a los medios. Y los delanteros ya estarán determinados. Procedemos de manera análoga para cualquiera de las 3 distribuciones. Por lo tanto, para el caso 1 hay estas posibilidades:

$$3 \cdot 210 \cdot 15 = 9450.$$

Procedemos de manera similar para el **caso 2** porque hay tres formaciones distintas. Considerando que hora las cantidades de jugadores son 4, 3 y 3, hay estas posibilidades:

$$3 \cdot \binom{10}{4}\binom{6}{3} = 3 \cdot 210 \cdot 20 = 12600.$$

Por lo tanto, las maneras en las que se pueden acomodar los jugadores son

$$9450 + 12600 = \boxed{22050}.$$

Solución Problema 10. Ver solución Canguro, problema 11.

Solución Problema 11. Llamemos r al radio de la circunferencia, que es el valor que queremos encontrar. Viendo que $PB = 156$, sabemos que $PA = 156 - 2r$. Ahora, por potencias externas del punto P, tenemos que $156(156 - 2r) = PT^2$. Por Pitágoras en $\triangle PTX$:

$$PT^2 = PX^2 + TX^2 \tag{1}$$

Asumiendo que $OX = 1$, entonces $AX = r-1$, por lo que $PX = (156-2r)+(r-1) = 155 - r$. Usando esto en (1), la ecuación quedaría:

$$PT^2 = (155 - r)^2 + TX^2 \tag{2}$$

Veamos ahora que $TX^2 = r^2 - 1$ por Pitágoras en $\triangle OTX$. Sustituyendo eso en (2):

$$PT^2 = (155 - r)^2 + r^2 - 1 \tag{3}$$

Ya habíamos visto que $PT^2 = 156(156 - 2r)$, así que igualando esto con (**??**):

$$156(156 - 2r) = (155 - r)^2 + r^2 - 1 \tag{4}$$

Con un poco de álgebra eso se convierte en la ecuación cuadrática $r^2 + r - 156 = 0$, cuyas raíces son $r = -13$ y $r = 12$. Vemos que la primera no es posible porque es negativa, así que la respuesta es $r = 12$ cm.

Solución Problema 12. (Ángela María Flores Ruiz)S tiene 9 elementos: $\{0 \pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$ Veamos que si x, un número entero, es solución del polinomio, entonces

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Como todos los coeficientes a_i son también números enteros y cada término es múltiplo de x excepto a_0, entonces es necesario que a_0 sea también múltiplo de x, para que ambos lados sean múltiplos de x. Como el único a_0 inicial es 10, eso limita las opciones a los 9 valores que encontramos. Para verificar que es posible, construimos el conjunto solución con los siguientes polinomios, en orden:

- $x = -1, 10x + 10 = 0$
- $x = 2, -x^3 - x + 10 = 0$
- $x = -5, 2x + 10 = 0$
- $x = -10, x + 10 = 0$
- $x = 1, 10x - 10 = 0$
- $x = -2, -x^3 - x - 10 = 0$
- $x = 5, x - 5 = 0$

Cuyo, Etapa Final

Solución Problema 1. Vamos a calcular las áreas de cada trozo individual en cuadritos de la tableta. Vamos a hacer esto calculando y luego multiplicando la base y la altura de cada triangulito. Veamos que:

Pedazo A: base 1, altura 4; área 2.
Pedazo B: base 3, altura 4; área 6.
Pedazo C: base 1, altura 2; área 1.
Pedazo D: base 5, altura 2; área 5.
Pedazo E: base 4, altura 2; área 4.
Pedazo G: base 2, altura 2; área 2.
Pedazo F: área $10 - G = 8$.

El único pedazo que es igual a $\frac{1}{7}$ de $4 \times 7 = 28$ es el pedazo E, por lo que ese comió Daniela. El pedazo más grande es F, por lo que ese comió Alma. Los únicos tres pedazos que suman lo mismo que otro pedazo son A, C, G que suman $2 + 1 + 2 = 5$, que es D; por lo tanto, Bety comió los pedazos A, C y G, mientras que Ceci comió el pedazo D. El único pedazo que sobra es B, el que se comió Elda.

