Centro de Alto Rendimiento en Matemáticas

# VIII Olimpiada Femenil: 2022

## Problemas y soluciones

# VIII Olimpiada Femenil

Equipo CARMA

21 de abril de 2022

Marzo 2022



Para cualquier correción, por favor comunícate con nosotros vía Facebook o a nuestro correo electrónico en matematicascarma@gmail.com.

La persona a cargo del material es Danielle Flores.

Primera edición: Abril 2022

Editorial Dinosaurio
San Luis Potosí, México
`carmatematicas (at) gmail (dot) com`

# Ganadoras

La VIII Olimpiada Femenil de CARMA se celebró en febrero y marzo del 2022, con participantes de México, Perú y Bolivia. Consistió de 4 concursos (cada participante podía concursar en la cantidad de concursos que quisiera) de Matemáticas, Divulgación, Física Experimental e Informática.

Entre los cuatro concursos y todas sus etapas, la VIII Olimpiada Femenil tuvo la siguiente participación, por concurso y por categorías:

- Matemáticas: 345
  - Cuyo: 28
  - Koala: 58
  - Walabi: 119
  - Canguro: 88
  - Uombat: 52
- Informática: 21
  - Medianas Karel: 2
  - Medianas C++: 1
  - Grandes: 18
- Divulgación de la Ciencia: 19
  - Peques: 2
  - Medianas: 7
  - Grandes: 10
- Física Experimental: 9
  - Medianas: 3
  - Grandes: 6

Aunque la participación total estuvo por debajo de lo reportado en años anteriores, es importante destacar que el papel de cada una de las participantes fue destacable y todo lo que entregaron (soluciones, código, reporte, video) es de primera calidad.

A continuación enlistamos a las ganadoras, por concurso y categoría:

# Física, Medianas

## Primer Lugar

| | |
|---|---|
| Rosangel Alexandra Bullon Linares | Saco oliveros |

## Segundo Lugar

| | |
|---|---|
| DAMNED EMPHERIA GUADALUPE SALAZAR TAPIA | Colegio Fray Pedro de Gante |

## Tercer Lugar

| | |
|---|---|
| Leslie Rubí Valtierrez Ramírez | Escuela Secundaria Federal No.1 |

# Física, Grandes

## Primer Lugar

| | |
|---|---|
| Alejandra Esparza Pelcastre | Centro de Educación Media de la Universidad Autónoma de Aguascalientes |

## Segundo Lugar

| | |
|---|---|
| Yoltzin Castillejos | John J. Spark |

## Tercer Lugar

| | |
|---|---|
| Alexandra Groot Cruz | Secundaria y preparatoria Emilio Sánchez Piedras |

## Mención Honorífica

| | |
|---|---|
| Paola Montserrat Torres Martínez | Instituto Lomas del Real |
| Enya Marlene Flores Álvarez | Escuela Preparatoria No. 15 |
| Gladys Eiline Flores Álvarez | Escuela Preparatoria No. 15 |

# Informática, Medianas C++

## Primer Lugar

| | |
|---|---|
| Rosangel Alexandra Bullon Linares | Saco oliveros |

# Informática, Medianas Karel

## Primer Lugar

| | |
|---|---|
| Yahvé Guadalupe Cruz González | Escuela Secundaria Técnica No. 8 |

## Segundo Lugar

| | |
|---|---|
| REGINA OSORIO LUNA | HAMILTON JUNIOR HIGH SCHOOL |

# Informática, Grandes

## Primer Lugar

| | |
|---|---|
| Estefanía Antonio Villaseca | E.S.T. DR. JOHN J. SPARK |
| Uma Salcedo Reyes | CBTis No. 168 Francisco I. Madero |

## Segundo Lugar

| | |
|---|---|
| Aylin Gandara | Instituto Metropolitano de Tijuana |
| Karen Sosa Jácome | Colegio de Bachilleres del Estado de Veracruz Plantel 20 |

## Tercer Lugar

| | |
|---|---|
| Lynnett Rodríguez Ríos | Bachillerato Tecnológico John J. Sparks |
| Valeria Cartagena Vaca | Colegio Alemán Santa Cruz |

## Mención Honorífica

| | |
|---|---|
| ANA LAURA CHENOWETH GALAZ | COBACH Prof. Jesús Guillermo Careaga Cruz |
| Alejandra Esparza Pelcastre | Centro de Educación Media de la Universidad Autónoma de Aguascalientes |
| Nadia Guadalupe Montero Murillo | colegios de bachilleres del estado de veracruz20 |
| Florencia Martinez Rolon | colegio de bachillerares del estado de Veracruz plantel 20 |
| Grajales Valencia Gabriela Joselyn | COBAEV plantel 49 |
| Alexandra Groot Cruz | Secundaria y preparatoria Emilio Sánchez Piedras |

# Divulgación, Peques

## Primer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | Angélica Montserrat Ortiz Aguilar | Colegio Euro Texcoco |

## Segundo Lugar

| | | |
|---|---|---|
| Bolivia | Emilia Cassab Vlahovic | Hermano Felipe Palazón |
| Perú | Rosangel Alexandra Bullon Linares | Saco oliveros |

# Divulgación, Medianas

## Primer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| Perú | Rosangel Alexandra Bullon Linares | Saco oliveros |

## Segundo Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | Leslie Rubí Valtierrez Ramírez | Escuela Secundaria Federal No.1 |

## Tercer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | Mia Ycied De La Cruz Barrientos | Instituto Unitam |

## Mención Honorífica

| | | |
|---|---|---|
| México | Danira flores | COBACH |
| México | DAMNED EMPHERIA GUADALUPE SALAZAR TAPIA | Colegio Fray Pedro de Gante |
| México | Rayda Elisa Leal Ruiz | Colegio Nueva Senda |

# Divulgación, Grandes

## Primer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | Yoltzin Castillejos | John J. Spark |

## Segundo Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | Andrea Michel Camacho Hinojosa | Colegio Nuevo Santander |

## Tercer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | Neftali De Jesus Agundiz Torres | Instituto Unitam |
| México | Hillary Guadalupe García Ibarra | ENMS Centro Histórico León |
| México | Gladys Eiline Flores Álvarez | Escuela Preparatoria No. 15 |

## Mención Honorífica

| | | |
|---|---|---|
| México | Evelyn Cruz Gómez Martínez | Centro de Bachillerato Tecnológico Agropecuario No.184 |
| México | Diana Michelle Olague Rodriguez | UAL (Universodad Autónoma de la Laguna) |
| México | Alexandra Groot Cruz | Secundaria y preparatoria Emilio Sánchez Piedras |
| México | Melanie Stephania de Jesus Fregoso Lamas | Escuela Preparatoria No. 15 |
| México | Enya Marlene Flores Álvarez | Escuela Preparatoria No. 15 |

# Matemáticas, Cuyo

## Primer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | SOPHIA MONSERRATH MARTÍNEZ DE LA TORRE | INSTITUTO SANFORD |
| Perú | Gretel Fernanda Chavez Rafael | Prólog Lima |

## Segundo Lugar

| | | |
|---|---|---|
| Bolivia | Emilia Cassab Vlahovic | Hermano Felipe Palazón |
| México | DANIELA ORDÓÑEZ ALARCÓN | Instituto Winston Churchill |

## Tercer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | JENNIFER DENISSE ABREGO DE LA ROSA | Instituto Winston Churchill |
| México | ISÚA BIGVAÍ OTERO VELAZQUEZ | INSTITUTO ARNAIZ |
| México | Paola Estefanía Castelán Morales | Instituto Winston Churchill |

## Mención Honorífica

| | | |
|---|---|---|
| México | FRIDA SOFIA LEYVA RODRIGUEZ | INSTITUTO SANFORD |
| México | MÓNICA VALENTINA ZAMORA MORA | INSTITUTO SANFORD |
| México | XIMENA REYNOSO VELÁZQUEZ | Colegio Axayacatl |
| México | ABIGAIL CARMONA GARCÍA | INSTITUTO SANFORD |
| México | ANDREA MERCADO VELARDE | INSTITUTO SANFORD |
| México | DANIELA QUEZADA SIGALA | Escuela de la Ciudad de Aguascalientes |
| México | Renata Chávez Larios | Escuela de la Ciudad de Aguascalientes |
| Perú | Catalina Antonia Cubas Rivera | I.E. Prolog |

# Matemáticas, Koala

## Primer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | Elisa Villarreal | Primaria GHS |
| México | Zariffe Yamel Céspedes Pelayo | Bartolomé de Medina |

## Segundo Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | Angélica Montserrat Ortiz Aguilar | Colegio Euro Texcoco |
| México | Gema abril Rodríguez Morales | Benito Juarez |

## Tercer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| Perú | Luana Raisa Alcántara Orellana | Prolog |
| México | Nayomie Esther Ahonsi Rosado | Centro Educativo Cont |

## Mención Honorífica

| | | |
|---|---|---|
| México | KEYLANI RENATA RUST ESCAMILLA | Adriaen Hanneman School Apodaca N.L. |
| México | Alethia Yobely Cepeda Obregón | Colegio Presidentes de México |
| | Luna Gonzalez Galindo | Colegio Santee |
| México | Valeria García Sánchez | Heroes patrios |
| México | Helena Pérez Bustamante | Colegio Valenciana |
| México | Andrea María Torres Martínez | Instituto Lomas del Real |
| México | Stefany Sofia Castillo Villanueva | Instituto Winston Churchill |

# Matemáticas, Walabi

## Primer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| Perú | Alisson Ahilynn Moron Delgado. | Colegio Prolog |
| Perú | Mía Carolina Zelada Razabal | Prolog |

## Segundo Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | Mónica Yatzary Fernández Atonal | Colegio Esperanza |
| Perú | Delia Faviana Esteban Vilchez | PROLOG |
| Perú | Valery Olivares Torres | Colegios PROLOG |
| México | Mildred Ximena Lemus Barrientos | Instituto Sanford |

## Tercer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | Yazmin Carmona Gómez | Secundaria Técnica No.1 Xicohtencatl Axayacatzin |
| México | Mariana Lemarroy Mendoza | Colegio Carol Baur |
| México | Jireth Hernández Fuentes | Escuela Secundaria Técnica No.4 José Agustín Arrieta |
| México | Angélica Yazmín Carrillo Casanova | Aprendo con Alex |

## Mención Honorífica

| | | |
|---|---|---|
| México | Yahvé Guadalupe Cruz González | Escuela Secundaria Técnica No. 8 |
| México | Camila Muñoz Cortés | Escuela Secundaria Técnica No.1 |
| México | Romina Ovalle | Colegio Ugarte de los Cabos |
| México | Nathalia Alexandra Garcia de la Cruz | Escuela Secundaria Tecnica No.5 |
| México | Maria Ximena Alvarez Martinez | Colegio Montessori |
| México | Ana Guadalupe Báez Rovira | Maestro Efren Ramirez Hernandez |

# Matemáticas, Canguro

## Primer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | Ana Camila Cuevas González | PrepaTec Campus Tampico |
| México | Angela Maria Flores Ruiz | jesusita neda |

## Segundo Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | Isabela Loredo Carvajal | Colegio Nuevo Santander |
| México | Lucero Díaz Ortega | PrepaTec Eugenio Garza Sada |

## Tercer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | Sofia Velázquez Velázquez | Prepa Tec |
| México | Uma Salcedo Reyes | CBTis No. 168 Francisco I. Madero |

## Mención Honorífica

| | | |
|---|---|---|
| Perú | Rosangel Alexandra Bullon Linares | Saco oliveros |
| Perú | María Rebeca Antezana De la cruz | SACO OLIVEROS |

| | | |
|---|---|---|
| Perú | Fatima Stefania Olaya Herrera | PROLOG |
| Perú | Valeria Fernanda Acosta Peña | PROLOG-Lima |
| Perú | Gianella Alejandra Cruz Lozano | Prolog |
| México | Camila Campos Juárez | instituto jean piaget |
| México | Alexandra Groot Cruz | Secundaria y preparatoria Emilio Sánchez Piedras |

# Matemáticas, Uombat

## Primer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | Irene Escudero Cázarez | Colegio Nueva Senda |
| México | Diana Laura Garza De la Riva | Colegio Cervantes campus Vigata |

## Segundo Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | Sarah Martínez García | Motolinía |
| México | Maria Fernanda Montoya Lopez | Colegio Enrique Arreguín |

## Tercer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | Alejandra Esparza Pelcastre | Centro de Educación Media de la Universidad Autónoma de Aguascalientes |
| México | Natalia escudero | Colegio Nueva Senda |
| México | Arantza Torres Báez | CBTis 03 |

## Mención Honorífica

| | | |
|---|---|---|
| México | Maritza Sanchez | CECYTE Plantel Cholula |
| México | ANA LAURA CHENOWETH GALAZ | COBACH Prof. Jesús Guillermo Careaga Cruz |
| México | Cecilia Yaresi Benavente Duéñez | Preparatoria Udem Valle Alto |
| México | Nelly Paola Morales Govea | Colegio de Ciencias y Humanidades Plantel Naucalpan (CCH-N) |
| México | CASANDRA VILLASEÑOR ARRIAGA | Escuela de la Ciudad de Aguascalientes |
| México | Andrea Michel Camacho Hinojosa | Colegio Nuevo Santander |
| México | Valentina Ruíz Ocampo | Instituto Asunción de Querétaro |
| México | Mónica Montserrat Mata Massú | Instituto Británico de Torreón |

Además, queremos hacer un reconocimiento especial de Chicas Todoterreno a quienes participaron en 2, 3 o 4 concursos. Estas Chicas Todoterreno reflejan el espíritu de la Olimpiada Femenil de intentar cosas nuevas y hacer siempre tu mejor esfuerzo:

# Dos Concursos

- Andrea Michel Camacho Hinojosa
- REGINA OSORIO LUNA
- Hanna Fernanda Cortés Chávez
- Emilia Cassab Vlahovic
- Hillary Guadalupe García Ibarra
- Diana Michelle Olague Rodriguez
- Mia Ycied De La Cruz Barrientos
- Naholli Margarita Bustillos López
- Reyes Salas Sofia
- Sophie Laika Laniakea Rosas
- Uma Salcedo Reyes
- Angélica Montserrat Ortiz Aguilar
- Valeria Cartagena Vaca
- Yahvé Guadalupe Cruz González
- Ximena Velazquez Flores
- ANA LAURA CHENOWETH GALAZ
- Paola Montserrat Torres Martínez

## Tres Concursos

- Leslie Rubí Valtierrez Ramírez
- Yoltzin Castillejos
- Gladys Eiline Flores Álvarez
- Jaimy Arleth Aguirre Cerda
- Enya Marlene Flores Álvarez
- DAMNED EMPHERIA GUADALUPE SALAZAR TAPIA
- Alejandra Esparza Pelcastre

## Cuatro Concursos

- Rosangel Alexandra Bullon Linares

- Alexandra Groot Cruz

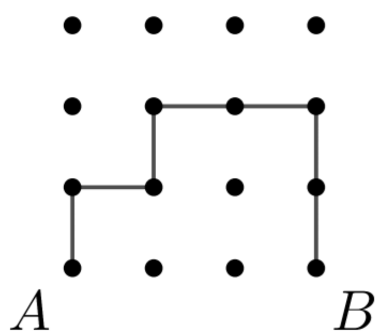
# Enunciados de los Problemas

## Cuyo, Primera Etapa

**Problema 1.** ¿Qué fecha es el día 100 del año 2022?

(a) 31 de marzo (b) 8 de abril (c) 9 de abril (d) 10 de abril

**Problema 2.** En la siguiente cuadrícula tenemos 16 puntos. Wally el robot quiere ir del punto $A$ al punto $B$. Puede ir hacia abajo, arriba, derecha o izquierda por los puntos, pero no puede pasar dos veces por el mismo punto. ¿Cuánto mide el camino más largo de $A$ a $B$? Por ejemplo, el camino marcado mide 7.




