**Centro de Alto Rendimiento en Matemáticas**

# I Olimpiada Virtual de Matemáticas: 2020

## Problemas y soluciones

# Olimpiada Virtual de Matemáticas 2020

Equipo CARMA

1 de marzo de 2022

Febrero 2022



Para cualquier correción, por favor comunícate con nosotros vía Facebook o a nuestro correo electrónico en matematicascarma@gmail.com.

La primera edición de este material estuvo a cargo de Cecilia Hernández y Germán Puga.
La persona a cargo del material es Danielle Flores.

Primera re-edición: Febrero 2022

Editorial Dinosaurio
San Luis Potosí, México
carmatematicas (at) gmail (dot) com

# Introducción

La I Olimpiada Virtual de Matemáticas se celebró en el verano de 2020, un par de meses dentro de la cuarentena por coronavirus. La intención inicial era ofrecer una especie de sustituto de la Olimpiada Nacional de Matemáticas para Alumnos de Primaria y Secundaria (ONMAPS) que no se celebró en ese año; aunque originalmente se pensó como un concurso de una única edición, al momento de escribir esto sabemos que no fue así.

El examen consistió de dos días de examen, cada uno de cuatro horas y media para resolver 3 problemas.

Participaron estudiantes de todo el país y tuvimos representantes de casi todos los estados de la República Mexicana, además de un numeroso contingente de estudiantes de Perú.

En este folleto encontrarás la lista completa de estudiantes que recibieron algún reconocimiento, además de los enunciados de los problemas y sus soluciones.

# Ganadores

La I Olimpiada Virtual de Matemáticas reconoció 4 niveles o categorías distintas: Primaria, Primero de Secundaria, Segundo de Secundaria y Tercero de Secundaria. Esta es la manera en que se organizaba la ONMAPS –aunque cambiaría para la próxima edición– y esta organización en categorías se cambió para la II OVM.

En cada una de las categorías se premiaron Primer Lugar, Segundo Lugar, Tercer Lugar y Mención Honorífica en proporción 1 : 2 : 3 : 4.

## Nivel 1

### Primer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| COAH | Antonio Gutiérrez Meléndez | Esc. Juan Fco. Mancinas Casas |
| PE | Sebastian C. Miguel C. Chauca | Saco Oliveros |
| YUC | Dana Karen Medina González | Colegio Libanés Peninsular |
| NL | Sebastian Montemayor Trujillo | Latin American School |
| PE | Hector Edwardo Medrano Quispe | Saco Oliveros |
| ZAC | Rodrigo Saldivar Mauricio | Beatriz González Ortega |
| OAX | Eugenia María Cruz Pérez | Colegio Casa de Cuna |
| PE | Hector Manuel Tenorio Rodriguez | Saco Oliveros |
| PE | Alejandra Enríquez Aranda | Saco Oliveros |
| PE | Liliana Fernandez Carrizales | Saco Oliveros |
| PE | Albert Rodrigo Alvarez Jove | Saco Oliveros |
| PE | José Alberto Rojas Carlos | Saco Oliveros |
| SLP | Reyes Noé Reyes Reyes | Manuel José Othón |

### Segundo lugar

| | | |
|---|---|---|
| OAX | Giselle García Feria | Escuela Prim. Francisco I. Madero |
| HGO | Antonio Trejo Avila | Instituto Don Bosco |
| AGS | Mildred Ximena Lemus Barrientos | Colegio Jean Le Boulch |
| ZAC | Ángel de la Cruz M. Almeida | 23 de Junio |
| JAL | Artie Aaron Ramirez Villa | Alvaro Obregon |
| PE | Sebastian L. Cancho Santisteban | Saco Oliveros |
| SIN | Sebastián Gutiérrez Suárez | Ceydi |
| SIN | Jorge Alexander Partida León | Prim. Profesor José Rentería |

| | | |
|---|---|---|
| JAL | Alexis Akim Ramirez Villa | Alvaro Obregon |
| PE | Nicolás Alexánder V. Llacza | Castillo de Talentos - Lima - PE |
| PE | Soa Lucila Valderrama Perez | Colegio AI APAEC |
| COAH | Alejandra Mireles Barrón | Colegio Cervantes de Torreón |
| COAH | Isaías Rafael López Terrones | Colegio Cervantes de Torreón |
| OAX | Quetzalli Cruz de la Cruz | Esc. Prim. General Emiliano Zapata |
| NL | Leyla Hernández Rodríguez | Instituto Federico Froebel |
| SIN | David Alejandro Osuna Avilez | Centro Educativo de Desarrollo Integral |
| ZAC | Bruno González Sánchez | Instituto Educativo de ZAC |
| CHIH | Fernanda Sofía Flores Pérez | Colegio Palmore |
| AGS | Ángel Daniel Marroquín González | Colegio El Encino |
| SIN | Ana Yanitzi Cárdenas García | Esc. Prim. Sócrates |
| NL | Yoona Jwa | Colegio Euroamericano de Monterrey |
| ZAC | Derek Elías Ortíz | 23 DE JUNIO |
| NL | Angélica Yazmín Carrillo Casanova | Centro Educativo Huinalá |
| PE | Luis Angel Ferrer Maydana Canaza | Saco Oliveros Lima |
| SLP | Sarahí Brito Ozuna | Apostólica |

## Tercer lugar

| | | |
|---|---|---|
| YUC | Jorge Uriel Itzicab Puch | Otilia López |
| SLP | Ana Cecilia Martínez Molina | Esc. Prim. Profr. Lucio Sandoval Rivera |
| BCS | Luis Sergio González Cruz | Prim. Ignácio Zaragoza |
| TAM | Andrea Carolina de la Torre Segura | Esc. Prim. Juan B. Tijerina |
| COAH | Elisa Nohemi Carrillo Cruz | Colegio Cervantes deTorreón |
| JAL | María Fernanda Anaya Barajas | Centro de Desarrollo Integral Arboledas |
| PE | Kimberly Mariam Martínez Tarifeño | Jorge Basadre |
| QRO | Alexandro de Jesús Ramos Canales | Esc. Prim. Leona Vicario |
| YUC | Luis Israel Pool Cupul | José Ma. Iturralde Traconis |
| Q.Roo | Betsy Araceli González Octaviano | Prim. Mariano Azuela |
| PE | Adrián Fabricio Quispe Ocaña | Saco Oliveros |
| PE | Rosa Fernandez Carrizales | Saco Oliveros |
| ZAC | Rafael Argumedo Solis | Inst. Educativo Ammadeus |
| SLP | Isaac Azael Juárez Martínez | Real del Fraile |
| COAH | Andrés Isaac Macias López | Instituto Domus |
| NAY | Ricardo Damián Castañeda Covarrubias | Josefa Ortiz de Domínguez |
| JAL | Imelda Guadalupe Navarro Félix | CEDI |
| SLP | Luciano Eraña Vázquez | Instituto Potosino Marista |
| AGS | David Ketzalcoatl Villanueva Martínez | Colegio Mano Amiga AGS |
| GTO | María Ximena Álvarez Martínez | Colegio Montessori |
| BCS | Viviana Carolina Aguilar Ascencio | Profr. Braulio Rodriguez |
| PE | Jonathan Joaquín Landa Medrano | Saco Oliveros |
| SIN | Mia Bibiana Balderas Valderrama | Instituto bilingüe Jean Piaget |
| SIN | Juan Pablo Avendaño Sáenz | Instituto Bilingue Jean Piaget |
| GRO | Pablo Sebastian Suarez Vargas | Liceo Ibero Mexicano Campus Costa Azul |
| CAMP | Jaime Emmanuel Mas Rejón | Miguel HGO |