Solución Problema 2. La manera más sencilla de resolver este problema es hacer una tabla ordenada, escribiendo los números en fila y juntando de afuera hacia adentro. Después del primer doblez, los números quedan emparejados como $(16, 17)$, $(15, 18)$, $(14, 19)$, $(13, 20)$, $(12, 21)$, $(11, 22)$, $(10, 23)$, $(9, 24)$, $(8, 25)$, $(7, 26)$, $(6, 27)$, $(5, 28)$, $(4, 29)$, $(3, 30)$, $(2, 31)$, $(1, 32)$.
Después del segundo doblez, el número de grupos es ahora la mitad, pero cada uno tiene el doble: $(16, 17, 1, 32)$, $(15, 18, 2, 31)$, $(14, 19, 3, 30)$, $(13, 20, 4, 29)$, $(12, 21, 5, 28)$, $(11, 22, 6, 27)$, $(10, 23, 7, 26)$, $(9, 24, 8, 25)$.
Después del tercer doblez, los números quedan repartidos en cuatro grupos, cada uno con 8 números: $(16, 17, 1, 32, 9, 24, 8, 25)$, $(15, 18, 2, 31, 10, 23, 7, 26)$, $(14, 19, 3, 30, 11, 22, 6, 27)$, $(13, 20, 4, 29, 12, 21, 5, 28)$.
Finalmente, después del cuarto doblez, los números quedan repartidos en dos grupos. Los números que comparten grupo con el 1 son

$$(16, 17, 1, 32, 9, 24, 8, 25, 13, 20, 4, 29, 12, 21, 5, 28)$$

.

Solución Problema 3. Empecemos por ver que para camisa y peluca solo tiene opciones amarillo y rojo, de manera que hay 2 maneras de elegir esos dos elementos y ninguno otro puede ser amarillo o rojo. Luego, tenemos zapatos azul, naranja y verde; pantalón azul, naranja y verde; globo azul, naranja, verde, gris, negro y morado. De nuevo, veamos que los colores azul, naranja y verde se repiten en las tres opciones; zapatos puede ser cualquiera de los 3 y, sin importar el color, quedan solo 2 opciones para pantalón y, sin importar el color, quedan 4 opciones para el globo (una de las tres repetidas y las otras tres que son distintas). Podemos concluir usando la regla del producto: Sonrisa tiene $2 \times 3 \times 2 \times 4 = 48$ formas distintas en que puede salir vestido sin llevar dos artículos del mismo color.

Solución Problema 4. Como $ABEF$ es un cuadrado de perímetro $48cm$, entonces cada uno de sus lados debe medir $48 \div 4 = 12cm$. Conocemos ya la medida de tres de los lados: $CD = DE = FE = EB = 12cm$. Para conocer BC hacemos $AC - AB = 30 - 12 = 18cm = BC$. Por lo tanto, el perímetro de $BEDC$ es $12+12+12+18 = 54cm$.

Solución Problema 5. No es posible. Como las fichas solo están sombreadas de uno de los extremos, eso obliga distintas fichas. Sabiendo que la primera columna debe ser llenada con una ficha vertical, es imposible llenar el resto de la primera fila.

Koala, Etapa Final

Solución Problema 1. Cualquier número que termine en 0 entra en esta lista; tenemos los números $10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90$. Además, cualquier número que tenga un dígito 5 y otro dígito par; estos son $25, 52, 45, 54, 65, 56, 85, 58$. En total son 17 números.

Solución Problema 2. Ver solución de Cuyo, problema 3.

Solución Problema 3. La figura formada por pegar los dos polígonos regulares tiene 6 lados, así que la suma de sus ángulos interiores es 720. Dos de sus ángulos son de un pentágono regular, que sabemos miden 108° cada uno, y tres son de un hexágono regular, que sabemos miden 120°. Luego, el último, donde está el ángulo que buscamos, debe medir $720 - 108 - 108 - 120 - 120 - 120 = 144$. Ahora, como $108 + 120 = 228$, entonces x debe medir el "traslape", es decir, $228 - 144 = 84$. El ángulo x mide 84°.

Solución Problema 4. La escalera constará de 2 tubos de 3,6 m= 360 cm de largo y los peldaños generan $360 \div 30 = 12$ espacios desde un extremo a otro de la escalera. Por lo tanto se usarán 11 peldaños. Además de los tubos largos, cada peldaño mide 40 cm. De modo que el tubo del que se obtendrá la escalera mide

$$(2 \times 360 \text{ cm}) + (11 \times 40 \text{ cm}) = 1160 \text{ cm}.$$

Así que serán $\frac{1160 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} \times 5$ pesos $= 580$ pesos, por el tubo.