(a) 9 (b) 16 (c) 15 (d) 22

**Problema 3.** Ángela, Becky, Carla y Daniela tienen todas una cantidad distinta de pesos. Se dieron cuenta que todos sus números son menores que 41 y aparecen en la tabla del 5. ¿Cuál es la mayor cantidad posible que podrían tener entre todas?

(a) 130 (b) 160 (c) 100 (d) 41

**Problema 4.** Un dado tiene los números $1, 1, 1, 4, 4, 4$, uno en cada cara. ¿Qué números debe tener en sus caras un segundo dado para que las sumas posibles sean los números del 1 al 12?

(a) 0, 1, 2, 3, 4, 5 (b) 0, 1, 2, 6, 7, 8 (c) 2, 2, 2, 8, 8, 8 (d) 1, 2, 3, 5, 6, 7

**Problema 5.** La suma de las edades actuales de 5 hermanas es 120 años. ¿Cuánto sumaban sus edades hace 5 años?

(a) 50 (b) 25 (c) 95 (d) 115

**Problema 6.** Daniela suma todos los números impares de tres dígitos que tienen sus tres cifras iguales y obtiene el número $D$. Yareli suma todos los números pares de tres dígitos que tienen sus tres cifras iguales y obtiene el número $Y$. ¿Quién obtuvo un número mayor?

(a) Daniela (b) Yareli (c) Obtienen lo mismo (d) No se puede saber

**Problema 7.** El logo de CARMA se construye con las piezas del Tangrama. Si solo tuvieras triángulos como el pequeño, ¿cuántos necesitarías para hacer la misma figura?

(a) 14 (b) 15 (c) 16 (d) 17

**Problema 8.** Paseando por la Ciudad de los Gatos, Montse hizo un recorrido de 2000 metros. Los primeros 100 metros vio 4 gatos negros, 3 naranjas y 5 blancos. Después, cada 100 metros vio 3 gatos negros, 2 naranjas y 1 blanco. ¿Cuántos gatos vio en total Montse al final de su paseo?

(a) 120 (b) 126 (c) 240 (d) 112

**Problema 9.** Calcula la suma de los dígitos del resultado de multiplicar

$$111,111 \times 11,111.$$

(a) 11 (b) 20 (c) 22 (d) 30

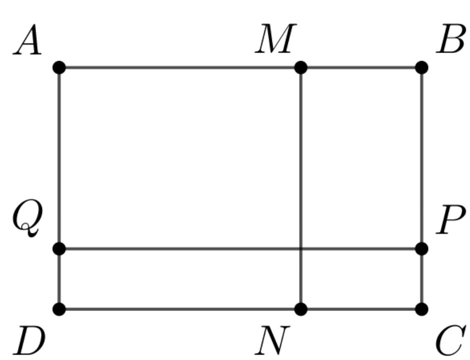
**Problema 10.** Carmelita tiene 21 rosales, 42 plantas de girasoles y 56 gerberas y las quiere plantar en filas de manera que todas las filas tengan la misma cantidad de plantas pero de un solo tipo. ¿Cuál es la menor cantidad de filas que necesita Carmelita para plantar todas sus flores?

(a) 1 (b) 7 (c) 14 (d) 17

**Problema 11.** Isabela va a una frutería y se da cuenta que con el dinero que tiene le alcanza para comprar una manzana o tres naranjas. Camila, en la misma frutería, compra dos manzanas y dos naranjas por 16 pesos. ¿Cuánto pagará Fer por tres manzanas y dos naranjas en la misma frutería?

(a) 22 (b) 24 (c) 36 (d) 12

**Problema 12.** El patio de la escuela de Mónica y Montse es un rectángulo $ABCD$ como se muestra en la figura, con los puntos $M, N, P$ y $Q$ marcados tales que $MN$ es perpendicular a $DC$ y $PQ$ es perpendicular a $DA$. Un día, en la clase de educación física, Montse le dio dos vueltas al patio, recorriendo $ABCD$ dos veces. El mismo día, Mónica corrió de la siguiente manera: de $A$ a $M$, de $M$ a $N$, de $N$ a $C$, de $C$ a $P$, de $P$ a $Q$ y de $Q$ a $A$, dando dos vueltas a este circuito. ¿Quién de las dos recorrió más distancia?




(a) Mónica (b) Montse (c) Recorren la misma distancia (d) No se puede saber

# Koala, Primera Etapa

**Problema 1.** Paseando por la Ciudad de los Gatos, Montse hizo un recorrido de 2 km. Los primeros 100 metros vio 4 gatos negros, 3 naranjas y 5 blancos. Después, cada 100 metros vio 3 gatos negros, 2 naranjas y 1 blanco. ¿Cuántos gatos vio en total Montse al final de su paseo?

(a) 120 (b) 126 (c) 240 (d) 112

**Problema 2.** Ángela, Becky, Camila y Daniela son amigas pero una de ellas se comió todas las galletas. Cuando fueron interrogadas, esto fue lo que dijeron:

- Ángela: Becky lo hizo.
- Becky: Daniela lo hizo.
- Camila: Yo no lo hice.
- Daniela: Angélica está mintiendo.

Si solo una de las cuatro está diciendo la verdad, ¿quién se comió las galletas?

(a) Ángela (b) Becky (c) Camila (d) Daniela

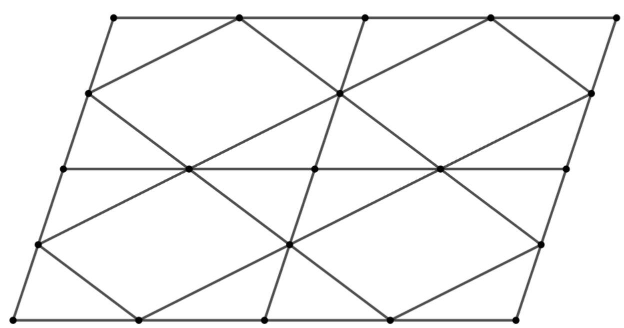
**Problema 3.** La suma de las edades actuales de 5 hermanas es 120 años. ¿Hace cuántos años se cumplía que la suma de sus edades era 80?

(a) 40 (b) 20 (c) 16 (d) 8

**Problema 4.** Daniela escribe todos los números de 5 dígitos usando los dígitos $1, 2, 3, 4, 5$, sin repetir, que cumplen que la suma de los primeros dos dígitos es igual a la suma de los últimos dos dígitos. ¿Cuál es el menor número que escribió Daniela?

(a) 14523 (b) 12345 (c) 14532 (d) 23514

**Problema 5.** ¿Cuántos paralelogramos distintos, de cualquier tamaño, hay dibujados en la siguiente figura?



(a) 9 (b) 11 (c) 16 (d) 20

**Problema 6.** Carolina tiene un rectángulo de tela de $128cm$ por $72cm$. Quiere cortarlo en pedazos cuadrados iguales, lo más grandes posibles, sin que sobre tela. ¿Cuál es el área de cada cuadrado?

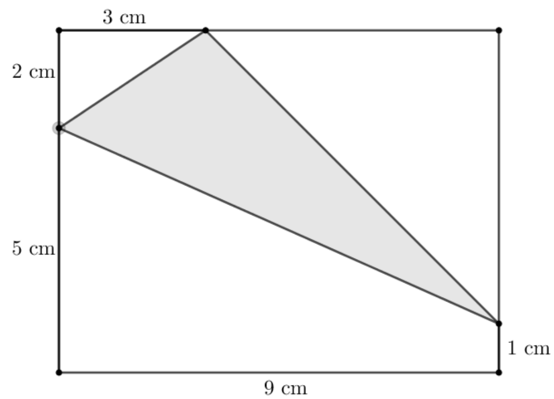
(a) 8 (b) 36 (c) 64 (d) 144

**Problema 7.** Calcula la suma de los dígitos del resultado de

$$1 + 22 + 333 + 4,444 + 55,555 + 666,666 + 7,777,777 + 88,888,888 + 999,999,999.$$

(a) 45 (b) 51 (c) 90 (d) 285

**Problema 8.** La siguiente figura muestra un triángulo sombreado adentro de un rectángulo y se muestran las medidas de los lados del rectángulo. Calcula el área del triángulo sombreado.

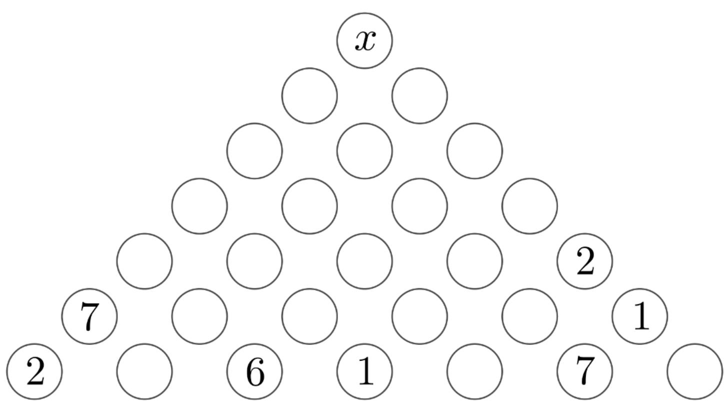



(a) 15 (b) 18 (c) 63 (d) 54

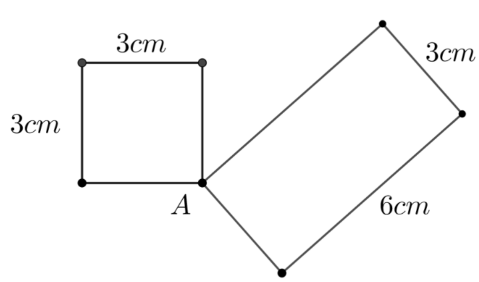
**Problema 9.** Rebecca dividió 26 entre un número secreto y le sobraron 2. Itzanami se dio cuenta de que hay varios números que podrían ser el número secreto de Rebecca así que los encontró todos y los sumó. ¿Cuánto vale la suma de Itzanami?

**Problema 10.** En la figura, el número de cada círculo es igual a la suma de los dos números debajo. Calcula el valor de $x$.

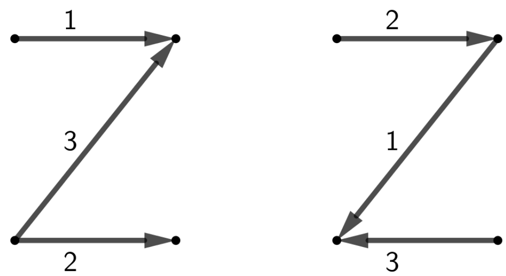
**Nota:** Puede haber números negativos.




**Problema 11.** Dos hormigas empiezan en el punto $A$ y caminan a la misma velocidad sobre la orilla de las figuras. Una de las hormigas camina sobre la orilla del cuadrado y la otra sobre la orilla del rectángulo. ¿Cuál es la menor distancia que deben recorrer antes de que se vuelvan a encontrar en $A$?




**Problema 12.** La letra $Z$ mayúscula se realiza con tres trazos distintos, que pueden realizarse en cualquier orden. Además, cada uno de los trazos puede hacerse en cualquiera de dos direcciones. ¿De cuántas maneras distintas se puede trazar una $Z$? Estos son dos ejemplos:

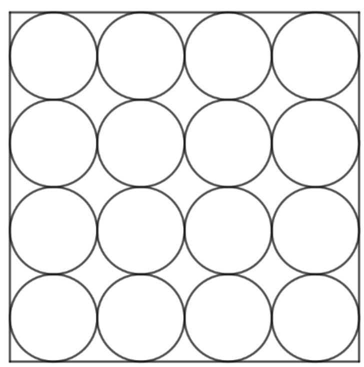



# Walabi, Primera Etapa

**Problema 1.** Daniela escribe todos los números de 7 dígitos usando los dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, sin repetir, que cumplen que la suma de los primeros tres dígitos es el doble de la suma de los últimos tres dígitos. ¿Cuál es el mayor número que escribió Daniela?

**Problema 2.** El número de cinco dígitos $d6d41$ es múltiplo de 9, donde $d$ es un dígito. ¿Cuánto vale la suma de sus dígitos?

**Problema 3.** En la figura, el área de cada círculo es $4\pi$. Calcula el área del cuadrado, en las mismas unidades.



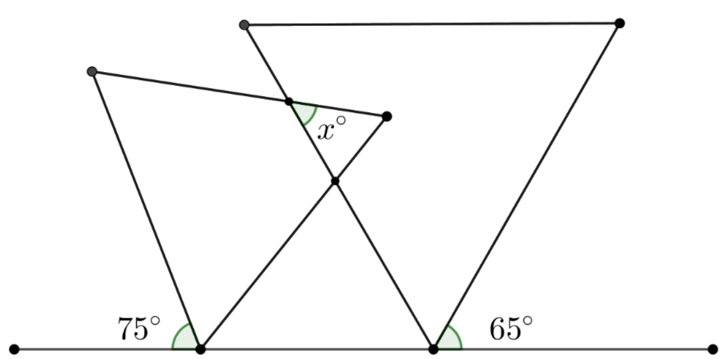
**Problema 4.** Los números enteros $a$ y $b$ cumplen que $23a = 32b$. ¿Cuántas parejas $(a, b)$ cumplen que $a + b$ es primo?

**Problema 5.** ¿Cuántos enteros positivos $n$ cumplen que

$$n(n + 1)(n + 2)(n + 3) = 202220222022?$$

**Problema 6.** Yareli despertó de su siesta a las $20 : 22$. Como todavía estaba medio cansada, se volvió a dormir exactamente 2022 minutos. ¿Qué horas eran cuando despertó?

**Problema 7.** Dos triángulos equiláteros se sobreponen como se muestra en la figura. Calcula el valor del ángulo $x$.

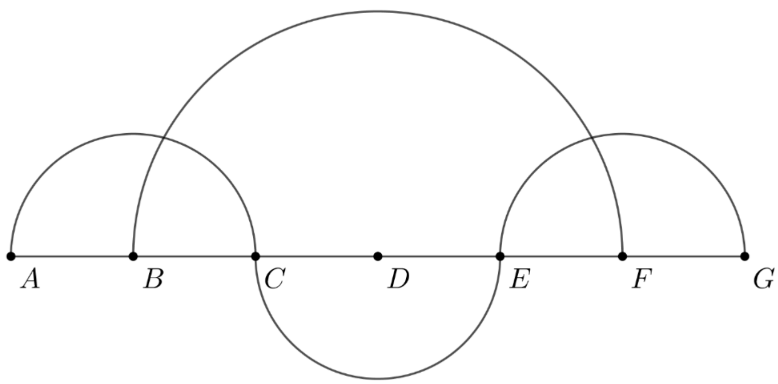


**Problema 8.** Luis colecciona tarjetas y quiere ponerles un protector de plástico a sus 200 tarjetas favoritas. Él coloca 5 protectores cada minuto. Cuando estaba colocando los protectores llegó su amiga Danielle que coloca 7 protectores cada minuto. Desde que empezó Luis hasta que terminaron el trabajo transcurrieron 26 minutos.
Si en ningún momento se detuvieron, ¿cuántas tarjetas llevaba protegidas Luis cuando llegó Danielle?

**Problema 9.** Sean $a, b, c, d$ enteros positivos tales que $a + b + c = 53$, $b + c + d = 51$, $c + d + a = 57$ y $d + a + b = 58$. ¿Cuál es el mayor de los cuatro números?