| | | |
|---|---|---|
| ZAC | Dannia Guadalupe Moreno García | Esc. Prim. Jaime Torres Bodet |
| PE | Yovana Miluska Cruz Encinas | I.E.P. BRYCE |
| SLP | Dafne Yaretzi Hernandez Vazquez | Yollcalli |
| SIN | Axel Eliel Hernández Rodríguez | Rafael Ramirez |
| AGS | Leonardo Gael Rios Menendez | Centro Educativo Cervantes |
| SIN | Ana Victoria Sánchez Soto | Centro Escolar del Noroeste |
| AGS | Sara Nochtli Méndez Stoyanova | Juan José Arreola |
| NL | Luis Demetrio Hernández Gómez | Centro de Alto Rendimiento Académico |
| TAM | Rodrigo Alonso Benitez Martínez | Instituto Winston Churchill |
| NL | Ana Paula Lizcano Montemayor | Instituto de Educación Naciones Unidas |
| PE | Valeria Miley Ordoñez Gutiérrez | Saco Oliveros |
| PE | Zafhid Alphiery Quiñones Loa | Saco Oliveros |
| OAX | Guadalupe Montaño Vicente | Basilio Rojas |
| PE | Angeles Juleysi Ramirez Cabrera | Saco Oliveros |
| YUC | Roberto Quintal Martínez | Colegio Tizimín |
| QRO | Santiago Tomás Moreno Mendoza | Octavio Paz |
| QRO | Clemente Olvera Herrera | Colegio Plenus |

## Mención Honorífica

| | | |
|---|---|---|
| NL | Sara Isabella Oviedo Antonio | Esc. 15 de Septiembre |
| COL | Enrique Gael Dueñas Ramírez | Prim. Colegio Anáhuac COL |
| COL | Héctor Omar Vizcarra Navarrete | Colegio Anáhuac COL |
| AGS | César Palomino Zanella | Colegio Frances HGO de AGS |
| JAL | Gustavo Alejandro Becerra Cervantes | CEPAC |
| COAH | Sofía Ortega Zorrilla | Colegio Cervantes de Torreón |
| COAH | Adrián Bustamante Camacho | Instituto Domus |
| PE | Samuel Mathias H. Ascate | Colegio AI APAEC |
| BC | Daniel Alonso Marquez Corona | Colegio Jean piaget |
| ZAC | Jorge Tejada Alvarado | Melchor Ocampo |
| GTO | Gabriel Sánchez Cruz | Instituto Julia García Retana |
| ZAC | David Arellano Trujillo | Prim. Lic. Genaro Borrego Estrada |
| SLP | Daniela Danae Hernández Méndez. | Colegio Presidentes de México. |
| AGS | Yahvé Guadalupe Cruz González | Esc. Prim. Nicolas Bravo |
| SIN | Karla María Barrios Valdez | Esc. Prim. Miguel HGO |
| COAH | Leonardo Iván Bustamante Parada | Instituto Británico de Torreón |
| SLP | Alejandro Villagrán Martínez | Instituto Real de San Luis (IRSL) |
| PE | Pablo Esteban Quispe Rojas | Castillo de Talentos |
| PE | Angel Hans Vilca Caqui | Colegio Saco Oliveros |
| COAH | Tomás Alejandro Del Toro Resendiz | Instituto Domus |
| VER | Valeria Hernández Salas | Colegio Tepeyac |
| GTO | Dulce María Loeza García | Francisco I. Madero |
| SIN | Angel David Chávez López | María Elvira Delgado De Calderón |
| SIN | Angel Gabriel Chávez López | María Elvira Delgado de Calderón |
| SLP | Catalina Ventura García | Instituto Cervantes Apostólica |
| PE | Gabriella Lucia, Castillo Polo | Castillo de Talentos |
| SIN | Jorge Dalí Ruíz Bueno | Jose Guadalupe Ramirez Aguilar |

| | | |
|---|---|---|
| VER | Maria Ximena Xicotencatl Ortiz | Instituto CIentifico Motolinia |
| BCS | Andrea Karime González Bernal | Colegio La Paz |
| PE | Luana Camila Vega Sandoval | Saco Oliveros |
| OAX | Luis Nazariego Santome | Esc. Prim. Dieciseis de Septiembre |
| PE | Flores de Chate Smith Alexander | Colegio AI APAEC |
| PE | Gomez Sarachaga Valentina Jazmin | Colegio AI APAEC |
| JAL | Luis Santiago González Ortega | cima |
| JAL | Luis Enrique Pérez Díaz | Cuauhtemoc |
| GTO | Alonso Emiliano Cano Morales | Colegio Valenciana |
| AGS | Megan Ailyn Gallegos García | Colegio Karol Jozeft Wojtyla |
| NL | Damián Alexander Cantú Arredondo | Instituto Nouveau |
| OAX | Kalid Rafael Rodríguez Silva | Liceo Federico Froebel |
| CAMP | David Antonio Carvajal Arias | Alicia María Calderón de Avilés |
| PE | Camila Calle Rivera | Saco Oliveros |
| CHIH | Cristian Paul de la Rosa Hernández | Prim. Ángel Trias |
| JAL | Ronaldo Aparicio Aparicio | Colegio Emma Willard |
| AGS | Victoria Sarai Leija Gómez | HEROE DE NACOZARI |
| ZAC | Abdiel Rodríguez Román | Ramón López Velarde |
| SIN | Kevin Alexander Galindo Sánchez | Jaime Nuno |
| PE | José Mathias Chumbes Medina | Saco Oliveros |
| COL | Camila Orozco | Colegio Anáhuac Prim. |
| GTO | Ingrid Jacqueline Lozoya Sierra | Colegio Josefina Camarena |
| GTO | Mili Donají Rendón Lira | Colegio Josefina Camarena |
| SIN | Nathaly Michelle Olivas obeso | Esc.Valentín Gómez Farías |
| SIN | Sarai Torres Ayala | Colegio Americano de Los Mochis |
| COAH | Aldo Said Barrera Espinoza | Colegio Cervantes de Torreón |
| PE | Guillermo André Aguilar Noa | Colegio Saco Oliveros |
| JAL | Miguel Covarrubias González | Colegio Tohui Mocel |
| SLP | José Luis Mejía Martínez | Ma. del Carmen Castillo Morales. |