Además de los 11 peldaños, se requieren los dos tubos largos, 13 trozos en total. Entonces la cantidad de cortes necesarios en el tubo para obtener todos los trozos son 12. Así que serán 12 cortes $\times$ 3 pesos $= 36$ pesos.

Por último, cada peldaño requiere soldarse por dos extremos, lo que nos da 22 soldaduras. Así que serán 22 soldaduras $\times$ 5 pesos $= 110$ pesos.

De manera que la escalera cuesta

$$580 + 36 + 110 = \boxed{726 \text{ pesos}}.$$

Solución Problema 5. La manera más sencilla de resolver este problema es ya sea hacer la lista o hacer la tira y realizar el procedimiento del problema. Puedes ver la solución de Cuyo, Problema 2 para guiar el procedimiento. Los números que coinciden con el 1 cuando se han hecho cinco dobleces son

$1, 64, 32, 33, 16, 49, 17, 48, 8, 57, 25, 40, 9, 56, 24, 41, 4, 61, 29, 36, 13, 52, 20, 45, 5, 60, 28, 37, 12, 53, 21, 44$

Walabi, Etapa Final

Solución Problema 1. Hay en total 16 segmentos entre $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{3}$. Necesitamos expresar su diferencia como un número múltiplo de 16. Hacemos $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{5-3}{15} = \frac{2}{15} = \frac{4}{30} = \frac{8}{60} = \frac{16}{120}$, así que cada segmento debe valer $\frac{1}{120}$, y recordando que $\frac{1}{5} = \frac{24}{120}$. Como $0{,}25 = \frac{1}{4} = \frac{30}{120}$, necesitamos avanzar seis veces $\frac{1}{120}$ para pasar de 24 a 30. Eso nos deja en la etiqueta número 6.

Solución Problema 2. Ver solución de Koala, problema 3.

Solución Problema 3. Si nuestro dígito es 2, podemos poner a continuación cualquiera entre 1 y 3. Sin embargo, si nuestro dígito es 1 o 3, lo único que podemos hacer es seguirlo con 2. Esto quiere decir que uno cada dos dígitos es siempre 2.

Si el primer dígito es 2, hay 7 dígitos que podrían ser cualquiera de 1 o 3, es decir, 2^7 números distintos en total. Si el segundo dígito es 2, entonces hay 8 dígitos que podrían ser cualquiera de 1 o 3, es decir, 2^8 números distintos en total. La respuesta es $128 + 256 = 384$.

Solución Problema 4. La suma de los dígitos de dos números consecutivos no puede ser igual, porque tiene que aumentar en 1 o disminuir en 8 (si termina en 9), o disminuir en 17 (si termina en 99), o disminuir en 26 (si termina en 999, o disminuir en 35 (si termina en 9999). De las opciones que hemos enlistado, dos números que difieren en 35 es la primera que podría ser la diferencia entre dos múltiplos de 7. De los números que terminan en 9999, el primero que suma un múltiplo de 7 es 69999 que suma 42. Al sumar 1, obtenemos 70000, que suma 7.

Solución Problema 5. Como los vértices A, B, D son los centros de sus respectivos rectángulos, y dado que los lados opuestos de un rectángulo son iguales, si prolongamos los lados del rectángulo original $ABCD$, dividiríamos cada uno de los rectángulos pequeños en 4 iguales. De esos 4, podemos ver que uno de ellos coincide con la esquina que "quitamos". Podríamos tomar de uno de los otros tres para "sustituir" la esquina faltante y así tener nuevamente el perímetro de $ABCD$ completo. Cada uno de los rectángulos $ABCD$ queda a la mitad, por lo que la suma de sus perímetros sería la mitad también, es decir, $10cm$. Luego, la longitud total de la línea gruesa es $30 + 10 = 40cm$.

Canguro, Etapa Final

Solución Problema 1. Todos los números son múltiplos de 10. De los factores, no es difícil ver que 70 tiene que ser borrado, pues tiene un factor 7 y ningún otro número lo tiene. Con 70 borrado, el producto es $2^{15} \times 3^4 \times 5^9$. Si borramos el número 10, quitamos un factor 2 y un factor 5, lo que deja todos los exponentes pares. Así, basta con borrar 10 y 70, cuyo producto es 700.