(a) a (b) b (c) c (d) d

**Problema 10.** En la siguiente figura, $AG = 6cm$ y $AB = BC = CD = DE = EF = FG = 1cm$ y las líneas marcadas son semicírculos. Yareli sale a correr en las mañanas por el circuito que recorre los tres semicírculos de $A$ a $C$, a $E$ y finalmente a $G$. Daniela corre de $A$ a $B$, luego por el semicírculo de $B$ a $F$, finalmente a $G$. Si ambas se regresan por su mismo camino, ¿quién de las dos corre más distancia?




(a) Yareli (b) Daniela (c) Es la misma distancia (d) No se puede saber

**Problema 11.** La suma de cuatro números de tres dígitos es 1530, donde ningún dígito es 9. Cada dígito de cada número se sustituye por su complemento a 8 (por ejemplo, el dígito $a$ se sustituye por el dígito $8 - a$). ¿Cuánto vale la suma de los nuevos números?

**Problema 12.** La cama de Moni es rectangular de dimensiones 2.5 m $\times$ 2 m. A su gato sólo le gusta dormir sobre la cama o a lo más a un metro de ella, pero nunca abajo de la cama. La cama está pegada a una pared por uno de sus lados cortos. Si a los otros tres lados de la cama sí hay espacio suficiente, ¿en qué área del piso le gusta dormir al gato? Considera a $\pi$ igual a 3.14.

# Canguro, Primera Etapa

**Problema 1.** Isabela va a una frutería y se da cuenta que con el dinero que tiene le alcanza para comprar una manzana o tres naranjas. Camila, en la misma frutería, compra dos manzanas y dos naranjas por 16 pesos. ¿Cuánto pagará Fer por tres manzanas y dos naranjas en la misma frutería?

**Problema 2.** El número de seis dígitos $a4273b$, donde $a$ y $b$ son dígitos, es divisible entre 72. ¿Cuánto vale $b - a$?

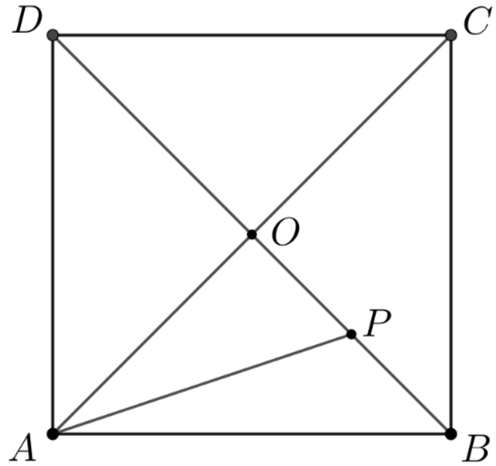
**Problema 3.** La edad promedio de 24 estudiantes de Escuelita CARMA y su maestra es 16 años. Si no contamos a su maestra, la edad promedio de los estudiantes es 15. ¿Cuál es la edad de la maestra?

**Problema 4.** Yareli piensa un número. Ximena y Zaira intentan adivinarlo. El número de Ximena es 26 % más grande que el número de Yareli, mientras que el número de Zaira es 5 % más grande que el número de Yareli. ¿Qué porcentaje es el número de Ximena del número de Zaira?

**Problema 5.** Encuentra el menor entero positivo que al multiplicar por 543, el resultado termina en 2022.

**Problema 6.** ¿Cuántas parejas distintas $(x, y)$ cumplen que el número de seis dígitos $20x22y$ es múltiplo de 36?

**Problema 7.** En la figura, $ABCD$ es un cuadrado de lado $4cm$ y $O$ es el punto de intersección de sus diagonales. $P$ es el punto medio de $OB$. Calcula $AP^2$, en centímetros cuadrados.



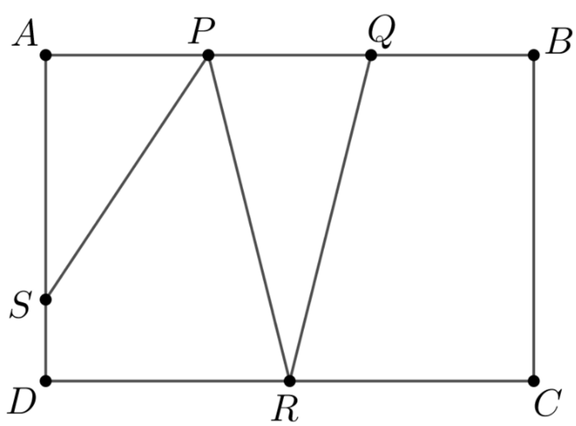

**Problema 8.** ¿Cuántos parejas ordenadas de enteros $(a, b)$ cumplen que su suma es 528 y su máximo común divisor es 33?

**Problema 9.** El bebé Julián tiene cuatro bloques con los números $36, 3, 1$ y $61$. ¿Cuántos números distintos de seis dígitos se pueden formar con estos bloques?

**Problema 10.** ¿Cuántos enteros positivos $n$ cumplen que cuando divides 2022 entre $n$, el residuo es 222?

**Problema 11.** ¿Cuántos números de 7 dígitos $30a0b03$, donde $a, b$ son dígitos, son divisibles entre 13?

**Problema 12.** En la figura se muestra un rectángulo $ABCD$. Los puntos $P, Q$ cumplen $AP = PQ = QB$, $R$ es el punto medio de $CD$ y $S$ cumple que $AS : SD = 3 : 1$. Encuentra la razón de las áreas del triángulo $ASP$, el cuadrilátero $SPRD$, el triángulo $PQR$ y el trapecio $QBCR$. Escribe tu respuesta de la forma $w : x : y : z$.




# Uombat, Primera Etapa

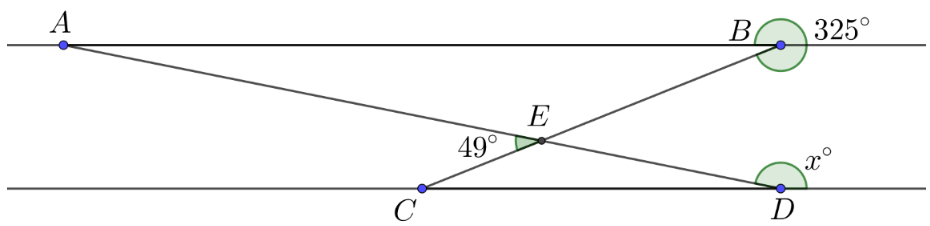
**Problema 1.** Yareli compró una libreta con 98 hojas y numeró las páginas del 1 al 196. Daniela arrancó 35 hojas de la libreta de Yareli y sumó los números de las páginas que arrancó. ¿Es posible que Daniela obtenga 2022?

(a) Sí (b) No

**Problema 2.** $A$ y $B$ son dos números enteros tales que $2022 \times A = 2220 \times B$. ¿Cuál es el menor valor posible de $A + B$?

**Problema 3.** El producto de cinco enteros positivos es 2022. ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener de la suma?

**Problema 4.** En la siguiente figura, $AB$ es paralela a $CD$. Calcula el valor del ángulo $x$, en grados.




**Problema 5.** ¿Cuántos números de 6 dígitos distintos y distintos de 0 cumplen que la suma de sus primeros tres dígitos es 20 y la suma de sus últimos tres dígitos es 22?

**Problema 6.** Yareli tiene una vela que dura 11 horas. Daniela tiene una vela que dura 7 horas. Las prenden al mismo tiempo y, después de 3 horas, las dos velas tienen la misma longitud. Si la vela de Yareli medía $22cm$ y se consumen a ritmo constante, ¿cuánto medía la vela de Daniela?

**Problema 7.** La televisión de Mane tiene los canales del 2 al 39. Si cambias el canal hacia arriba, del canal 39 sigue otra vez el canal 2. Una noche estaba muy aburrido y, empezando en el canal 13, apretó cambiar el canal hacia arriba 2022 veces. ¿En qué canal terminó?

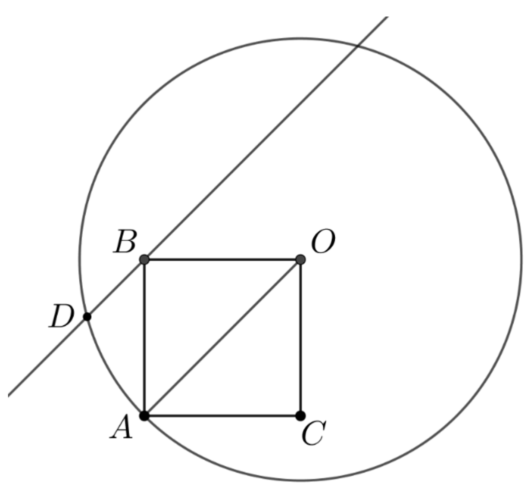
**Problema 8.** Sean $a, b, c, d$ enteros positivos tales que $a + b + c = 53$, $b + c + d = 51$, $c + d + a = 57$ y $d + a + b = 58$. ¿Cuál es el menor de los cuatro números?

(a) a (b) b (c) c (d) d

**Problema 9.** Un número de diez dígitos $abcdefghij$ tiene todos sus dígitos iguales a 1 o a 0 (en particular, $a = 1$). Además, tiene la propiedad de que $a + c + e + g + i = b + d + f + h + j$. ¿Cuántos números existen que cumplen estas propiedades?

**Problema 10.** Cuando los números 11284 y 7655 se dividen entre el número $n$, de tres dígitos, dejan el mismo residuo $r$. Calcula $n + r$.

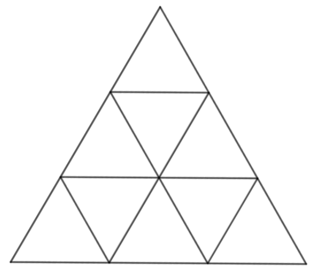
**Problema 11.** En la siguiente figura, $O$ es el centro del círculo y $ACOB$ es un cuadrado con el vértice $A$ sobre el círculo. Trazamos una paralela a $OA$ por $B$ que intersecta al círculo en $D$, como muestra la figura. Calcula el valor del ángulo $\angle BOD$.




**Problema 12.** Un reloj de manecillas marca una hora entre las 10 y las 11. Doña Mary lo mira justo en el momento en el que el ángulo que forman el minutero y la manecilla de las horas queda dividido a la mitad por la línea vertical que va de las 12 a las 6. De las 10 al momento en que Doña Mary mira el reloj, ¿cuántos minutos han pasado?

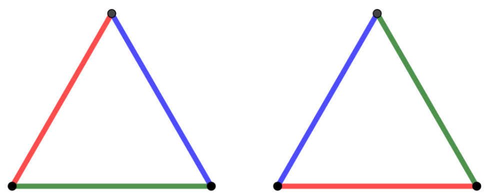
# Cuyo, Segunda Etapa

**Problema 1.** En cada triangulito del siguiente arreglo hay un cachorrito. Iniciando en un triangulito de una esquina, una mariposa se mueve de un triangulito a otro si comparten un vértice pero no una arista. Muestra un camino para que la mariposa visite a todos los cachorritos. Escribe tu camino como una secuencia de números que muestren en qué orden visita cada triangulito.

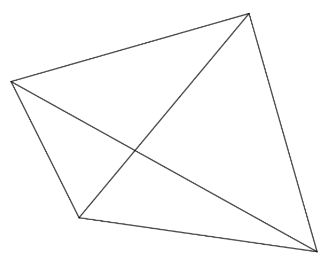


**Problema 2.** Tenemos muchos palillos de la misma longitud de cuatro colores distintos: rojo, verde, azul y morado. ¿Cuántos triángulos distintos podemos construir? Explica cómo lo calculaste o dibújalos todos.

**Nota:** Los triángulos pueden tener más de un lado del mismo color. Si dos triángulos se pueden obtener mediante giros, cuentan como el mismo triángulo. Por ejemplo, los siguientes dos triángulos son el mismo.

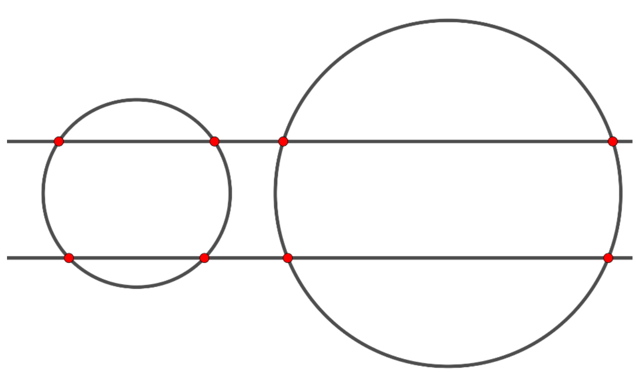


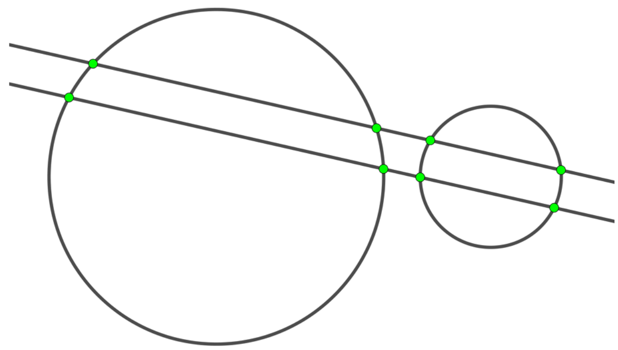
**Problema 3.** Las diagonales de un cuadrilátero lo dividen en cuatro regiones. Ejemplo:



¿Cuál es la mayor cantidad de regiones en que las diagonales de un pentágono lo pueden dividir? Haz un dibujo para mostrarlo.

**Problema 4.** Dibuja cinco diagramas distintos con 2 círculos y 2 rectas, mostrando exactamente 5 puntos de intersección en total, entre círculos con círculos, rectas con rectas y rectas con círculos. Recuerda que dos rectas no paralelas siempre se intersectan, incluso si lo hacen fuera de tu diagrama.
Los siguientes dos diagramas tienen 8 puntos de intersección y cuentan como el mismo diagrama, porque son dos rectas paralelas y dos círculos externos que no se intersectan.

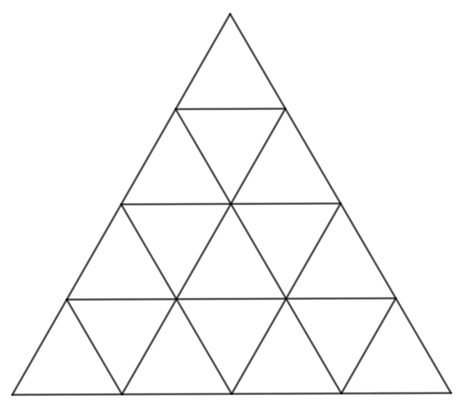




**Problema 5.** Los números del 1 al 12 se escriben en 6 papelitos, dos en cada papelito. Las sumas de los números en cada papelito son $4, 6, 13, 14, 20$ y $21$. Encuentra las parejas de números escritas en cada papelito y explica cómo las obtuviste.

# Koala, Segunda Etapa

**Problema 1.** En cada triangulito del siguiente arreglo hay un cachorrito. Iniciando en un triangulito de una esquina, una mariposa se mueve de un triangulito a otro si comparten un vértice pero no una arista. Muestra un camino para que la mariposa visite a todos los cachorritos. Escribe tu camino como una secuencia de números que muestren en qué orden visita cada triangulito.



**Problema 2.** Los números del 1 al 12 se escriben en 6 papelitos, dos en cada papelito. Las sumas de los números en cada papelito son $4, 6, 13, 14, 20$ y $21$. Encuentra las parejas de números escritas en cada papelito y explica cómo las obtuviste.