# Nivel 2

## Primer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| PE | Leandro José Alvarado Bravo | Saco Oliveros |
| PE | Sebastian Enrick Lozada Galvez | Saco Oliveros |
| PE | Alisson Ahilynn Morón Delgado. | Tesla schools |
| PE | Angélica L. Enríquez Aranda | Saco Oliveros |
| JAL | José Ángel Reynaga Álvarez | CEPAC JAL |
| BCS | Alonso Baeza Quevedo | Secundaria Antonio Mijares |
| PE | Yaranga Almeida Roy Eduardo | Saco Oliveros |
| PE | Albert Anibal Anampa Donayre | Saco Oliveros |
| BCS | Oscar Palomeque Flores | Colegio St. John´s |

## Segundo lugar

| | | |
|---|---|---|
| TLAX | Ever Juárez Quiñones | Colegio José María Lafragua |
| PE | Rosangel Bullon Linares | Saco Oliveros |
| TLAX | Ghalia Lizet Degales Sánchez | Esc. Sec. Tec. No. 1 Xicohténcatl Axayacatzin |
| PE | Angel Matthias Vargas Tarazona | Saco Oliveros |
| PE | Josue Anthony Bautista Villanueva | Saco Oliveros |
| HGO | Stephanía Terrazas Trejo | INEA |
| SIN | Angela Maria Flores Ruiz. | Esc. Sec. Jesusita Neda |
| COAH | Samuel Eduardo Bustamante Parada | Instituto Británico de Torreón |
| AGS | Juan Pablo De Lira Medina | Secundaria General 2 José Clemente Orozco |
| PE | Abraham Gonzalo Fajardo Incio | Saco Oliveros |
| OAX | Luis Lavariega Meneses | Esc Sec Jaime Torres Bodet |
| SIN | Abril Félix Félix | Instituto Altum |
| NL | Santiago Polendo Perini | Latin American School of Monterrey |
| PE | Joaquín Sebastian Salazar Sedano | Saco Oliveros |

## Tercer lugar

| | | |
|---|---|---|
| AGS | Ángel Israel Ruiz Herrera | Esc. SEC. Tec. 26 Himno Nacional |
| PE | Dayan Nicole Vargas Chuco | Saco Oliveros |
| COAH | Sara Carrillo Cruz | Colegio Cervantes de Torreón |
| MICH | Jaziz Cortés Camiro | Colegio de las Américas |
| COAH | Natalia García Esquivel | Colegio Cervantes de Torreón |
| COAH | Alejandra Ayme Anzures Castillo | Colegio Cervantes de Torreón |
| SIN | Axel Fernández Soto | Instituto Jean Piaget Del Rio, A. C. |
| JAL | Galileo López Loreto | CEPAC JAL |
| NL | Diego Rodriguez Alonzo | Centro de Alto Rendimiento Academico |
| SIN | Iván Emiliano Lizárraga Jacobo | Instituto Anglo Moderno |
| GTO | Said Huizar Dorantes | Esc. de Talentos GTO Azteca |
| OAX | Fidji Areli Perez Alejandres | Instituto Blaise Pascale |
| NL | Edgar Alejandro Ayala Solis | Centro Educativo Huinala |
| NL | Trinidad Alfredo Segovia López | San Roberto Valle Alto |
| GTO | Eva Rodríguez Muñoz | Esc. Prim. Amado Nervo |
| SLP | Paulina Rocha López | Colegio San Francisco Javier |
| CDMX | Jonathan Aldair Martínez Marcelo | Colegio Axayacatl |
| ZAC | Juan Pablo Espinosa | nan |
| MICH | Dulce Paloma Romero Díaz | Secundaria Particular Colegio Huetamo |
| CHIS | Ruth Esmeralda Utrilla Verá | Secundaria 44 |

## Mención Honorífica

| | | |
|---|---|---|
| EDO.MX | Ximena Zoe Camacho Mendoza | Frida Kahlo |
| OAX | José Alberto Vera Guzmán | Esc. Secundaria Técnica Número 22 |
| OAX | Sofía Carolina Moreno Esparza | Liceo Federico Froebel |
| QRO | Ana Sofía Durán Gómez | Colegio Labastida Francisco de Paula |
| BC | Mariana González Cepeda | Secundaria Imanti |
| CDMX | Igor M. Rivera | Colegio Madrid |

| | | |
|---|---|---|
| AGS | Elizabeth Chávez Canizález | Esc. Sec. Gral. No. 12 Rosa GRO Ramírez |
| PE | Jeanpier Joaquin Diaz Osis | Saco Oliveros |
| PE | Jose Luis Alvarado Agurto | Saco Oliveros |
| EdoMex | Emiliano Yaocuauhtli Sánchez Sánchez | Jose Vasconcelos |
| SLP | Juan Pablo Rodas Oliva | Colegio Presidente Kennedy. |
| COAH | Lesley Valeria Soto Domínguez | Colegio Cervantes de Torreón |
| GTO | Jesús Fernando Gutiérrez Urtaza | Colegio Josefina Camarena |
| PUE | José Alejandro Arce Balderas | Secundaria Melchor Ocampo |
| TAM | Pedro Emmanuel Benitez Martínez | Instituto Winston Churchill |
| TAB | Julia Elizabeth Morales Maya | Colegio México del Sureste |
| CAMP | Diego Uriel Canul Flores | Secundaria General Moises Saenz Garza |
| PE | Jhady Julieth Guevara Huamani | Saco Oliveros |
| TAB | Carlos Daniel Acuña Valencia | Colegio México del Sureste |
| PE | Luis Alejandro Condori Vásquez | Saco Oliveros |
| PE | Francisco Gabriel Díaz Salguero | Saco Oliveros |
| GRO | Gadiel García Piza | Colegio Militarizado Madrid |
| DGO | Luis Fernando Andrade Adame | Instituto Francés De La Laguna |
| PE | Mendez Guevara Anderson Bryan | Colegio AI APAEC |
| SIN | Ana Karen Armenta Vargas | Instituto Altum |
| NL | Diego Antolín Hernández Beltran | Sec.85 Alberto Santos De Hoyos |
| YUC | Melchor Emilio Aguiñaga | Colegio Tizimin - Centro Educativo Tizimin |
| PE | Diego Gedeón | Colegio Saco Oliveros sede - Cuba |