Solución Problema 2. Ver solución de Walabi, problema 3.

Solución Problema 3. Solución de Megan Ixchel Monroy Rodríguez. Como $ABCD$ es cíclico, tenemos que $\angle DAC = \angle DBC$. Además, dado que A, B, F, E son colineales, tenemos que $\angle BAD = \angle AED + \angle EDA$ por ser ángulo externo del triángulo

EAD. Como $\angle AED = \angle DAC$, entonces $\angle BAC = \angle EDA$ y, por el cíclico, $\angle BAC = \angle BDC = \angle EDA$, de donde los triángulos EAD y BCD son semejantes por criterio AA. Similarmente, los triángulos EBO y FCB son semejantes también.

Como $\triangle ABD \sim \triangle BCD$, tenemos que $\frac{ED}{DB} = \frac{EA}{BC}$. Como $\triangle EBD \sim \triangle FCB$, tenemos que $\frac{ED}{BF} = \frac{DB}{BC}$. A partir de las dos anteriores, tenemos que $\frac{ED}{EA} = \frac{ED}{BF} = \frac{DB}{BC}$, de donde $BF \times ED = EA \times ED$ y concluimos que $BF = EA$, que es lo que queríamos demostrar.

Solución Problema 4. Podemos calcular explícitamente los números que tendrá cada uno. Para que sea primo relativo con 100, no puede tener factores 2 ni 5; para que sea primo relativo con 98, no puede tener factores 2 ni 7. Luego, no se toma ninguna carta par, las cartas impares que no tienen factores ni 5 ni 7 las quieren ambos –y por eso no las toman– y las cartas impares que tienen tanto factores 5 como 7 no las quiere ninguno –y por eso no las toman. La conclusión es que Ceci toma las cartas impares que son múltiplo de 7 pero no de 5 y Germán toma las cartas impares que son múltiplo de 5 pero no de 7.

La lista de Ceci es $7, 21, 49, 63, 77, 91$ y la de Germán es $5, 15, 25, 45, 55, 65, 75, 85, 95$. La suma de Ceci es 308 y la suma de Germán es 465, por lo que gana Germán.

Solución Problema 5. Vamos a construir un conjunto posible. Digamos que

$$a = 2, b = 3, c = 5, p = 7, q = 11, r = 13;$$

esto satisface las primeras tres condiciones. Para que q sea múltiplo de b, podemos hacer $q = 11 \times 3$. Esto no romple las condiciones anteriores. De manera similar, para que c sea múltiplo de r, podemos hacer que $c = 5 \times 13$, sin romper ninguna condición. Terminamos con $a = 2, b = 3, c = 65$ y $p = 7, q = 33, r = 13$.

Uombat, Etapa Final

Solución Problema 1. A partir de hacer los primeros pasos de la sucesión, podemos conjeturar que los cambios de paridad se dan siempre en el siguiente cuadrado. En los primeros casos se cumple en $1, 4, 9, 16$. Si esto fuera cierto, buscamos el cuadrado más cercano a 2021, que es $44 \times 44 = 1936$ y $45 \times 45 = 2025$. Como en 1936 habría cambio de paridad, se enlistan todos los impares hasta 2025, por lo que 2021 sí estaría en la lista.

Para demostrar nuestra conjetura, veamos que cada cambio de paridad equivale a $+1$. Por cada número adicional en la lista, tenemos $+2$. De esta manera, tener dos pares después del primer impar implica $+3$ y tener tres impares a continuación implica $+5$ y así sucesivamente. Como empezamos en 1, tenemos la suma $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$, como queríamos.

Solución Problema 2. Ver solución de Canguro, problema 3.

Solución Problema 3. Solución de Ana Stephanie Esparza Dávila. Digamos que hay 31 espacios para acomodar los números del -15 al 15. Sabemos que a la chica que le toque el número n debe sacar el producto de todos los números que haya acomodados desde la posición 1 hasta la n y que, por lo tanto, si en una de esas posiciones está el 0, el producto final será 0. Para que esto ocurra la menor cantidad de veces, mandamos la carta con el 0 hasta el final de la fila, así aseguramos que solo una chica tendrá producto de 0.