**Problema 3.** Las letras $C, A, R, M$ representan dígitos distintos y distintos de 0. Sabemos que

$$C + A + R + M = 11$$

$$C + A + M = 10$$

$$C + A = M,$$

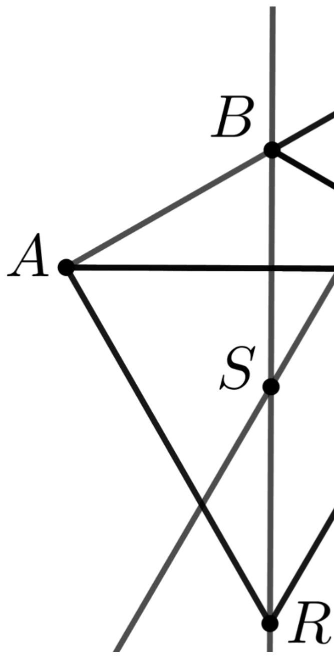
y, además, cumplen que

$$\begin{array}{cccccccc}
\mathrm{C} & \mathrm{A} & \mathrm{R} & \mathrm{M} & \mathrm{C} & \mathrm{A} & \mathrm{R} & \mathrm{M} \\
 & \mathrm{C} & \mathrm{A} & \mathrm{R} & \mathrm{M} & \mathrm{C} & \mathrm{A} & \mathrm{R} \\
 & & \mathrm{C} & \mathrm{A} & \mathrm{R} & \mathrm{M} & \mathrm{C} & \mathrm{A} \\
 & & & \mathrm{C} & \mathrm{A} & \mathrm{R} & \mathrm{M} & \mathrm{C} \\
+ & & & & \mathrm{C} & \mathrm{A} & \mathrm{R} & \mathrm{M} \\
 & & & & & \mathrm{C} & \mathrm{A} & \mathrm{R} \\
 & & & & & & \mathrm{C} & \mathrm{A} \\
 & & & & & & & \mathrm{C} \\
\hline
* & * & * & * & 5 & * & * & *
\end{array}$$

Encuentra el valor de cada una de las letras $C, A, R, M$, encuentra el resultado completo de la operación y explica cómo lo obtuviste.

**Problema 4.** ¿De cuántas maneras podemos partir la palabra CARMATEMÁTICAS de manera que cada pedazo contenga al menos una vocal? Por ejemplo, CAR-MATEMÁTICAS, CAR-MATEM-ATI-CAS y CARMAT-EMAT-ICAS son tres ejemplos.

**Problema 5.** $ABC$ es un triángulo isósceles con $BA = BC$ y $\angle B = 120°$. Sobre los lados $BC$ y $AC$, se dibujan triángulos equiláteros $BCP$ y $ACR$, hacia afuera. Las bisectrices del ángulo $\angle P$ y la bisectriz del ángulo $\angle R$ se intersectan en $S$. Demuestra que $SRCP$ es un paralelogramo.




**Nota:** Una bisectriz es una línea que parte a un ángulo en dos ángulos iguales.

# Walabi, Segunda Etapa

**Problema 1.** La maestra de Yareli, Ximena y Zaira tiene cartas numeradas del 1 al 10. Les reparte 1 carta a cada quien y cada quien anota el número de la carta que recibió. Regresan las cartas, la maestra reparte 1 carta a cada quien y cada quien anota el número. Repiten lo mismo una tercera y última vez. Al final, suman sus números y obtuvieron 10, 14 y 15. Sabemos que Zaira recibió la misma carta cada turno, pero Yareli y Ximena obtuvieron cartas distintas cada vez. Encuentra las cartas que recibió cada estudiante y justifica tu respuesta.

**Problema 2.** ¿De cuántas maneras podemos partir la palabra CARMATEMÁTICAS de manera que cada pedazo contenga al menos una vocal? Por ejemplo, CAR-MATEMÁTICAS, CAR-MATEM-ATI-CAS y CARMAT-EMAT-ICAS son tres ejemplos.

**Problema 3.** Encuentra cuántos números de 4 dígitos tales que:

1. El número es un múltiplo de 7.

2. Si intercambias el dígito de las unidades con el dígito de las unidades de millar, el nuevo número también es múltiplo de 7. No importa si el nuevo número no es de cuatro dígitos.

**Problema 4.** Encuentra la cantidad de sucesiones $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ de enteros positivos que cumplen que

1. $a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$ para $n \geq 1$, es decir, a partir del tercer número, cada uno es la suma de los dos anteriores.

2. $a_6 = 2022$.

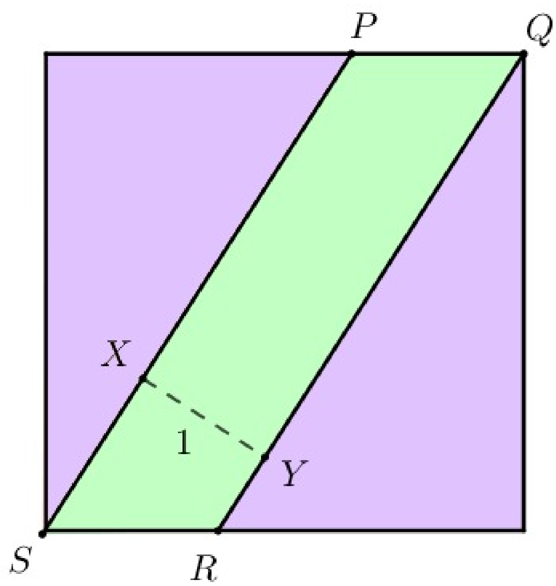
**Problema 5.** Sea $ABCD$ un cuadrilátero, $X$ y $Y$ los puntos medios de $AC$ y $BD$, respectivamente, y $O$ el punto de intersección de las paralelas a $BD$, $AC$ que pasan por $X$, $Y$, respectivamente. Sean $P, Q, R, S$ los puntos medios de $AB$, $BC$, $CD$, $DA$, respectivamente. Demuestra que (a) los cuadriláteros $APOS$ y $APXS$ tienen la misma área, y que (b) los cuadriláteros $APOS, BQOP, CROQ, DSOR$ tienen todos la misma área.

# Canguro, Segunda Etapa

**Problema 1.** La maestra de Yareli, Ximena y Zaira tiene cartas numeradas del 1 al 10. Les reparte 1 carta a cada quien y cada quien anota el número de la carta que recibió. Regresan las cartas, la maestra reparte 1 carta a cada quien y cada quien anota el número. Repiten lo mismo una tercera y última vez. Al final, suman sus números y obtuvieron 10, 14 y 15. Sabemos que Zaira recibió la misma carta cada turno, pero Yareli y Ximena obtuvieron cartas distintas cada vez. Encuentra las cartas que recibió cada estudiante y justifica tu respuesta.

**Problema 2.** Se escriben enteros positivos en las caras de un cubo, uno en cada una. En cada vértice del cubo se escribe el producto de los tres números de las tres caras que tocan ese vértice. La suma de los números escritos en los vértices es 2022. Si $T$ denota la suma de los números en los vértices, encuentra todos los valores posibles de $T$.

**Problema 3.** La figura es un cuadrado y el cuadrilátero $PQRS$ es un paralelogramo con una de sus alturas igual a 1 como se muestra. Además el área morada es el doble del área verde. Calcula el área del cuadrado.




**Problema 4.** Mónica realiza un cultivo de bacterias en un arreglo de $10 \times 10$. Observa que cuando una bacteria se infecta, también se infectan las bacterias hacia arriba y a su izquierda. Las bacterias sanas son de color azul, mientras que las bacterias infectadas son de color rosa. Sabemos que inicialmente hay 10 bacterias infectadas. ¿De cuántas maneras distintas puede colorearse el arreglo de bacterias, una vez que no hay más bacterias que podrían infectarse?

**Problema 5.** Sea $ABCD$ un cuadrilátero, $X$ y $Y$ los puntos medios de $AC$ y $BD$, respectivamente, y $O$ el punto de intersección de las paralelas a $BD$, $AC$ que pasan por $X$, $Y$, respectivamente. Sean $P, Q, R, S$ los puntos medios de $AB$, $BC$, $CD$, $DA$, respectivamente. Demuestra que (a) los cuadriláteros $APOS$ y $APXS$ tienen la misma área, y que (b) los cuadriláteros $APOS, BQOP, CROQ, DSOR$ tienen todos la misma área.

# Uombat, Segunda Etapa

**Problema 1.** Se escriben enteros positivos en las caras de un cubo, uno en cada una. En cada vértice del cubo se escribe el producto de los tres números de las tres caras que tocan ese vértice. La suma de los números escritos en los vértices es 2022. Si $T$ denota la suma de los números en los vértices, encuentra todos los valores posibles de $T$.

**Problema 2.** Sea $ABCD$ un cuadrilátero, $X$ y $Y$ los puntos medios de $AC$ y $BD$, respectivamente, y $O$ el punto de intersección de las paralelas a $BD$, $AC$ que pasan por $X$, $Y$, respectivamente. Sean $P, Q, R, S$ los puntos medios de $AB$, $BC$, $CD$, $DA$, respectivamente. Demuestra que (a) los cuadriláteros $APOS$ y $APXS$ tienen la misma área, y que (b) los cuadriláteros $APOS, BQOP, CROQ, DSOR$ tienen todos la misma área.

**Problema 3.** Encuentra la cantidad de sucesiones $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ de enteros positivos que cumplen que

1. $a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$ para $n \geq 1$, es decir, a partir del tercer número, cada uno es la suma de los dos anteriores.

2. $a_6 = 2022$.

**Problema 4.** Chus pone a sus 3 amigos a adivinar una palabra de 5 letras sin letras repetidas. Todos hacen un intento y les dice que entre los 3 ya usaron las 5 letras que tiene su palabra. Si cualquier acomodo de 5 letras cuenta como palabra y los amigos de Chus se pusieron de acuerdo para no repetir ninguna letra entre ellos ni en cada palabra, ¿de cuántas maneras pudo haber ocurrido esto?
Nota 1: Dos palabras con las mismas letras pero en orden distinto son diferentes.
Nota 2: Nuestro abecedario tiene 27 letras.

**Problema 5.** El radio de las bases de un tanque de gasolina cilíndrico es 1 metro. Este tanque está acostado (no está sobre ninguna de sus bases circulares) y en esta posición, la gasolina llega a una altura de 1.5 metros del suelo. El tanque mide 6 metros de largo (la altura del cilindro, si lo paramos sobre una de sus bases circulares).

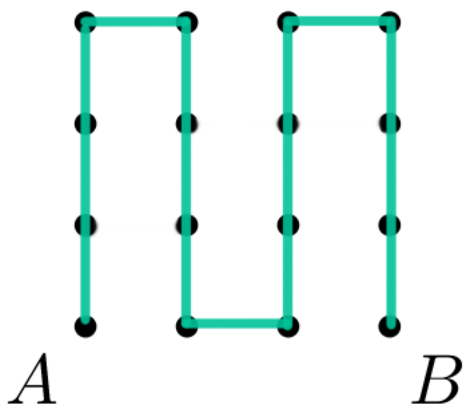
El volumen de gasolina puede escribirse como $a\pi + \frac{b\sqrt{b}}{c}$ donde $a, b$ y $c$ son entreros positivos que no comparten factores y la raíz cuadrada no puede ser simplificada. Calcula $a + b + c$.

# Soluciones a los Problemas

## Cuyo, Primera Etapa

**Solución Problema 1.** La respuesta es 10/04, es decir, el 10 de abril. Contamos $31+28+31 = 90$ días cuando termina marzo. Faltan 10 días para 100, por lo tanto es el 10 de abril.

**Solución Problema 2.** La mayor distancia es 15, para un camino que visita todos los puntos. Este camino es un ejemplo.




**Solución Problema 3.** Tienen 130 pesos. Para que sea la mayor cantidad posible, buscamos los múltiplos de 5 más grandes, menores a 41: 40, 35, 30, 25. Por lo tanto, en total tienen $40 + 35 + 30 + 25 = 130$.

**Solución Problema 4.** El segundo dado tiene los números 0, 1, 2, 6, 7, 8. Cada número del segundo dado se puede juntar con 1 o 4 del primer dado.

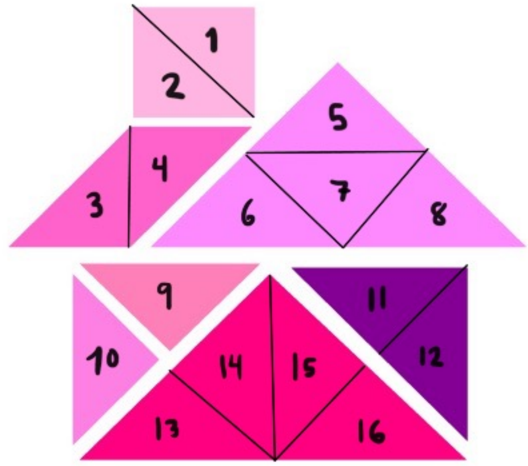
- Para hacer 1 y 4, el segundo dado necesita 0.
- Para hacer 2 y 5, el segundo dado necesita 1.
- Para hacer 3 y 6, el segundo dado necesita 2.
- Para hacer 7 y 10, el segundo dado necesita 6.
- Para hacer 8 y 11, el segundo dado necesita 7.
- Para hacer 9 y 12, el segundo dado necesita 8.

Por lo tanto, el segundo dado tiene los números 0, 1, 2, 6, 7, 8.

**Solución Problema 5.** La respuesta es 95. Hace 5 años, cada una de las hermanas tenía 5 años menos. Como son 5 hermanas, sumaban $5 \times 5 = 25$ años, así que tenían 25 años menos, es decir, sus edades sumaban 95 años.

**Solución Problema 6.** Daniela obtuvo el número más grande. Los números que sumó Daniela son $111 + 333 + 555 + 777 + 999 = 2775$. Los números que sumó Yareli son $222 + 444 + 666 + 888 = 2220$

**Solución Problema 7.** Se necesitan 16 triangulitos. Cada pieza del Tangrama puede construirse con piezas más pequeñas. Podemos usar la siguiente figura de referencia:




**Solución Problema 8.** La respuesta es 126. En los primeros 100 metros, Montse vio $4+3+5=12$ gatos. Cada 100 metros siguientes, Montse vio $3+2+1=6$ gatos. Esto ocurrió 19 veces en total, que son $19 \times 6 = 114$. En total, Monse vio $12+114=126$ gatos.

**Solución Problema 9.** El resultado de la multiplicación es 1234554321. La suma de sus dígitos es 30.

**Solución Problema 10.** La respuesta es 17 filas. La menor cantidad de filas se obtiene cuando planta más plantas en cada fila. La mayor cantidad de plantas que puede poner en cada fila para que todas sean iguales es 7. Como tiene en total $21+42+56=119$ flores, necesita $119 \div 7 = 17$ filas en total.

**Solución Problema 11.** Fer pagará 22 pesos. A partir de la visita de Isabela, sabemos que $M = 3N$, donde $M$ representa el precio de una manzana y $N$ representa el precio de una naranja. Gracias a la visita de Camila, sabemos que $2M+2N=16$. Sustituyendo el valor de $M$, tenemos que $2(3N)+2N=8N=16$, de donde $N=2$ y $M=6$, es decir, cada naranja cuesta 2 pesos y cada manzana cuesta 6 pesos. Con eso podemos saber que $3M+2N=3(6)+2(2)=22$ pesos.

**Solución Problema 12.** Recorrieron la misma distancia. Sea $X$ el punto de intersección de $MN$ y $PQ$. Como todas las figuras en la imagen son rectángulos, podemos comparar algunos lados del recorrido de Mónica: $MX=BP$, $XN=DQ$, $PX=MB$ y $XP=ND$; con esta observación, el viaje de Mónica es de $A$ a $M$, de $M$ a $B$, de $B$ a $P$, de $P$ a $C$, de $C$ a $N$, de $N$ a $D$, de $D$ a $Q$ y de $Q$ a $A$, es decir, es exactamente el mismo recorrido que Montse.