# Nivel 3

## Primer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| SLP | Daniel Ramírez Kühn | I.C Apostolica |
| NL | Fernando Álvarez | nan |
| PE | Valeria Pareja Soto | Saco Oliveros |
| GTO | Itzel Cano Rivas | Secundaria Oficial Pénjamo |
| PE | Jazmín Valeria Chavarri Lozano | Jorge basadre |
| ZAC | Javier Mena Chavez | Jose Vasconcelos |
| TAM | Ana Camila Cuevas González | Instituto Winston Churchill |
| YUC | María Fernanda López Tuyub | Secundaria Gral 4 José Vasconselos |
| AGS | Uma Salcedo Reyes | Instituto Sanford |

## Segundo lugar

| | | |
|---|---|---|
| GTO | Argelia Sánchez Cruz | Instituto Julia García Retana |
| PE | Ruiz Ulloa Luis David | Colegio AI APAEC |
| PE | Nicole Alexandra Atalaya Torres | Jorge Basadre |
| TAM | Isabela Loredo Carvajal | Colegio Nuevo Santander |
| TLAX | Miguel Esteban Martinez Villegas | Colegio Cambridge |
| COAH | Fernando D. Saucedo Hernández | Esc. Secundaria Técnica Maragarita Maza De Juárez |
| AGS | Habid Pablo de Jesús Santiago Chávez | Esc. Sec.Gral. 36 Enseña Nacional |

| | | |
|---|---|---|
| OAX | Bastian Alejandro López Vásquez | Esc. Secundaria Técnica 1 |
| PE | Kristhiano Joel | Mungi Mozo |
| ZAC | Dayana Ximena Meza Arellano | Internado No. 9 J. Trinidad García de la Cadena (CEBAARE) |
| PE | Andrea Katrina Romero Zegarra | Saco Oliveros |
| PE | Escobar Valverde Deyner Steven | Colegio AI APAEC |
| AGS | Logan GRO Díaz | Esc. Sec. Gral. No. 36 ENSEÑA NACIONAL |

## Tercer lugar

| | | |
|---|---|---|
| MICH | Miguel Enrique Rangel Castillo | Instituto Vasco de Quiroga |
| PE | Balbuena Huamani German | Saco Oliveros |
| PE | Anthony Jhoel Corrales Lozada | I.E.P. Jorge Basadre |
| BCS | César Daniel González Bernal | Colegio La Paz |
| NL | Lucero Díaz Ortega | CARA |
| SLP | Zaira Isabel Juárez Martínez | Secundaria Técnica 5 |
| COAH | Damaris Paola Castrellón Carrillo | Colegio Cervantes de Torreón |
| EDO.MX | Emilio Estrada Pérez | INEDIB |
| SIN | Rolando Soto Carrizales | Instituto Jean Piaget del Río |
| PE | Adriana Celeste Alvarado León | Saco Oliveros |
| PE | María Antezana de la Cruz | Saco Oliveros |
| PE | Piero Alejandro Ortega Capacute | Saco Oliveros |
| CHIH | Carlos Alonso Carrillo Garcia | Comunidad Montessori San Pablo |
| JAL | Omar Manzano Medina | Instituto Fray Juan De Padilla |
| AGS | Juan Pablo Salinas Muñoz | Esc. Secundaria Técnica 20 |
| JAL | Fernando González Ruiz | CEDI |
| BCS | Carlos Alfredo Nava Montoya. | Colegio Mission. |
| SIN | Ana Sofía Corrales Fuentes | ETI 2 |
| Sonora | Julian Daniel Vázquez Lomelí | IBJEM ( Instituto Bicultural Julieta E. Manriquez) |
| JAL | Brianet Mireya Pajarito Guzmán | |
| PE | Sebastian Dajoru Alegria Consuelo | Saco Oliveros |
| nan | Sergio Gael Vale López | nan |

## Mención Honorífica

| | | |
|---|---|---|
| JAL | Roberto Carlos Navarro Félix | CEDI |
| PE | Huamanchay Sanchez Obed Fabian | Colegio AI APAEC |
| NL | David Eugenio Olloqui Cortés | Latin American School of Monterrey |
| BCS | Isaac Montaño Manríquez | Instituto Bilingüe Del Valle |
| PE | Vera Aguilar Alexander Benjamin | Colegio AI APAEC |
| EDO.MX | Ximena Michelle Romero Yañez | Colegio México Americano |
| PE | Sanjorge Llactas Flavio | Saco Oliveros |
| NL | Laurie Camila Hernández Pacheco | Colegio San Patricio |
| BCS | Raul Delgado Olguin | Esc. Secundaria Jose Maria Morelos y Pavon |
| PE | Dessyret Juleysi Razabal Ramos | TESLA SCHOOLS |
| AGS | SOFÍA REYES SALAS | Esc. Secundaria Técnica Núm. 1 José Reyes Martínez |
| PE | Alvaro Mozo Oswaldo Rodrigo | Colegio AI APAEC |

| | | |
|---|---|---|
| AGS | Dana Nikté Villanueva Martínez | Centro Escolar Nuevo Milenio S.C |
| JAL | Regina Coronado Méndez | Instituto Tepatitlán |
| MICH | José Andrés Lemuz Velázquez | Homeschool |
| TAM | María Fernanda Tinajero Sánchez | Instituto Winston Churchill |
| AGS | Oscar Miguel Santillán Hinojo | Colegio Francés HGO de AGS |
| Morelos | Maximiliano Efrén Abarca Jiménez | Esc. Secundaria Tecnica no. 39 |
| BC | Violeta Gabriela Fuentes Loera | Centro Escolar Inglés |
| MICH | Oscar Fernando Tea García | Colegio Educare |
| SLP | Braulio Coronado Leija | nan |
| SLP | javier alejandro patiño | Apostolica |
| EDO.MX | Laila Julisa Ocampo Gutiérrez | Colegio México Americano |
| SLP | Ana Victoria García Mendieta | Instituto Hispano Inglés |
| SIN | Juan Pablo Burgos López | Centro Educativo de Desarrollo Integral A.C. |
| CDMX | Ismael Alejandro Avellaneda Velázquez | Colegio Axayacatl |
| OAX | Jorge Enrique Cervantes Jiménez | Esc. Sec. General Octavio Paz |
| COAH | Alondra Sofía Morán Barrios | Colegio Cervantes de Torreón |
| PE | Iko Sebastian Miguel Alonso | Colegio AI APAEC |