Ahora, sabemos que el producto de x cantidad de números positivos siempre será positivo, pero si son negativos depende de la paridad de x: si es par, será positivo; si es impar, el producto será negativo.

Si los primeros 15 son positivos, los primeros 15 productos serán positivos, y de los últimos 16 tendremos 7 positivos, 22 en total. Notemos que para tener la mayor cantidad de productos positivos necesitamos que antes de cada positivo debe haber una cantidad par de negativos, así el positivo se aprovecha como tal (positivo) entonces tendremos seguro que en cada n con un número positivo tendrá un producto positivo, y que para cada n con un número negativo, se emparejan de modo que la mitad serán positivos y la otra mitad negativos, según la paridad de la cantidad de negativos que haya en la lista. Por lo tanto, 22 es efectivamente el máximo.

Solución Problema 4. Como tanto c como $a+b+c$ son impares, entonces a y b son ambos pares o ambos impares. Despejamos la expresión para obtener $ax^2+bx=-c$ y estudiamos módulo 2:

1. Ambos pares. La expresión es $0+0 \equiv 1$. Esto es claramente imposible.
2. Ambos impares. La expresión es $x^2+x \equiv 1$. En este caso, suponiendo x impar, tendríamos $1+1 \equiv 1$, que es imposible; si suponemos x par, tendríamos $0+0 \equiv 1$, que es imposible también.

Concluimos que no es posible que la ecuación tenga soluciones enteras.

Solución Problema 5. El mayor divisor propio de 19^{19} es 19^{18}, pues 19 es primo. Obtenemos ahora $19^{19}-19^{18}=19^{18}(18)$. El divisor propio más grande es $19^{18}(9)$, pues 2 es el divisor propio más pequeño. Obtenemos ahora $19^{18}(9)$, que es la mitad. El nuevo divisor propio más grande es $19^{18}(3)$ y obtenemos $19^{18}(6)$, luego $19^{18}(3), 19^{18}(2)$ y finalmente 19^{18}. Observemos que los pasos $18, 9, 6, 3, 2, 1$ fueron los pasos necesarios para pasar de 18 a 1 realizando el procedimiento descrito.

Ahora, dado que el divisor propio más grande es 19^{17}, vamos a obtener el número $19^{18}-19^{17}=19^{17}(18)$, por lo que serán necesarios los mismos 6 pasos adicionales, 7 en total, para pasar a 19^{17}.

Siguiendo así, vamos a necesitar otros 7 pasos para llegar a 19^{16}, 7 pasos para llegar a 19^{15}, etcétera. Son 7 pasos para restar 1 al exponente; como inicialmente es 19 y queremos que sea 0, deben ser $7 \times 20 = 140$ operaciones necesarias.

El Centro de Alto Rendimiento en Matemáticas fue fundado en 2011 en San Luis Potosí, México. Desde entonces, nos hemos dedicado a la preparación de estudiantes, profesores y familias para distintos concursos de matemáticas, principalmente aquellos que caen bajo el paragüas de Olimpiada de Matemáticas. Hemos tenido la oportunidad de trabajar con cientos de estudiantes muy talentosos, dentro y fuera de la Olimpiada, en todo México y partes de América Latina.

En CARMA estamos comprometidos con la educación matemática, con proporcionar un espacio accesible y seguro donde todos, todas y todes puedan continuar su preparación olímpica permanente, dar sus primeros y segundos pasos en concursos, o acercarse a las matemáticas desde una perspectiva lúdica y un aprendizaje basado en problemas.

Para más información sobre CARMA: Centro de Alto Rendimiento en Matemáticas, te presentamos los siguientes enlaces:

- Cursos en https://cursos.carmaenlinea.com/
- Concursos en https://concursos.carmaenlinea.com/.
  Anualmente organizamos Olimpiada Femenil (febrero-marzo), Olimpiada Virtual de Matemáticas (agosto) y Olimpiada de Otoño (septiembre-octubre).
- Nuestra página de Facebook en http://fb.com/carmatematicas
- Nuestro canal de YouTube en https://youtube.com/carma2011
- El canal de YouTube de ugesaurio en https://www.youtube.com/ugesaurio

CENTRO DE ALTO RENDIMIENTO EN MATEMATICAS

CARMA

·2011·

CENTRO DE ALTO RENDIMIENTO EN MATEMÁTICAS

CARMA

·2011·