# Koala, Primera Etapa

**Solución Problema 1.** Ver solución de Cuyo, Problema 8.

**Solución Problema 2.** Camila se comió las galletas. Angélica y Daniela no pueden estar mintiendo las dos, así que una de las dos está diciendo la verdad. Como solo una niña está diciendo la verdad, tanto Becky como Camila están mintiendo. Si lo que dice Camila es mentira, entonces es verdad que Camila se comió las galletas.

**Solución Problema 3.** La respuesta es 8. La diferencia entre 120 y 80 es $120-80=40$. La suma de las edades de las 5 hermanas era 40 años menos. Esto ocurrió hace $40 \div 5 = 8$ años.

**Solución Problema 4.** La respuesta es 14523. La suma de los dígitos es $1+2+3+4+5=15$ que no es un número par, así que hay que poner un número impar en medio. Si ponemos el 1 en medio, cada pareja debe sumar 7; el menor número que podemos formar que cumple lo demás es 25134. Si ponemos el 3 en medio, cada pareja debe sumar 6; el menor número que podemos formar que cumple lo demás es 15324. Si ponemos el 5 en medio, cada pareja debe sumar 5; el menor número que podemos formar que cumple lo demás es 14523. Este es el más pequeño de todos.

**Solución Problema 5.** La respuesta es 20. Hay dos tipos de paralelogramos que podemos formar: horizontales o en diagonal.

- De los horizontales podemos formar de 4 tamaños distintos:
  - Hay 4 paralelogramos chiquitos.
  - Hay 1 paralelogramo grandote.
  - Hay 2 paralelogramos verticales de tamaño 2.
  - Hay 2 paralelogramos horizontales de tamaño 2.
- De los diagonales podemos formar de 3 tamaños distintos.
  - Hay 5 paralelogramos chiquitos.

- Hay 4 paralelogramos de tamaño 2.
- Hay 2 paralelogramos de tamaño 3.

En total hay $4 + 1 + 2 + 2 + 5 + 4 + 2 = 20$ paralelogramos en la figura.

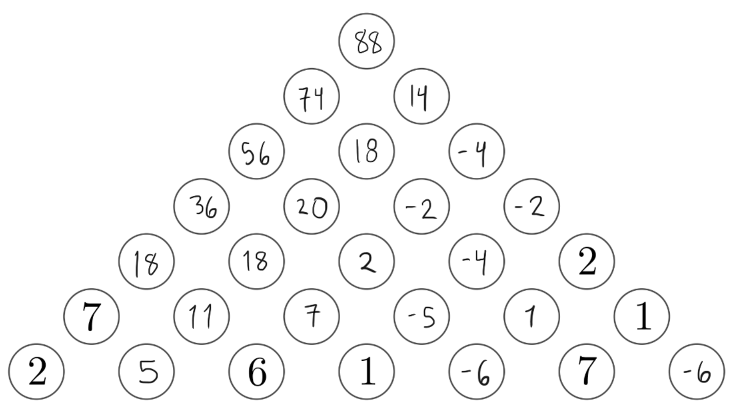
**Solución Problema 6.** La respuesta es 64. Queremos el número más grande que divida exactamente tanto a 128 como a 72. Los divisores de 128 son 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 y 128. Los divisores de 72 son 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72. El número más grande que divide a los dos es 8. El área de un cuadrado de lado 8 es $8 \times 8 = 64$.

**Solución Problema 7.** El resultado de la suma es 1,097,393,685. La suma de los dígitos es $1+0+9+7+3+9+3+6+8+5 = 51$.

**Solución Problema 8.** Podemos enmarcar el triángulo sombreado en un rectángulo de altura 6 y base 9, quitándole una franja abajo de altura 1 y base 9. A ese rectángulo de área $6 \times 9 = 54$ le vamos a restar los tres triángulos no sombreados: uno en la esquina superior izquierda de base 3 y altura 2 que tiene área 3, uno en la esquina inferior izquierda de base 9 y altura 4 que tiene área 18, y uno en la esquina superior derecha de base 6 y altura 6 que tiene área 18. Es decir, el triángulo sombreado tiene área $54 - 18 - 18 - 3 = 15$ centímetros cuadrados.

**Solución Problema 9.** Si al dividir entre el número secreto le sobraron 2, quiere decir que el número secreto divide a $26 - 2 = 24$. Los divisores de 24 son $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$. Para que sobren 2, el número tiene que ser mayor que 2, así que sumamos $3 + 4 + 6 + 8 + 12 + 24 = 57$.

**Solución Problema 10.** El número es 88. El arreglo se completa de esta manera:




**Solución Problema 11.** La hormiga que camina por el cuadrado regresa al punto $A$ cada $12cm$. La hormiga que camina por el rectángulo regresa al punto $A$ cada $18cm$. Buscamos el mínimo común múltiplo de 12 y 18, es decir, 36. Ambas hormigas se vuelven a encontrar después de $36cm$, cuando una haya dado tres vueltas y la otra dos.

**Solución Problema 12.** Cada uno de los tres trazos se puede realizar de dos maneras diferentes. Además, los tres trazos se pueden realizar en 6 órdenes distintos; por lo tanto, hay $2 \times 2 \times 2 \times 6 = 48$ maneras distintas de trazar la $Z$.

# Walabi, Primera Etapa

**Solución Problema 1.** La suma de los números del 1 al 7 es 28. Si los primeros tres dígitos suman $2x$, los últimos tres suman $x$, por lo que esos seis dígitos suman un múltiplo de 3. Por lo tanto, el dígito de en medio puede ser 1, 4 o 7. Si el dígito de en medio es 1, los primeros tres suman 18, el mayor número posible es 7651432. Como este número tiene los tres dígitos mayores al inicio, este debe ser el mayor.

**Solución Problema 2.** Como $d6d41$ es un múltiplo de 9, la suma de sus dígitos debe ser un múltiplo de 9, es decir $d + 6 + d + 4 + 1 = 11 + 2d$ es un múltiplo de 9. No es posible que $11 + 2d = 18$, porque tendríamos $d = 3{,}5$; pero sí es posible que $11 + 2d = 27$, con $d = 8$. No es posible que la suma sea mayor a 27 porque requeriría que $d$ fuera mayor a 9. Por lo tanto, la respuesta es 27.

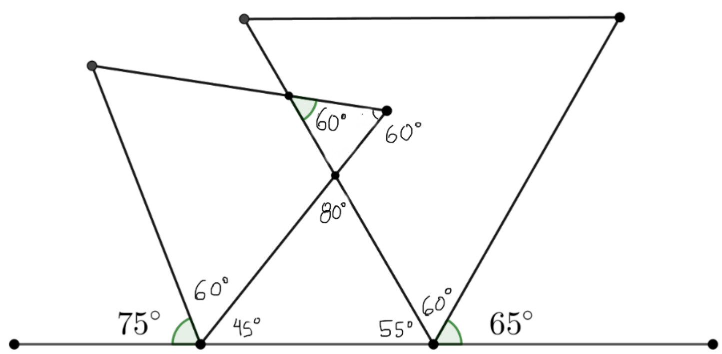
**Solución Problema 3.** Si el área de cada círculo es $4\pi$, esto quiere decir que el radio de cada círculo es 2. Luego, el diámetro de cada círculo es 4 y cada lado del cuadrado mide $4 \times 4 = 16$. Por lo tanto, el área es $16 \times 16 = 256$.

**Solución Problema 4.** No es posible que $a + b$ sea un número primo. Como 23 y 32 son primos relativos, para que la igualdad se cumpla es necesario que $a = 32x$; de manera similar, es necesario que $b = 23x$. Luego, $a+b = 23x+32x = 55x$, que es múltiplo de 5 y de 11 independientemente del valor de $x$, por lo que no puede ser primo. La respuesta es 0.

**Solución Problema 5.** No existe ningún valor entero positivo de $n$ que satisfaga la igualdad. El lado izquierdo es la multiplicación de cuatro enteros consecutivos, por lo que definitivamente es múltiplo de 4; sin embargo, el número del lado derecho de la igualdad termina en 22, por lo que no es un múltiplo de 4. Esto es una contradicción y la igualdad no tiene solución en los enteros positivos. La respuesta es 0.

**Solución Problema 6.** Convertimos 2022 minutos en 33 horas y 42 minutos. Sumamos para obtener 53 : 64, es decir, 54 : 04, es decir, 06 : 04, dos días después.

**Solución Problema 7.** Calculamos los ángulos como muestra la imagen, usando que los ángulos interiores de un triángulo deben sumar 180° y aprovechando que los triángulos de la figura son equiláteros y sus ángulos interiores miden 60°:




La respuesta es 40°.

**Solución Problema 8.** Luis coloca 5 protectores por minuto, pero Luis y Danielle colocan $5 + 7 = 12$ protectores por minuto. Queremos resolver el sistema

$$5x + 12y = 200$$

$$x + y = 26,$$

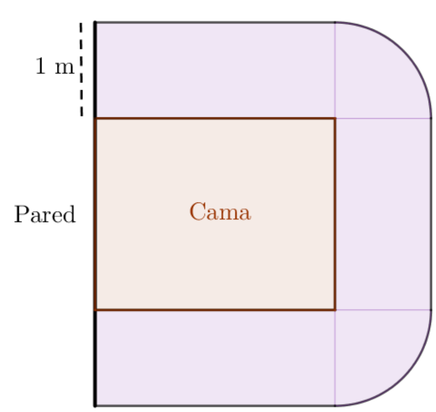
donde $x$ representa los minutos que Luis trabajó solo y $y$ los minutos en que trabajaron juntos. La solución del sistema es $x = 16, y = 10$, por lo que Luis había colocado $5 \times 16 = 80$ protectores cuando llegó Danielle.

**Solución Problema 9.** Si sumamos las cuatro igualdades obtenemos $3(a+b+c+d) = 219$, de donde $a+b+c+d = 73$. Con esto podemos encontrar que $a = 22$, $b = 16$, $c = 15$, $d = 20$, por lo que $a$ es el mayor.

**Solución Problema 10.** El camino de Yareli mide $3\pi$ mientras que el camino de Daniela mide $2 + 2\pi$. Como $\pi > 2$, tenemos que el camino de Yareli es mayor.

**Solución Problema 11.** Como los dígitos son todos menores que 9, si los cuatro números son $\overline{abc}$, $\overline{def}$, $\overline{ghi}$, $\overline{jkl}$, entonces los números sustitutos son $\overline{(8-a)(8-b)(8-c)}$, $\overline{(8-d)(8-e)(8-f)}$, $\overline{(8-g)(8-h)(8-i)}$, $\overline{(8-j)(8-k)(8-l)}$. Una vez más, como todos los dígitos son menores a 9, cada uno de los $8 - x$ es un entero positivo, por lo que la suma de los cuatro números nuevos puede verse como $888 - \overline{abc} + 888 - \overline{def} + 888 - \overline{ghi} + 888 - \overline{jkl} = 3552 - 1530 = 2022$.

**Solución Problema 12.** El área morada del diagrama es el área que deseamos calcular.



$$\begin{aligned}\text{Área del piso en el que duerme el gato } &= 2 \times (1 \times 2{,}5) + 1 \times 2 + \frac{\pi}{2} \\ &= 7 + \frac{\pi}{2} \\ &= \boxed{8{,}57}.\end{aligned}$$

# Canguro, Primera Etapa

**Solución Problema 1.** Ver solución de Cuyo, Problema 11.

**Solución Problema 2.** Para que sea divisible entre 72, debe ser divisible entre 8 y entre 9. Por el criterio de divisibilidad del 8, el número $73b$ debe ser un múltiplo de 8, de donde $b = 6$. Ahora, por el criterio de divisibilidad del 9, $a + 4 + 2 + 7 + 3 + 6 = a + 22$ debe ser un múltiplo de 9, de donde $a = 5$. Luego, $b - a = 6 - 5 = 1$.

**Solución Problema 3.** La suma de las edades de las 24 estudiantes es $24 \times 15 = 360$. La suma de todo el grupo, contando a la maestra, es $25 \times 16 = 400$. Por lo tanto, la edad de la maestra es 40.

**Solución Problema 4.** Si el número de Yareli es $y$, entonces el número de Ximena es $1{,}26y$ y el número de Zaira es $1{,}05y$. Queremos conocer $\frac{Ximena}{Zaira} = \frac{1{,}26}{1{,}05} = 1{,}20$, es decir, el número de Ximena es $120\,\%$ el de Zaira.

**Solución Problema 5.** Vamos a forzar el resultado, apoyándonos de la tabla de multiplicar del 3. Para que el dígito de las unidades sea 2, debemos multiplicar $3 \times 4$; encontramos el primer dígito:

$$\begin{array}{rr} & 543 \\ \times & 4 \\ \hline & 2172 \end{array}$$

Ya tenemos el 2 en las unidades, pero ahora tenemos un 7 en las decenas. Para obtener el 2 que queremos, tendríamos que sumar un número que termina en 5.

$$\begin{array}{rr} & 543 \\ \times & 54 \\ \hline & 29322 \end{array}$$

Ya cumplimos el 2 en las unidades y el 2 en las decenas, pero tenemos un 3 en las centenas y en su lugar queremos un 0. Deberíamos sumar 7, por lo que el siguiente dígito podría ser 9:

$$\begin{array}{rr} & 543 \\ \times & 954 \\ \hline & 518022 \end{array}$$

Para concluir, en la posición de las unidades de millar tenemos un 8 pero queremos un 2, por lo que necesitamos sumar 4 en esa posición; el número que multiplicado por 3 termina en 4 es 8:

$$\begin{array}{rr} & 543 \\ \times & 8954 \\ \hline & 4862022 \end{array}$$

Por lo que el número que buscamos es precisamente 8954.

**Solución Problema 6.** Para que sea múltiplo de 36 debe ser divisible entre 4 y entre 9. Por el criterio de divisibilidad del 4, el número de dos dígitos $2y$ debe ser múltiplo de 4, así que tenemos los valores $y = 0, 4, 8$. Para cada uno de esos valores, es posible encontrar un valor de $x$ que satisface el criterio de divisibilidad del 9, es decir, $x = 3, 8, 4$, respectivamente.

**Solución Problema 7.** Podemos observar que $AP$ mide la mitad de la diagonal y $OP$ mide la mitad de la mitad de la diagonal. Como el lado del cuadrado es $4cm$, entonces su diagonal mide $4\sqrt{2}$ y podemos usar el Teorema de Pitágoras para resolver:

$$AP^2 = AO^2 + OP^2 = (2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 8 + 2 = 10.$$

**Solución Problema 8.** Si el máximo común divisor de $a$ y $b$ es 33, podemos escribir $33x + 33y = 528$, es donde $x + y = 16$, con la condición de que $x$ y $y$ no comparten factores. Las parejas posibles son $(1, 15)$, $(3, 13)$, $(5, 11)$, $(7, 9)$ y sus inversas; en total son 8 parejas distintas.

**Solución Problema 9.** En total son 24. De las $4! = 24$ combinaciones distintas de los cuatro bloques de bebé Julián, el único número repetido es 361361.

**Solución Problema 10.** Tenemos que $2022 = nk + 222$, de donde $1800 = nk$, es decir, $n$ es un divisor de 1800 que es mayor a 222. Como $1800 = 2^3 3^2 5^2$, los números que buscamos son $225, 300, 360, 450, 600, 900$ y 1800, es decir, 7 valores distintos para $n$.

**Solución Problema 11.** Como 1001 es múltiplo de 13, sabemos que 3006003 es divisible entre 13. Los dígitos $3, 0$ de la izquierda y $0, 3$ de la derecha ya tienen el valor que deseamos, por lo que solo tenemos que jugar con 060 para obtener múltiplos de 13 que tengan un 0 en donde ahora hay un 6. Los números son 008, 203, 307, 502, 606, 801, 905; en total son 7 números.