# Nivel 4

## Primer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| PE | Eduardo Fernando Aragon Ayala | Mayor Mendel |
| GRO | Omar Farid Astudillo Marbán | Manuel Saenz |
| CDMX | Diego Caballero Ricaurte | Esc. Moderna Americana |
| OAX | David Garcia Maldonado | Instituto Veritam |
| SIN | Victor Manuel Bernal Ramirez | ETI 5 |

## Segundo lugar

| | | |
|---|---|---|
| NL | Eric Ransom Treviño | Sec. No. 57 Profr. Roger Pompa Pérez |
| NL | Luis Eduardo Martínez Aguirre | Sec 24 Guillermo Prieto |
| COAH | Diana Laura Garza de la Riva | Colegio Thomas Jefferson |
| NL | Viviana Carrizales Luna | Centro de Alto Rendimiento Academico |
| OAX | Alexis Alberto Victoria García | Esc. Secundaria Técnica Número 1 |
| COAH | Andrés De la Garza Rosales | Liceo Freinet |
| CDMX | Natalia Malpica Blackaller | Instito Miguel Ángel |
| PE | Sebastián Benito Rivera | Saco Oliveros |
| Q.Roo | Alier Sánchez y Sánchez | Colegio Kukulcán Cancún |
| CDMX | Carlos Martínez Quintero | Liceo Mexicano Japonés |
| SLP | Valentina Acosta Bueno | Instituto Cervantes Apostólica |
| ZAC | Fernanda Salazar Quiñonez | CEBAARE |

## Tercer lugar

| | | |
|---|---|---|
| SIN | María Fernanda Montoya López | Colegio Enrique Arreguin |
| CDMX | Sergio Alonso López García | Tomás Alva Edison |
| SLP | José Luis Sánchez Jiménez | Esc. Secundaria Oficial Ing. Camilo Arriaga |
| BC | Oscar Jiménez Rodríguez | Universidad del Noroccidente de Latinoamérica |
| PE | Fabrizio Percy Robles Huaccho | Talentos |
| ZAC | Javier Alejandro Cuevas Solís | Instituto ZAC (IMAP) |
| SLP | Francisco Jesús Hernández Hernández | Cobach 28 |
| JAL | Hanna Fernanda Cortés Chávez | Centro de Desarrollo Integral Arboledas A.C. |
| NL | Juan José de Jesús Hernández Beltrán | Secundaria 85: Alberto Santos de Hoyos |
| CDMX | Andrés Muedano Sosa | Colegio Suizo de México |
| DGO | Mario Isaac Sifuentes González | Colegio Metropolitano de La Laguna A.C. |
| TLAX | Arantza Torres Báez | Esc. Sec. Téc. No. 4 José Agustín Arrieta |
| SIN | Rafael Verdugo Hernández | Instituto ALTUM |
| AGS | Rogelio Emiliano Salinas Gutiérrez | Secundaria Técnica No. 1 "José Reyes Martínez" |
| COAH | Victoria Daniela De la Mora Rosales | Colegio Cervantes de Torreón |
| PE | Sanchez Silva Ivan Alexander | Colegio AI APAEC |
| PE | Aguilera Manchay Enver Williams | Colegio AI APAEC |
| JAL | Abraham Emiliano Manzano Medina | Secundaria Fray Juan De Padilla |

## Mención Honorífica

| | | |
|---|---|---|
| PE | Alonso Josue Chuman Talledo | |
| OAX | Santiago González Salud | Instituto Veritam |
| DGO | Leonardo Batres Caldera | Instituto Francés de la Laguna |
| EDO.MX | Indra Avila | INEDIB |
| PE | Andre Jeremie Cespedes Cubas | Saco Oliveros |
| OAX | Melissa Isabel González Ordaz | Centro Escolar Siglo XXI |
| Morelos | Fernanda Isabel Figueroa González | Colegio Monte Albán |
| AGS | María Fernanda Reséndiz Mejia | Esc. Sec. Técnica 5 Genaro Reyna Soto |
| SLP | Erick Francisco Rangel Sosa | Flavio C. Sifuentes |
| CHIH | Jeshua Sebastian Enriquez Terrazas | Secundaria Estatal 3008 |
| VER | Sarah Martínez García | Instituto Científico Motolinía |
| CDMX | Barbara Mariana Bautista Muñoz | Colegio Axayacatl |
| CDMX | Ana Laura Cuevas Rodríguez | Colegio Axayacatl |
| VER | Mateo Ares Cruz Medina | José de Jesús Rebolledo |
| NL | Imanol Armando González Solís | Centro Escolar Gante A.C. |
| Sonora | Dylan Rene Rivas Miranda | Colegio Educativo Bilingue del Noroeste |
| YUC | Juan Enrique Vivas Sánchez | Centro educativo Tizimín |

# Enunciados de los Problemas

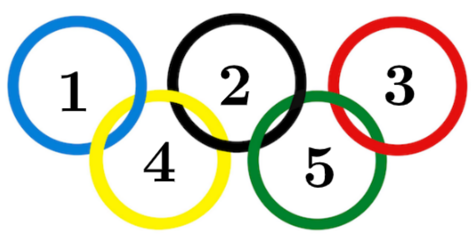
La I Olimpiada Virtual de Matemáticas de CARMA tuvo 4 niveles, imitando los niveles que hasta entonces tenía la ONMAPS:

- Nivel 1: Quinto y sexto de Primaria
- Nivel 2: Primero de Secundaria
- Nivel 3: Segundo de Secundaria
- Nivel 4: Tercero de Secundaria

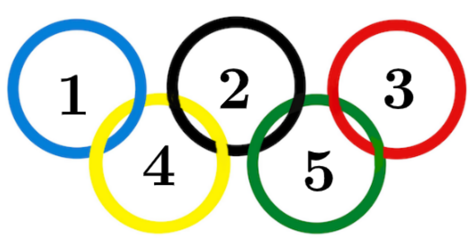
Presentamos a continuación los enunciados tal cual aparecieron los dos días de examen.