**Solución Problema 12.** Digamos que el rectángulo mide $6x$ de base y $4y$ de altura. Luego, $AP = PQ = QB = 2x$, $DR = RC = 3x$ y $SD = y$, $AS = 3y$. Con estas medidas vamos a poder calcular el área de cada figura:

- El triángulo $APS$ tiene base $2x$ y altura $3y$, por lo tanto su área es $3xy$.
- El triángulo $PQR$ tiene base $2x$ y altura $4y$, por lo tanto su área es $4xy$.
- El trapecio $QBCR$ tiene base mayor $3x$, base menor $2x$ y altura $4y$, por lo que su área es $10xy$.
- El área de todo el rectángulo $ABCD$ es $24xy$. El área del cuadrilátero $SPRD$ es $24xy - 3xy - 4xy - 10xy = 7xy$.

Por lo tanto, la respuesta es $3 : 7 : 4 : 10$.

# Uombat, Primera Etapa

**Solución Problema 1.** No es posible. La suma de los números del 1 al 196 es $\frac{196(197)}{2}$ un número par. Sin embargo, cada hoja que Daniela arrancó contiene los números $n$ y $n+1$, por lo que su suma es $2n+1$, un número impar. Como arrancó 35 páginas en total, y 35 es un impar, la suma de las páginas que arrancó será impar también. Luego, $par - impar = impar \neq 2022$.

**Solución Problema 2.** Dividimos la ecuación entre 6 para obtener $337A = 370B$. Para que la ecuación tenga solución, es necesario que $A = 370x$ y $B = 337x$. El menor valor posible es cuando $x = 1$, en cuyo caso tenemos que $A + B = 370 + 337 = 707$.

**Solución Problema 3.** Sabemos que $2022 = 2 \times 3 \times 337$. Luego, podemos expresarlo como producto de cinco enteros de las siguientes maneras:

- $1 \times 1 \times 2 \times 3 \times 337$
- $1 \times 1 \times 1 \times 6 \times 337$
- $1 \times 1 \times 1 \times 2 \times 1011$
- $1 \times 1 \times 1 \times 3 \times 674$
- $1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 2022$

Es fácil convencernos de que cada una de las opciones nos da un resultado distinto, de manera que la respuesta es 5.

**Solución Problema 4.** Por ser ángulos complementarios, el ángulo $\angle ABE = 360° - 325° = 35°$. Por alternos internos, el ángulo $\angle ECD = 35°$. Como el ángulo $\angle AEC$ es exterior al triángulo $\triangle ECD$, tenemos que $\angle AEC = \angle ECD + \angle EDC$, de donde $\angle EDC = 49° - 35° = 14°$, con lo que podemos concluir que $x = 180° - 14° = 166°$.

**Solución Problema 5.** Las maneras de sumar 22 con tres dígitos distintos son: $9 + 8 + 5$ y $9 + 7 + 6$. Las maneras de sumar 20 con tres dígitos distintos son $9 + 8 + 3$, $9 + 7 + 4$, $9 + 6 + 5$ y $8 + 7 + 5$. Podemos observar que es imposible tomar una de cada una sin que repitan dígitos. Por lo tanto, la respuesta es 0.

**Solución Problema 6.** Cuando han pasado 3 horas, a la vela de Yareli le quedan $11 - 3 = 8$ horas y a la vela de Daniela le quedan $7 - 3 = 4$ horas. Como en ese punto las velas miden lo mismo, podemos concluir que la vela de Daniela debe consumirse al doble de velocidad que la de Yareli. Como la de Yareli mide $22cm$ y se consume en 11 horas, entonces se consume a ritmo de $2cm$ por hora; por lo tanto, la vela de Daniela se consume a ritmo de $4cm$ por hora; si debe durar 7 horas, entonces mide $28cm$.

**Solución Problema 7.** La respuesta es 21. La televisión de Mane tiene 38 canales. Cada que aprieta el botón 38 veces, está de vuelta en el mismo canal. Si lo aprieta $380 + 380 + 380 + 380 + 380 + 38 + 38 + 38 = 2014$, está de vuelta en el mismo canal en el que empezó, el canal 13. Si lo aprieta 8 veces más, lo ha apretado $2014 + 8 = 2022$ veces y está en el canal 21.

**Solución Problema 8.** Ver solución de Walabi, Problema 9.

**Solución Problema 9.** La suma $a + c + e + g + i$ puede ser igual a $1, 2, 3, 4$ o 5. No puede ser 0 porque sabemos que $a = 1$.

- Si la suma vale 1, hay una única manera de hacerlo del lado izquierdo. Del lado derecho hay 5 maneras, pues cualquiera podría ser el que valga 1. Son 5 números.

- Si la suma vale 2, hay 4 maneras de hacerlo del lado izquierdo, pues cualquiera, además de $a$, podría ser el que valga 1. Del lado derecho hay $\binom{5}{2} = 10$ maneras. Son $4 \times 10 = 40$ números.

- Si la suma vale 3. Hay $\binom{4}{2}\binom{5}{3} = 6 \times 10 = 60$ números en este caso.

- Si la suma vale 4. Hay $\binom{4}{3}\binom{5}{4} = 4 \times 5 = 20$ números en este caso.

- Si la suma vale 5. Hay $\binom{4}{4}\binom{5}{5} = 1$ número en este caso.

En total son $5 + 40 + 60 + 20 + 1 = 126$ números que se pueden formar.

**Solución Problema 10.** Por hipótesis del problema, tenemos que $11284 = nx + r$ y $7655 = ny + r$. Luego, si restamos ambos números, obtenemos $3629 = 11284 - 7655 = nx + r - ny - r = n(x - y)$, que es un múltiplo de $n$. Como $3629 = 19 \times 191$, su único divisor de tres dígitos es 191, de donde $n = 191$. Luego, si hacemos la división concluimos que $7655 = 191(40) + 15$, de donde $r = 15$. Por lo tanto, la respuesta es $n + r = 191 + 15 = 206$.

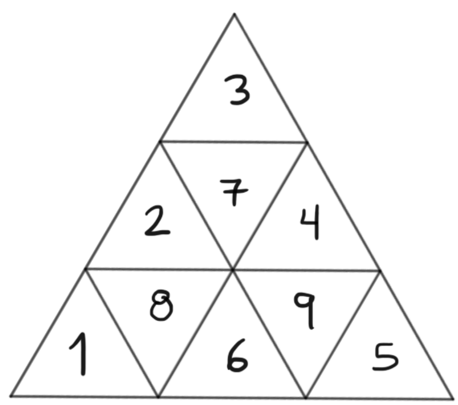
**Solución Problema 11.** Trazamos la perpendicular que va desde $O$ hacia la recta $DB$ y llamamos $P$ al pie de la perpendicular. No es difícil convencernos de que $OP$ mide lo mismo que la mitad de la diagonal $AO$, pues, si $X$ es el punto de intersección de $BC$ con $AO$, $BXOP$ forma un paralelogramo. Luego, el triángulo $DPO$ tiene un ángulo recto en $P$, hipotenusa que mide $r$ y un cateto que mide $r/2$, por lo que es medio equilátero, un triángulo con ángulos $30 - 60 - 90$. Por lo tanto, $\angle POD = 600°$. Pero $\angle POB = 45°$. Concluimos que $\angle BOD = 15°$.

**Solución Problema 12.** Han pasado 9 minutos. Notemos que a las 10 : 09 han pasado $\frac{3}{4}$ de 12 minutos, que es $\frac{1}{5}$ de una hora. Por tanto el minutero está una rayita antes de las 2 y el horario está a tres cuartos de camino entre el 10 y la primer rayita después del 10. Es decir, todavía no ocurre lo deseado en este punto.

Luego, para las 10:10, el minutero está en el 2 y la manecilla horaria sigue un poquito antes de la primer rayita después del 10. Es decir, ya ha ocurrido el momento en el que la línea vertical que v de las 12 a las 6 biseca el ángulo entre las manecillas.

# Cuyo, Segunda Etapa

**Solución Problema 1.** Hay varias maneras de hacer el recorrido. A continuación mostramos un ejemplo:




**Solución Problema 2.** Dividimos en tres casos según si hay lados del mismo color o no.

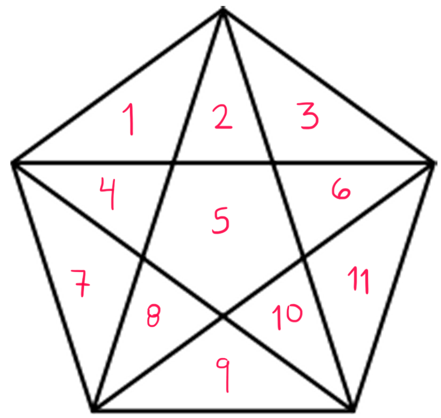
- Los tres lados son del mismo color. En este casos son 4 triángulos, porque hay 4 colores.

- Hay dos triángulos del mismo color y el tercer lado es de un color distinto. El color que se usa dos veces puede ser cualquiera de los 4; el tercer lado tiene que ser de un color distinto así que hay 3 opciones. Hay $4 \times 3 = 12$ triángulos distintos en este caso.

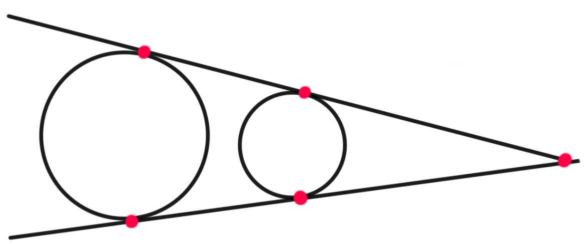
- Los tres lados son de colores distintos. Podemos elegir el primer color de cualquiera de los 4, el segundo color de cualquiera de los 3 restantes y el tercer color de cualquiera de los 2 que faltan. Esto nos da una secuencia ordenada. Por ejemplo, con los colores $A, R, V$ se obtienen seis secuencias: $ARV, AVR, RAV, RVA, VAR, VRA$. Se pueden hacer dos grupos distintos según si se pueden obtener rotando o no: $ARV, RVA, VAR$ cuentan como el mismo triángulo y $AVR, VRA, RAV$ cuentan como el mismo, distinto al otro. Entonces, es necesario dividir nuestra respuesta entre 3. Hay $\frac{4 \times 3 \times 2}{3} = 8$ triángulos en este caso.

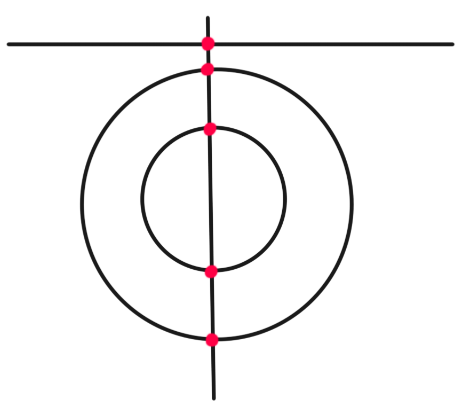
En total son $4 + 12 + 8 = 24$ triángulos distintos.

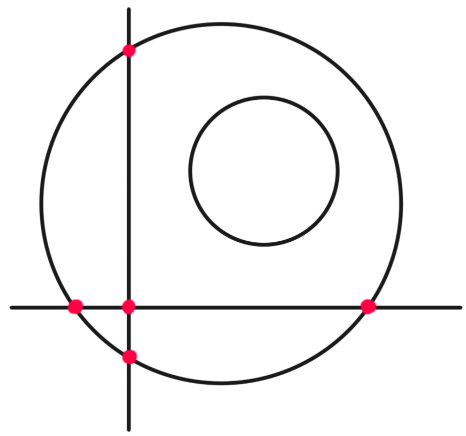
**Solución Problema 3.** Son 11 regiones como máximo, cuando no hay tres diagonales que coinciden en el mismo punto. Este diagrama muestra un ejemplo.

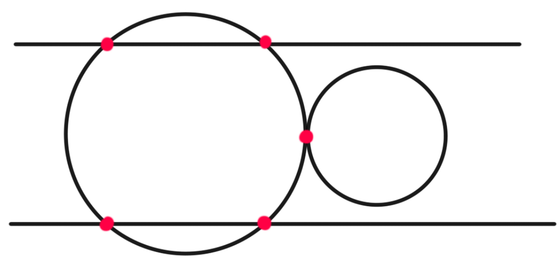


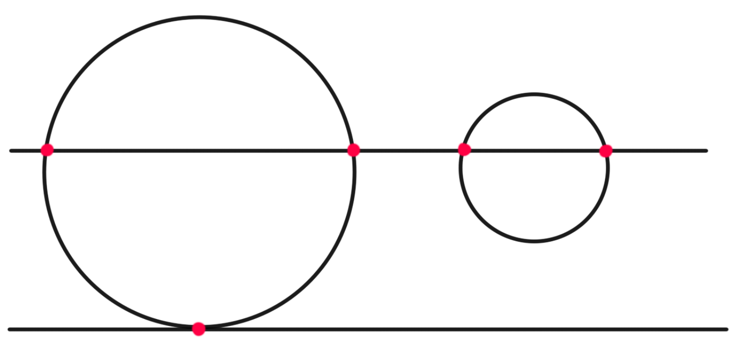

**Solución Problema 4.** Hay mucha diversidad de diagramas que podemos hacer. Mostramos algunos ejemplos a continuación.







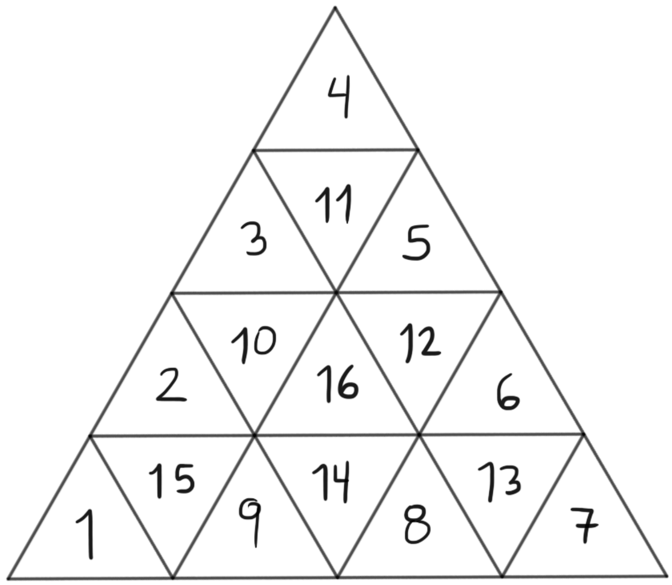




**Solución Problema 5.** Como no podemos repetir papelitos, hay una única manera de obtener $4 = 1 + 3$. Entonces, la única manera de sumar $6 = 4 + 2$ porque el 1 ya se usó. De manera parecida, hay dos maneras de obtener $21 = 11 + 10 = 12 + 9$. También hay solo dos maneras de obtener $20 = 12 + 8 = 11 + 9$. Si usamos $11 + 9$, no queda ninguna manera de escribir 21, por lo que tiene que ser $20 = 12 + 8$ y entonces $21 = 11 + 10$. Hemos usado 1, 2, 3, 4 y 8, 10, 11, 12. Nos faltan 5, 6, 7 y 9 para escribir 13 y 14. Los dos papelitos que faltan son $14 = 9 + 5$ y $13 = 7 + 6$.

# Koala, Segunda Etapa

**Solución Problema 1.** Hay varias maneras de hacer el recorrido. A continuación mostramos un ejemplo:




**Solución Problema 2.** Ver solución de Cuyo Segunda Etapa, Problema 5.

**Solución Problema 3.** Como $C + A = M$ y $C + A + M = 10$, entonces tenemos que $2M = 10$ y $M = 5$. Además, como $C + A + M = 10$ y $C + A + R + M = 11$, entonces $R = 1$. Como no podemos repetir el 1, Sabemos entonces que $C, A$ son $2, 3$, pero no sabemos en qué orden.

Para decidirnos, observemos la suma que tenemos en la segunda parte. Como $C+A+R+M+C+A = 16$, sabemos que la tercera columna de derecha a izquierda tiene que llevar 1. Entonces, como la siguiente columna a la izquierda es $C + A + R + M + C = 11 + C$ sabemos que termina en 5 y que la columa anterior lleva 1. Con toda esta información, sabemos que $11 + C + 1 = 15$ de donde $C = 3$ y entonces $A = 2$.

**Solución Problema 4.** Entre cada pareja de vocales consecutivas, es necesario decidir cómo se va a partir. Por ejemplo, entre la primera A y la segunda A, las maneras de partir son:

- CARMATEMATICAS
- CA-RMATEMATICAS
- CAR-MATEMATICAS
- CARM-ATEMATICAS

donde la primera opción es no romper. Podemos hacer esto con cada pareja de vocales consecutivas y tenemos 4, 3, 3, 3 y 3 opciones en cada caso. En total, hay $4 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 324$.

**Solución Problema 5.** Una manera de mostrar que $SRCP$ es un paralelogramo es mostrar que los ángulos opuestos son iguales. Podemos mostrar de manera sencilla que los ángulos $\angle SPC$ y $\angle SRC$ son iguales, porque son bisectrices de ángulos iguales y cada uno mide $30°$.

Como el triángulo $ABC$ es isósceles y uno de sus ángulos mide $120°$, entonces cada uno de los otros mide $30°$ para que la suma de los tres sea $180°$. Ahora, podemos ver que $\angle PCR = 60° + 30° + 60 = 150°$. Entonces, los tres ángulos del cuadrilátero que ya conocemos suman $30° + 30° + 150° = 210$. Como la suma de los cuatro ángulos en un cuadrilátero es $360°$, entonces el ángulo que nos falta $\angle PSR = 360° - 210° = 150°$. Tenemos entonces dos pares de lados opuestos iguales y eso concluye la demostración.

# Walabi, Segunda Etapa

**Solución Problema 1.** Como Zaira recibió la misma carta cada vez, su suma debe ser un múltiplo de 3. El único múltiplo de 3 en las opciones es 15, de donde sabemos que Zaira obtuvo la carta 5.

Ahora, ni Yareli ni Ximena pudieron haber obtenido la carta 5. Escribimos la lista de maneras de sumar 10 sin repetir ni usar la carta 5:

- $1 + 2 + 7$
- $1 + 3 + 6$

Algunas formas como $1 + 4 + 5$, $2 + 3 + 5$ o $2 + 4 + 4$ no cumplen estas opciones. Como las dos maneras de sumar 10 usan el 1, entonces esta carta no está disponible para sumar 14. Hacemos esa lista ahora:

- $2 + 3 + 9$
- $2 + 4 + 8$

- $3 + 4 + 7$

Algunas formas como $1 + 4 + 9$, $2 + 5 + 7$ o $3 + 5 + 6$ no cumplen las condiciones que establecimos. Ahora, si usamos $1+2+7$ para sumar 10, entonces no podemos usar ni 2 ni 7 y eso elimina las tres opciones. Entonces, tenemos que usar $1 + 3 + 6$ para sumar 10 y $2 + 4 + 8$ para sumar 14.

**Solución Problema 2.** Ver solución de Koala Segunda Etapa, Problema 4.

**Solución Problema 3.** Sea $abcd = 1000a + 100b + 10c + d$ un número de cuatro dígitos divisible entre 7. Sabemos que $1 \leq a \leq 9$. Sabemos que $dbca = 1000d + 100b + 10c + a$ también es divisible entre 7. Esto quiere decir que:

$$abcd - dbca = 999a - 999d = 999(a - d)$$

también es divisible entre 7. Como 7 no divide a 999, es necesario que $a - d$ sea divisible entre 7 y tenemos dos opciones:

1. $a$ y $d$ son iguales.

2. $a$ y $d$ tienen diferencia 7.

Como 1001 es un múltiplo de 7, entonces $1000a+100b+10c+d$ es un múltiplo de 7 si $1000a+100b+10c+d-1001a = -a+100b+10c+d$ también lo es. Como ya garantizamos que $d-a$ sea un múltiplo de 7, es necesario que $10b+c$ también sea un múltiplo de 7. Es decir, $bc$ es cualquiera de los 15 múltiplos de 7 menores que 100, incluido el 00.

En el primer caso, tenemos las parejas $(a, d)$: $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$, $(6, 6)$, $(7, 7)$, $(8, 8)$, $(9, 9)$. En el segundo caso tenemos las parejas $(9, 2), (8, 1), (7, 0), (1, 8), (2, 9)$. En total son 14 parejas de $a, d$ que cumplen. En total son $14 \times 15 = 210$ números que cumplen.

**Solución Problema 4.** Siguiendo las reglas de la sucesión, podemos escribir todos los términos en términos de los primeros dos:

$$a_1, a_2, a_1 + a_2, a_1 + 2a_2, 2a_1 + 3a_2, 3a_1 + 5a_2.$$

Sabemos entonces que $3a_1 + 5a_2 = 2022$. Como tanto $3a_1$ como 2022 son múltiplos de 3, entonces $5a_2$ debe serlo también, de donde $a_2 = 3k$. Ahora, $2022 \equiv 2 \pmod 5$ y $5a_2 \equiv 0$, así que $3a_1 \equiv 2$. Resolviendo la congruencia lineal, tenemos que $a_1 \equiv 4 \pmod 5$, es decir, $a_1 = 5n + 4$. Podemos reescribir la ecuación en términos de $n$ y $k$ como

$$3(5n + 4) + 5(3k) = 2022,$$

$$15n + 12 + 15k = 2022,$$

$$n + k = 134.$$

Sabemos que $n \geq 0$ y $k \geq 1$ por la condición de enteros positivos, así que hay 134 parejas de soluciones y por lo tanto 134 sucesiones distintas.

**Solución Problema 5.** Sabemos que la línea que une los puntos medios de los lados de un triángulo es paralela al tercer lado, que cualquier mediana de un triángulo biseca su área, y que dos triángulos con bases iguales comprendidos dentro de las mismas paralelas tienen la misma área también.
(a) Como $BD$ es paralela a $PS$ y a $OX$, entonces $OX$ es paralela a $OX$. Por lo tanto, $(PXS) = (POS)$. Si sumamos el área de $(POS)$ a ámbos lados de la igualdad, obtenemos $(APXS) = (APOS)$.
(b) Tenemos que

$$(APXS) = (APX) + (ASX)$$

$$= \frac{1}{2}(ABX) + \frac{1}{2}(ADX) = \frac{1}{4}(ABC) + \frac{1}{4}(ADC) = \frac{1}{4}(ABCD).$$

Luego, por el inciso (a), $(APOS) = \frac{1}{4}(ABCD)$. De manera similar, usando simetría, encontramos que cada una de las áreas $(AQOP), (CROQ), (DSOR)$ son iguales a $\frac{1}{4}(ABCD)$. Por lo tanto, las cuatro áreas son iguales.

# Canguro, Segunda Etapa

**Solución Problema 1.** Ver solución de Walabi Segunda Etapa, Problema 1.

**Solución Problema 2.** Sean $a, b, c, d, e, f$ los números escritos en las caras $ABCD$, $BARC$, $PQRS$, $APSD$, $ABQP$, $CRSD$, respectivamente. Luego, los números escritos en las esquinas $A, B, C, D, P, Q, R, S$ son $ade, abe, abf, cde, bce, bcf, cdf$, respectivamente. Si la suma de estos 8 números es $S$, entonces,

$$S = abe + abf + bce + bcf + cde + cdf + ade + adf$$

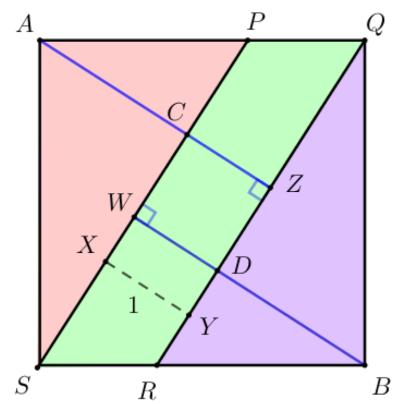
$$= ab(e + f) + bc(e + f) + cd(e + f) + ad(e + f)$$

$$= (e + f)(ab + bc + cd + ad) = (e + f)(a + c)(b + d).$$

El problema dice que $S = 2022 = 2 \times 3 \times 337$. Como los números en cada cara son enteros positivos, entonces cada uno de los factores es mayor a 1, por lo que la suma $a + b + c + d + e + f = 2 + 3 + 337 = 342$.

**Solución Problema 3.** La respuesta es 13.

Nombramos los vértices del cuadrado que no están marcados como $A$ y $B$. Las rectas desde $A$ y $B$ perpendiculares a $PS$ (y por tanto a $QR$), intersectan a $PS$ y $QR$ en $C$, $Z$, y $W$, $D$, respectivamente.




Notemos que $\triangle BQR$ y $PQRS$ tienen la misma base $QR$ y la misma área. Respecto a esa base, el paralelogramo tiene altura $WD = XY = 1$. Por tanto, la altura $DB = 2$. Así $AC = 2 = DB, AZ = 3 = WB$.

Dado que $SB = BQ$ por ser el lado del cuadrado. Y a su vez son hipotenusas de los triángulos rectangulos semejantes $\triangle SWB$ y $\triangle BDQ$, tenemos que en realidad son triángulos congruentes y con ello $SW = BD = 2$. Análogamente, $ZQ = 2$ y con ello

$$\begin{aligned}
[AQBS] &= [CZDW] + [BDQ] + [SWB] + [ACS] + [QZA] \\
&= (1 \cdot 1) + 4(\frac{2 \cdot 3}{2}) \\
&= \boxed{13}.
\end{aligned}$$

**Solución Problema 4.** Observemos que si una bacteria se infecta, entonces se infectan todas las bacterias que están arriba y a la izquierda de ésta. El cuadrado de $10 \times 10$ queda dividido en dos figuras con forma de escalera. Esto nos sugiere que podemos resolver este problema usando caminos. Desde la esquina inferior izquierda hasta la esquina superior derecha vamos a hacer un camino que pasa por un costado de cada bacteria en el arreglo; todas las bacterias arriba o a la izquierda del camino cuentan como inventadas. En total hay que movernos 10 espacios hacia arriba y 10 espacios hacia la derecha así que hay $\binom{20}{10}$ coloraciones distintas del arreglo de bacterias de Mónica.

**Solución Problema 5.** Ver solución de Walabi Segunda Etapa, Problema 5.

# Uombat, Segunda Etapa

**Solución Problema 1.** Ver solución de Canguro Segunda Etapa, Problema 2.

**Solución Problema 2.** Ver solución de Walabi Segunda Etapa, Problema 5.

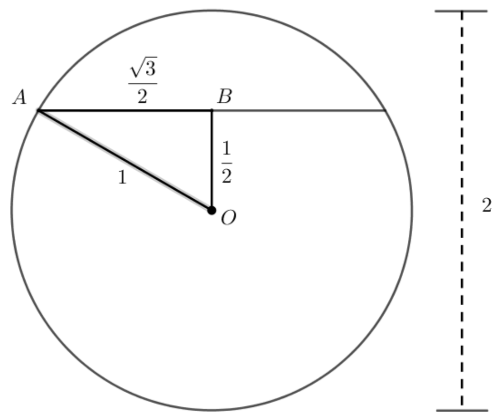
**Solución Problema 3.** Ver solución de Walabi Segunda Etapa, Problema 4.

**Solución Problema 4.** De las 15 letras que utilizan los tres amigos, 5 son las correctas. Hay $\frac{15!}{10!}$ maneras en las que pudieron colocar dichas letras correctas y acomodarlas. Los restantes 10 lugares para letras se deben llenar con 10 de las 22 letras que quedan del abecedario pues los amigos procuraron no repetir letras. Esto se puede hacer de $\frac{22!}{10!}$ maneras.

Así, las maneras en las que pudo haber ocurrido lo deseado son

$$\frac{22!15!}{10!^2}.$$

**Solución Problema 5.** El volumen de gasolina es $4\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}$. De manera que $a + b + c = 4 + 3 + 2 = 9$.




El cilindro está lleno a una cuarta parte del diámetro vertical. Nombremos $O$ al centro de una de las bases, $B$ al punto sobre el diámetro vertical a donde llega el nivel de gasolina, y $A$ a uno de los puntos de la misma base, que está sobre el borde del tanque y que es al nivel al que llega la gasolina.

Tenemos que $AO$ es radio, por lo que vale 1. Y $BO$ es medio metro por hipótesis. Por lo tanto $AOB$ es medio equilátero. Así que $\angle AOB = 60$ y el adyacente también. Es decir, el ángulo total es de 120°, una tercera parte de la circunferencia. Así, el área de una base circular que **no** está cubierta por gasolina es un tercio del área del círculo menos el área de un triángulo equilátero de lado 1:

$$\begin{aligned}\text{Area sin gasolina } &= \frac{1}{3}\pi(1)^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el área que sí está cubierta de gasolina es

$$\pi - \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12} = \frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{2}.$$

Por último multiplicamos esta área por la longitud del cilindro y obtenemos

$$\begin{aligned}\text{Volumen ocupado } &= 6 \cdot \frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{2} \\ &= 4\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

De manera que $a + b + c = 4 + 3 + 2 = 9$.

# Concurso de Física

El Concurso de Física de la VIII Olimpiada Femenil de CARMA consistió de una prueba experimental en una única etapa. A continuación puedes leer el documento que se le entregó a las participantes.

## Prueba Experimental

**Elasticidad y oscilaciones**

Bienvenida al Concurso de Física de la VIII Olimpiada Femenil de CARMA. Este año, el concurso consiste de una prueba experimental. Por favor lee con atención el documento completo antes de empezar para que tengas una idea clara del experimento que vas a realizar y los resultados que debes entregar.

## Materiales

Vas a necesitar los siguientes materiales para realizar el experimento. El material más importante es el elástico.

- Elástico grueso. Puede ser elástico de tela, ligas de ejercicio o incluso una liga gruesa.
- Regla, flexómetro o cinta para medir.
- 11 objetos con masa distinta y conocida. De preferencia usa sólidos. Pueden ser menos objetos y combinar sus masas para obtener 11 valores distintos. Utiliza objetos cuya masa sea apropiada al elástico que usas.
- Una bolsa de plástico o de tela. Es para ayudarte a conseguir que los objetos cuelguen del elástico.
- Cronómetro. Puedes usar tu celular.
- Hojas milimétricas o, en su defecto, hojas cuadriculadas.
- Puedes usar tu calculadora y vas a necesitar hojas, lápiz, pluma o lo que utilices para hacer anotaciones.
- Vas a necesitar fijar tu elástico con suficiente espacio vertical (hacia abajo) para poder hacer las mediciones. No te recomendamos que sea sostenido con la mano.