## Nivel Uno

**Problema 1.** En la escuela de Alfredo le pidieron dibujar los aros olímpicos. Los cuales deben verse de la siguiente manera:




Alfredo no tiene esa imagen, así que no recuerda nada del orden de los colores ni cuáles aros van encima y cuáles por debajo. Sólo recuerda que son cinco colores distintos. Uno de los posibles dibujos de Alfredo es el siguiente, donde los aros 2 y 4 los intercambió a como debería ser y los aros 3 y 5 también. En este dibujo, el orden de los colores los hizo correctamente (pero él no lo sabe).




¿Cuántos dibujos de aros olímpicos distintos, correctos o incorrectos, puede formar Alfredo?

**Problema 2.** En el país de *Carma* los habitantes tienen algunas costumbres muy extrañas al saludarse. Si al llegar a un lugar

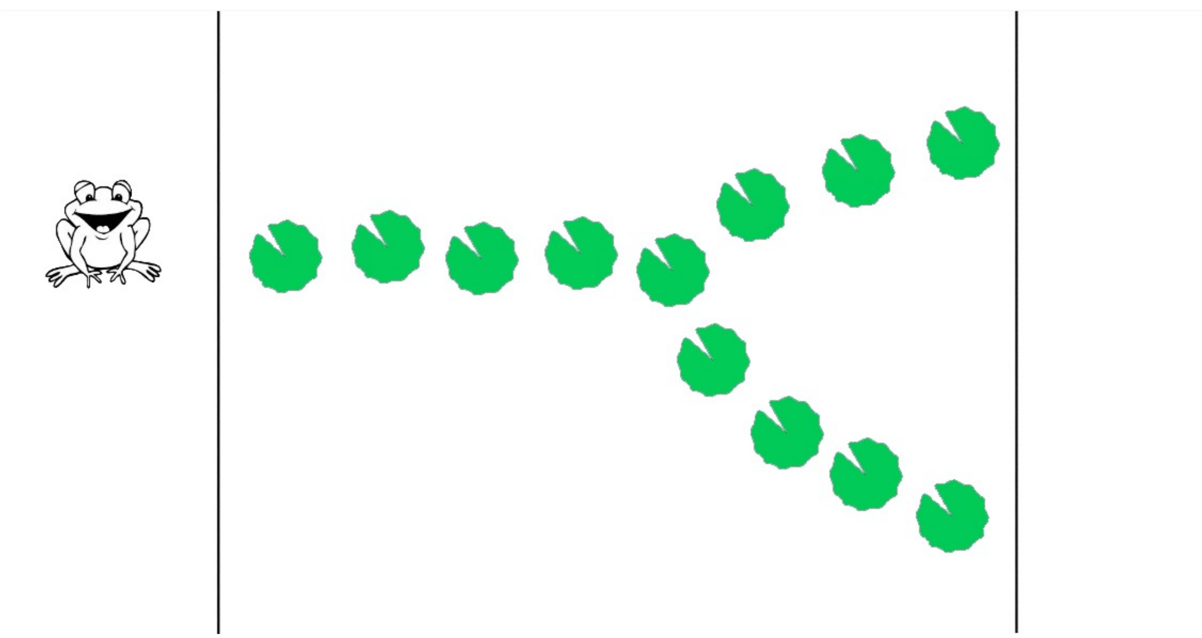
- hay 1 o 2 personas: estrechas tu mano 4 veces con cada persona de tu mismo sexo y 3 veces si es del sexo opuesto.
- hay 3 o 4 personas: estrechas 3 veces tu mano con cada persona de tu mismo sexo y 2 veces si es del sexo opuesto.
- hay 5 o más personas: estrechas tu mano 2 veces con cada persona de tu mismo sexo y una vez si es del sexo opuesto.

Alberto hace una fiesta en su casa, primero llega Beto y se saludan. Después llega Ceci y saluda a sus dos compañeros, después llega Diego y saluda a sus 3 amigos. Después llegó alguien de quién no tomamos su nombre pero sabemos que saludó a sus cuatro compañeros. Finalmente, llegó Fátima y saludó a las cinco personas que llegaron antes que ella. En total, hubo 35 apretones de mano, ¿cuántos apretones de mano dio Fátima?

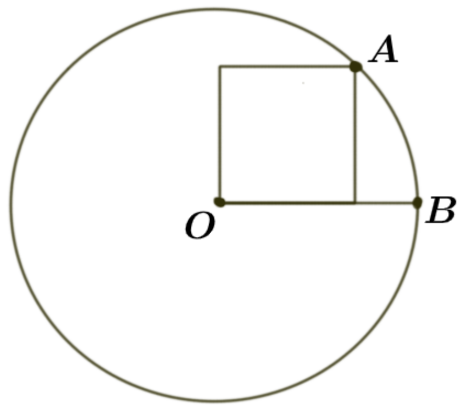
**Problema 3.** En cada cuadradito de un tablero de $3 \times 3$ cuadrados se escribe un entero. Decimos que este cuadrado de $3 \times 3$ es *tranquilo* si cada número tiene la misma paridad que la suma de los cuadrados con los que comparte un lado. ¿Cuál es la máxima cantidad de números impares que puede tener un cuadrado tranquilo?

Nota: La paridad de un número es decir si es par o impar. Por ejemplo, el 7 es impar, el 12 es par.

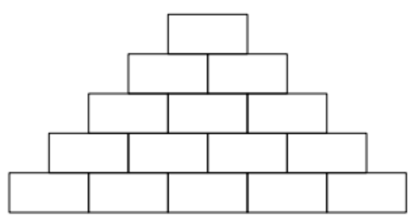
**Problema 4.** La rana Irene quiere pasar de un lado del río al otro, saltando sobre los lirios. En cada salto puede moverse 1 o 2 lirios hacia delante. Hay un punto donde el camino de lirios se divide en dos y debe decidir si continúa por la derecha o la izquierda. ¿De cuántas maneras distintas puede llegar saltando al otro lado del río?



**Problema 5.** En la figura se tiene un círculo de centro $O$ y radio $OA$. También un cuadrado con $OA$ como diagonal. Se extiende uno de los lados del cuadrado hasta que corte al círculo en un punto $B$. La longitud del arco $AB$ es de $505\pi$ unidades. Calcula la medida del radio del círculo.




**Problema 6.** En la figura se muestra una pirámide de cinco niveles. El gran rey de *Carma* ha diseñado una pirámide igual pero con seis pisos en lugar de cinco, donde colocará un número entero en cada ladrillo. Al principio, escoge un par de ladrillos y coloca en uno de ellos el 16 y en otro el 17. Después coloca algunos números en el primer nivel, según su voluntad, y a partir de allí, el número escrito en cada ladrillo (inclusive los dos ya escritos) es la multiplicación de los dos números que tiene debajo de él. Por ejemplo, si debajo de un ladrillo estuvieran el 3 y el 5, debe escribirse el 15. ¿De cuántas maneras puede escoger el rey el primer par de ladrillos de manera que este procedimiento sea posible?



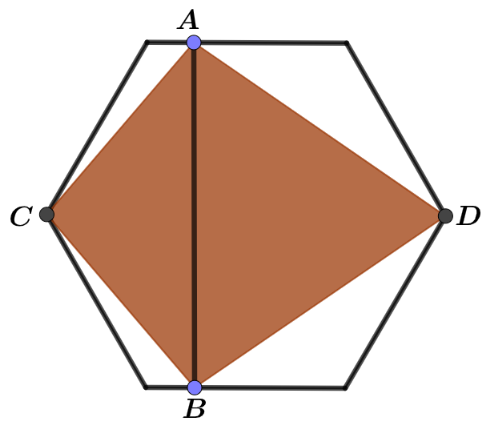
# Nivel Dos

**Problema 1.** En el país de *Carma* los habitantes tienen algunas costumbres muy extrañas al saludarse. Si al llegar a un lugar

- hay 1 o 2 personas: estrechas tu mano 4 veces con cada persona de tu mismo sexo y 3 veces si es del sexo opuesto.
- hay 3 o 4 personas: estrechas 3 veces tu mano con cada persona de tu mismo sexo y 2 veces si es del sexo opuesto.
- hay 5 o más personas: estrechas tu mano 2 veces con cada persona de tu mismo sexo y una vez si es del sexo opuesto.

Alberto hace una fiesta en su casa, primero llega Beto y se saludan. Después llega Ceci y saluda a sus dos compañeros, después llega Diego y saluda a sus 3 amigos. Después llegó alguien de quién no tomamos su nombre pero sabemos que saludó a sus cuatro compañeros. Finalmente, llegó Fátima y saludó a las cinco personas que llegaron antes que ella. En total, hubo 35 apretones de mano, ¿cuántos apretones de mano dió Fátima?

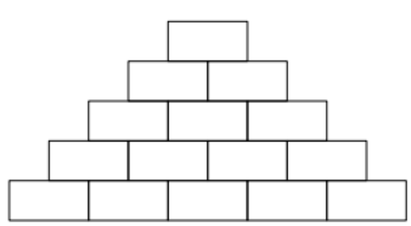
**Problema 2.** En la figura tenemos un hexágono regular. En el lado de *arriba*, se elige un punto $A$ arbitrario y después un punto $B$, de manera que $AB$ sea perpendicular a estos segmentos. Los puntos $C$ y $D$ son vértices opuestos en el hexágono. Si el área de todo el hexágono es 2020 unidades cuadradas, ¿cuál es el área del cuadrilátero $ADBC$?




**Problema 3.** ¿Cuántos números hay tales que tienen exactamente catorce dígitos, son múltiplos de 99 y sus dígitos son únicamente 3's y 7's?

**Problema 4.** Uma, Valentina, Waniela, Xamila, Yareli y Zaira eligen, cada una, un número del 1 al 9, pudiendo repetir. Luego, calculan la suma de los 6 números. ¿De cuántas maneras posibles pueden elegir números para que la suma sea múltiplo de 3?

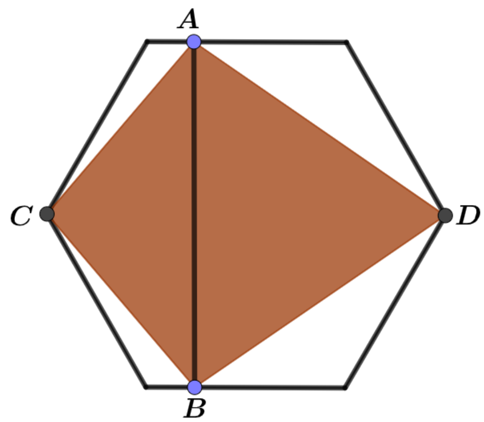
**Problema 5.** En la figura se muestra una pirámide de cinco niveles. El gran rey de *Carma* ha diseñado una pirámide igual pero con seis pisos en lugar de cinco, donde colocará un número entero en cada ladrillo. Al principio, escoge un par de ladrillos y coloca en uno de ellos el 16 y en otro el 17. Después coloca algunos números en el primer nivel, según su voluntad, y a partir de allí, el número escrito en cada ladrillo (inclusive los dos ya escritos) es la multiplicación de los dos números que tiene debajo de él. Por ejemplo, si debajo de un ladrillo estuvieran el 3 y el 5, debe escribirse el 15. ¿De cuántas maneras puede escoger el rey el primer par de ladrillos de manera que este procedimiento sea posible?



**Problema 6.** Sean $\alpha$ y $\beta$ dos circunferencias de centros $O$ y $P$, respectivamente, y radio $OP$ ambas. Uno de los puntos donde se intersecan estas circunferencias es $A$. La recta $AP$ corta a $\beta$ en $B$ y la recta $OB$ interseca a $\alpha$ en $C$. Finalmente la recta $CP$ interseca a $\beta$ en $D$. Calcula la medida del $\angle CDO$.

## Nivel Tres

**Problema 1.** En la figura tenemos un hexágono regular. En el lado de *arriba*, se elige un punto $A$ arbitrario y después un punto $B$, de manera que $AB$ sea perpendicular a estos segmentos. Los puntos $C$ y $D$ son vértices opuestos en el hexágono. Si el área de todo el hexágono es 2020 unidades cuadradas, ¿cuál es el área del cuadrilátero $ADBC$?




**Problema 2.** En la fila de la taquilla del teatro están formadas 10 personas con un billete de 50 pesos cada una y 3 con uno de 100 pesos cada una. El boleto cuesta 50 pesos y la caja está vacía al empezar la venta de boletos. (Nota: las personas en la fila sólo se distinguen por el tipo de billete que traen, y cada una trae exactamente un billete.) ¿De cuántas maneras distintas se pueden ordenar en la fila para que a la gente siempre se le pueda entregar cambio exacto?

**Problema 3.** Decimos que una pareja de enteros positivos $(a, b)$ es *elegante* si ambos son divisores de $2020^3$ y su producto $ab$ es múltiplo de $2020^3$. Encuentra cuántas parejas elegantes existen.