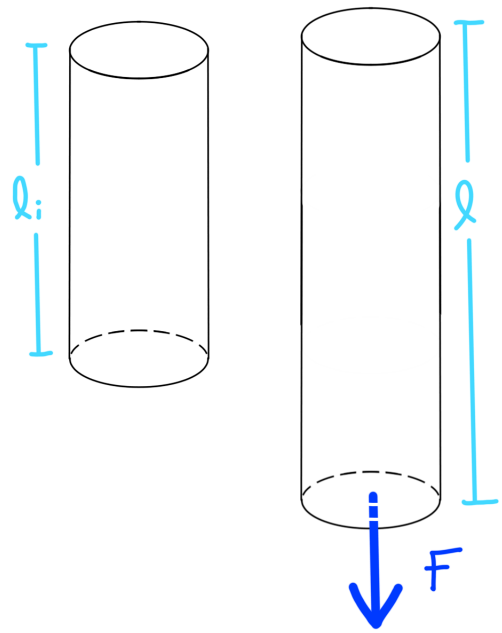
## Elasticidad

### Teoría

Cuando se aplica fuerza a un cuerpo y éste cambia de forma o de tamaño, se dice que el cuerpo se deforma. La elasticidad nos permite estudiar la relación de la fuerza aplicada sobre un cuerpo y su correspondiente deformación. Podemos encontrar dos clasificaciones básicas:

- Cuerpos elásticos: Aquellos que recuperan su forma o tamaño original cuando la fuerza que les fue aplicada, desaparece. Cuerpos inelásticos: Aquellos que no regresan completamente a su forma o tamaño original cuando la fuerza desaparece.

Si aplicamos una fuerza $F$ a una barra de longitud inicial $l_i$, ésta se deforma longitudinalmente hasta una medida $l$, se alargó una distancia $\Delta l = l - l_i$, como se muestra en la imagen siguiente.




La razón de proporcionalidad entre el esfuerzo (fuerza por unidad de área) y la deformación unitaria (deformación por unidad de longitud) está dada por la constante $E$, a la cual llamamos módulo de Young. Esta constante tiene un valor característico para cada material,

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l},$$

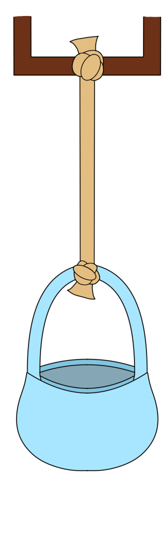
donde $S$ es la superficie transversal de la barra.

# Preparación del experimento

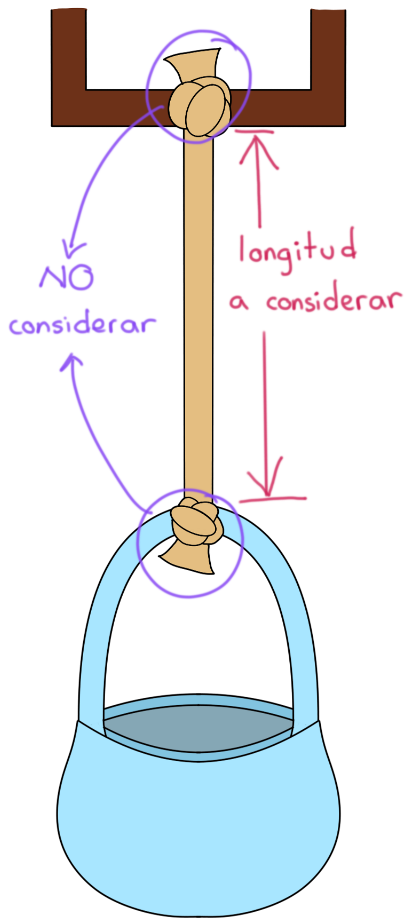
El experimento consiste en medir la elasticidad de tu resorte colocando objetos de distintas masas y midiendo el cambio físico cada vez. Para comenzar con nuestro experimento, vamos a preparar el sistema que vamos a utilizar para realizar las primeras mediciones.

**Fija tu elástico en algún lugar.** Deja suficiente espacio vertical hacia abajo para hacer las mediciones. Puedes colocarlo o hacerle un nudo en algún lugar alto pero a tu alcance como una viga, la rama de un árbol o un gancho que no se estire; toma en consideración cuánto se va a estirar con el peso de los objetos para que no toque el piso y toma en consideración el peso de los objetos para que no se vaya a zafar o romper y tengas que repetir tus mediciones. No te recomendamos que sea sostenido a mano porque esto puede crear mediciones muy inexactas.

**Prepara el extremo que cuelga para colocar tus objetos.** Puedes poner una bolsa de tela o de plástico, que no se vaya a romper con el peso de los objetos, y amarrarla del otro extremo o colgarla con un ganchito que no estire. Los objetos no pueden colgar directamente del elástico porque esto afecta las mediciones. Es importante que hagas todas tus mediciones de la misma manera.



**Mide el volumen de tu resorte.** Ya con tu sistema construido, mide el largo, ancho y grueso de tu resorte para obtener un valor aproximado del volumen de tu resorte. Considera únicamente la longitud del elástico que está libre, es decir, no consideres las partes que necesitaste para hacer nudos o amarres si fue el caso.




Para calcular el volumen, considera tu elástico como si fuera un cuerpo geométrico conocido como un prisma rectangular o cilindro. Considera el error en tus mediciones y explica la manera en que calculaste el volumen y como obtuviste el error.

**Coloca tus objetos en la bolsa.** Comienza a colocar tus objetos en la bolsa o en tu sistema. Hazlo empezando por el objeto de menor masa y sigue, en orden, hasta llegar al objeto de mayor masa. Con cada objeto o masa distinta, deberás esperar a que tu sistema llegue al reposo, es decir, que el resorte no esté oscilando. A partir de aquí, vamos a tomar los datos necesarios para llenar la Tabla 1.

En la Tabla 1, $n$ es el número de medición. En la segunda columna, $m_n$ es la masa de cada uno de los objetos, en kilogramos. En la tercera columna, $F_n$ es la fuerza correspondiente al peso de cada masa u objeto, donde $g$ es el valor de la constante de gravedad, que puedes usar como $9{,}81 m/s^2$. Por último, en la cuarta columna, $l_n$ es la longitud del resorte al colocar el objeto correspondiente, medido en metros.

| $n$ | $m_n$ $[kg]$ | $F_n = m_n g$ $[N]$ | $l_n$ $[m]$ |
|---|---|---|---|
| 0 | | | |
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |
| 5 | | | |
| 6 | | | |
| 7 | | | |
| 8 | | | |
| 9 | | | |
| 10 | | | |

Tabla 1.

**Grafica tus resultados.** Realiza una gráfica de $F_n$ contra $l_n$.

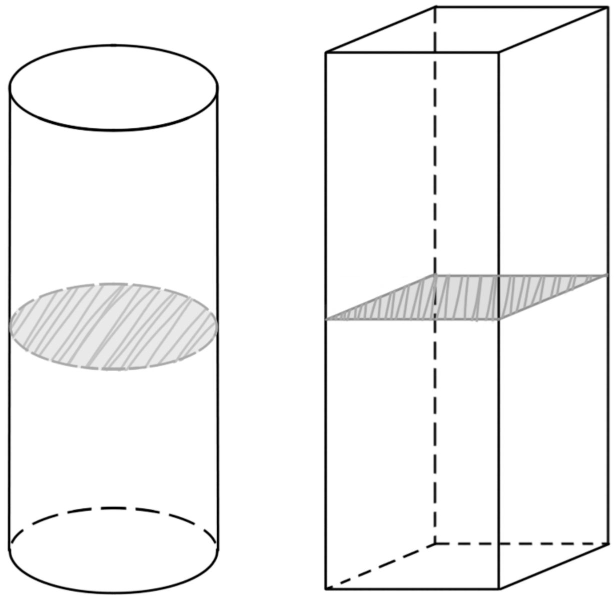
**Calcula el valor de $E$.** Utilizando los datos que mediste en el apartado anterior, vamos a calcular el valor del módulo de elasticidad ($E$). Vamos a obtener un valor de $E_n$, que depende de las mediciones $n$ y $n-1$ cada vez, por lo que ahora, en lugar de empezar en $n=0$ vamos a empezar en $n=1$ porque para $n=0$ no existe un valor anterior.

Para encontrar el valor de $E$ correspondiente al resorte utilizado, vamos a apoyarnos de la fórmula

$$E_n = \frac{\Delta F_n/S_n}{\Delta l_n/l_n},$$

donde $\Delta F_n = F_n - F_{n-1}$ y $\Delta l_n = l_n - l_{n-1}$, que representan el cambio que hubo en la fuerza y en la longitud del resorte entre una medición y otra. *Nota: estamos considerando $\Delta F$ para comparar los datos consecutivos obtenidos, con la intención de disminuir el error lo más posible posible; por eso cambia un poco la formula en comparación con la que enunciamos en la teoría.*

Además, $S_n$ es el área transversal del elástico, es decir, el ancho por el grueso. Para encontrar este valor, vamos a considerar que tu elástico es el mismo cuerpo geométrico que utilizaste para calcular el valor del volumen de tu elástico y vamos a considerar que el volumen se mantiene constante.



Llena tus datos en la siguiente Tabla 2. Algunos de los datos, como $m_n$ y $l_n$, ya los tienes de tu tabla anterior.

| $n$ | $m_n$ $[kg]$ | $\Delta F_n$ $[N]$ | $l_n$ $[m]$ | $\Delta l_n$ $[m]$ | $S_n$ $[m^2]$ | $E_n$ $[N/m^2]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |
| 7 | | | | | | |
| 8 | | | | | | |
| 9 | | | | | | |
| 10 | | | | | | |

Tabla 2.

El valor de $E$ es una constante que depende del elástico; es una propiedad de tu elástico. Como has utilizado el mismo elástico para todas tus mediciones, el valor de cada $E_n$ debería ser el mismo, idealmente. En un contexto experimental, es probable que no sea el caso. A partir de los valores que obtuviste para diferentes $E_n$, encuentra el valor más apropiado para $E$ y justifica tu decisión.

**Grafica $E_n$.** Haz una gráfica de $E_n$ contra $n$. Incluye en esta gráfica el valor que consideras más apropiado para $E$ como constante.

# Oscilaciones elásticas

## Teoría

Cuando estiramos o comprimimos un cuerpo, la fuerza deformadora es proporcional a la deformación. En general, el concepto de fuerza deformadora se interpreta en un amplio sentido, puede referirse a una fuerza, presión o cualquier otra causa capaz de producir la deformación; en este caso, nos referimos a la fuerza aplicada por la masa. La deformación es entonces, el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza, están relacionadas por la ley de Hooke:

$$F = k\Delta l,$$

donde $k$ es la constante elástica o recuperadora y $\Delta l$ el desplazamiento.

En este caso, vamos a asumir que la constante $k$ está dada por

$$k = \frac{E}{Sl}.$$

Entonces,

$$F = ES\frac{\Delta l}{l}.$$

Aplicando la segunda ley de Newton, que nos dice que toda fuerza puede ser representada como el producto de la masa de un cuerpo por su aceleración,

$$ES\frac{\Delta l}{l} = ma = m\frac{d^2(\Delta l}{dt^2},$$

donde $\frac{d(\Delta l}{dt^2}$ es la segunda derivada del desplazamiento con respecto al tiempo.

*No te preocupes si todavía no estás familiarizada con las derivadas, no vas a necesitar realizar ninguna derivada.*

Esta última ecuación representa de manera general un sistema oscilante. La masa oscila alrededor de la posición de equilibrio con un periodo $T$ dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Sabemos que este periodo va a ir disminuyendo conforme la oscilación siga con el paso del tiempo, te recomendamos considerar la primera oscilación para las mediciones que necesites.

# Continúa el experimento

Elige 3 de las masas que usaste en la parte anterior y usa tu mismo elástico o resorte. A diferencia de la sección anterior, no vamos a medir los objetos en reposo pues nos interesa estudiar la oscilación del resorte con cada una de las masas.

**Mide el tiempo de oscilación.** Coloca la masa en el resorte, igual que hiciste en la sección anterior. Esta vez, sostén el objeto con tu mano a una altura tal que el elástico o resorte no esté estirado. Suelta el objeto. Mide el tiempo de oscilación desde la primera vez que baja por completo hasta que vuelva a llegar al punto más bajo otra vez. Procura que la oscilación sea lo más vertical posible, es decir, evita que tu resorte oscile de manera horizontal. Puedes grabar un video para contar el tiempo o usar el cronómetro de tu celular.

El tiempo que mediste lo vamos a considerar como periodo de oscilación. Llena los datos de la siguiente tabla con tus mediciones, donde

$$T_n = 2\pi\sqrt{\frac{m_n l_n}{ES_n}}$$

y $Tex_n$ es el tiempo de tu medición, ambos medidos en segundos.

| $n$ | $m_n$ $[kg]$ | $l_n$ $[m]$ | $S_n$ $[m^2]$ | $T_n$ $[s]$ | $Tex_n$ $[s]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | | | | | |

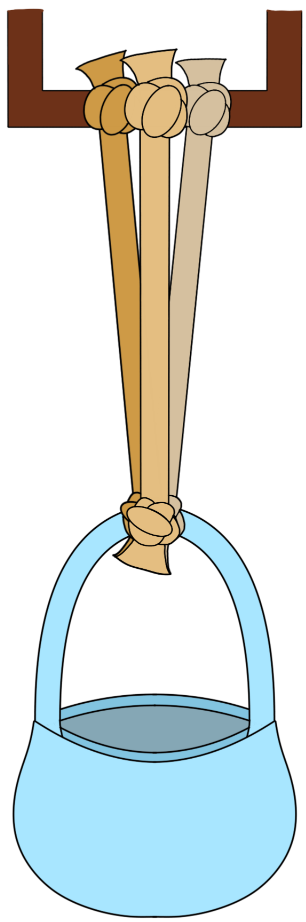
Tabla 3.

**Grafica $T_n$.** Haz una gráfica de los valores que obtuviste para $T_n$ y $Tex_n$. Incluye ambas series de valores en la misma gráfica con $n$ en el eje de las $x$.

**Explica tus resultados.** Explica las diferencias o similitudes de tus resultados teóricos en contraste con los resultados que obtuviste experimentalmente.

**Contesta las preguntas.** Explica tus respuestas en cada una de las siguientes preguntas.

1. ¿Qué pasaría con la medición de $E$ si colocas más de un resorte igual al que utilizaste? Por ejemplo:



2. ¿Cuántos elásticos, como mínimo, se necesitarían para soportar el peso de 1000 veces tu masa más pesada?

3. ¿Los valores obtenidos para $E_n$ para las distintas masas fueron iguales o distintos? ¿Por qué?

4. ¿Qué factores afectan en la medición de $T$ teórico y $T$ experimental?

El Centro de Alto Rendimiento en Matemáticas fue fundado en 2011 en San Luis Potosí, México. Desde entonces, nos hemos dedicado a la preparación de estudiantes, profesores y familias para distintos concursos de matemáticas, principalmente aquellos que caen bajo el paragüas de Olimpiada de Matemáticas. Hemos tenido la oportunidad de trabajar con cientos de estudiantes muy talentosos, dentro y fuera de la Olimpiada, en todo México y partes de América Latina.

En CARMA estamos comprometidos con la educación matemática, con proporcionar un espacio accesible y seguro donde todos, todas y todes puedan continuar su preparación olímpica permanente, dar sus primeros y segundos pasos en concursos, o acercarse a las matemáticas desde una perspectiva lúdica y un aprendizaje basado en problemas.

Para más información sobre CARMA: Centro de Alto Rendimiento en Matemáticas, te presentamos los siguientes enlaces:

- Cursos en https://cursos.carmaenlinea.com/
- Concursos en https://concursos.carmaenlinea.com/.
  Anualmente organizamos Olimpiada Femenil (febrero-marzo), Olimpiada Virtual de Matemáticas (agosto) y Olimpiada de Otoño (septiembre-octubre).
- Nuestra página de Facebook en http://fb.com/carmatematicas
- Nuestro canal de YouTube en https://youtube.com/carma2011
- El canal de YouTube de ugesaurio en https://www.youtube.com/ugesaurio

CENTRO DE ALTO RENDIMIENTO EN MATEMATICAS

CARMA

·2011·

CENTRO DE ALTO RENDIMIENTO EN MATEMÁTICAS

CARMA

·2011·