**Problema 4.** Sean $\alpha$ y $\beta$ dos circunferencias de centros $O$ y $P$, respectivamente, y radio $OP$ ambas. Uno de los puntos donde se intersecan estas circunferencias es $A$. La recta $AP$ corta a $\beta$ en $B$ y la recta $OB$ interseca a $\alpha$ en $C$. Finalmente la recta $CP$ interseca a $\beta$ en $D$. Calcula la medida del $\angle CDO$.

**Problema 5.** Sea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2020\}$. Para cada subconjunto de $A$, de diez o menos elementos, calculamos el promedio de sus elementos y el resultado lo colocamos en otro conjunto $B$. ¿Cuántos elementos distintos tiene $B$?

**Problema 6.** Para cada entero positivo $n$ calculamos la suma de sus dígitos en posición par y la suma de sus dígitos en posición impar. Después calculamos la resta que sea no negativa de estos dos números. Si el resultado es mayor que cero y $n$ es múltiplo de este resultado, decimos que $n$ es *colorido*. Demuestra que entre cualesquiera 22 números consecutivos todos ellos menores que 6000, hay uno que es colorido.

# Nivel Cuatro

**Problema 1.** En la fila de la taquilla del teatro están formadas 10 personas con un billete de 50 pesos cada una y 3 con uno de 100 pesos cada una. El boleto cuesta 50 pesos y la caja está vacía al empezar la venta de boletos. (Nota: las personas en la fila sólo se distinguen por el tipo de billete que traen, y cada una trae exactamente un billete.) ¿De cuántas maneras distintas se pueden ordenar en la fila para que a la gente siempre se le pueda entregar cambio exacto?

**Problema 2.** Encuentra todas las ternas de números primos $(p, q, r)$ que satisfagan las siguientes condiciones al mismo tiempo:

- $pq + 1 = (p + 1)(p + 2)r$
- $43(44 + p) = pq + 2$.

**Problema 3.** Sean $\alpha$ y $\beta$ dos circunferencias que se intersecan en los puntos $A$ y $B$. El centro de $\alpha$ es $O$ y $\beta$ tiene un radio de 20 unidades. Sea $\gamma$ una circunferencia de centro $P$ y radio 13 que tiene las siguientes características:

- $O$ está en $\gamma$,
- $OP$ es paralela a $AB$,
- $\gamma$ es tangente a $AB$.

La circunferencia $\gamma$ interseca a $\beta$ en los puntos $C$ y $D$ y la longitud del segmento $CD$ es 24. Calcula el área de $\alpha$.

**Problema 4.** Sea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2020\}$. Para cada subconjunto de $A$, de diez o menos elementos, calculamos el promedio de sus elementos y el resultado lo colocamos en otro conjunto $B$. ¿Cuántos elementos distintos tiene $B$?

**Problema 5.** Encuentra todos los enteros positivos $n$ para los cuales el mayor entero menor que $\frac{2^n}{7}$ es un número primo.

**Problema 6.** Sea $ABC$ un triángulo de incentro $I$ con $BC = a$ y $AB = AC = b$. La recta $\ell$ es la perpendicular a $AC$ por $C$. Los puntos $D$ y $E$ están sobre la recta $\ell$ de manera que $BC$ pase por el punto medio de $AD$ y $AE$ sea paralela a $BC$. Los puntos distintos $P$ y $Q$ son tales que $AI$ es la recta de Euler de los triángulos $\Delta DEP$ y $\Delta DEQ$. Calcula la longitud del segmento $PQ$ en términos de $a$ y $b$.
**Nota:** La recta de Euler de un triángulo es la recta que une a su ortocentro con su circuncentro.

# Soluciones a los Problemas

## Nivel Uno

**Solución Problema 1.** El número de los anillos es usado por referencia, de modo que es fijo, así como la posición de los anillos. Lo que cambia es el orden de los colores y la manera en que los anillos 1 y 4, 4 y 2, 2 y 5, 5 y 3 se entrelazan.

Los colores pueden ordenarse de $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ maneras distintas, pensando que el primero puede ser cualquiera de los 5 colores disponibles, el segundo cualquiera de los 4 restantes y así sucesivamente.

Para la manera en que se entrelazan los anillos, consideramos dos opciones válidas: (1) 1 pasa por arriba y luego por abajo de 4, o 1 pasa por abajo y luego por arriba de 4; (2) además de las dos anteriores, 1 pasa por arriba y por arriba de 4, o 1 pasa por abajo y por abajo de 4. Es decir, consideramos correcto tanto 2 como 4 opciones.

Luego, las dos respuestas posibles son: (1) $120\, times 2^4$, (2) $120 \times 4^4$.

**Solución Problema 2.** Consideramos dos casos: cuando la persona que llega después de Diego es niño (digamos, Emilio) y cuando es niña (digamos, Elisa).

En ambos casos, Beto saludó solo a Alberto. Es 1 persona, así que aplica la regla 1, son 4 saludos. Ceci, que es niña, saludó a Alberto y a Beto. Son 2 personas, así que aplica la regla 1, son $3 + 3 = 6$ saludos. Diego saludó a Alberto, a Beto y a Ceci. Son 3 personas, así que aplica la regla 2, son $3+3+2 = 8$ saludos. (1) Emilio saludó a Alberto, Beto, Ceci y Diego. Son 4 personas, así que aplica la regla 2, son $3 + 3 + 2 + 3 = 11$ saludos. (2) Elisa saludó a Alberto, Beto, Ceci y Diego. Son 4 personas, así que aplica la regla 2, son $2+2+3+2 = 9$ saludos. Fátima saludó a Alberto, Beto, Ceci, Diego y (1) Emilio o (2) Elisa. son 5 personas, así que aplica la regla 3 y son (1) $1+1+2+1+1 = 6$ saludos, o (2) $1 + 1 + 2 + 1 + 2 = 7$ saludos.

Si sumamos todos los saludos tenemos (1) $4+6+8+11+6 = 35$ saludos con Emilio y (2) $4 + 6 + 8 + 9 + 7 = 34$ saludos con Elisa. Como sabemos que hubo en total 35, entonces la quinta persona es niño (Emilio) y Fátima dio en total 6 saludos.

**Solución Problema 3.** Pintemos el tablero como un tablero de ajedrez con mayoria de blancos. Enseguida enumeremos las casillas de manera regular con los números del 1 al 9. Haremos varios casos sobre la cantidad de impares en las casillas negras, si todos los cuadrados negros tienen impares entonces todos los cuadrados blancos tienen pares y eso implicaría que los cuadrados negros tienen sólo pares, contradicción. Si en los cuadrados negros hay un par y tres impares (no importa donde esté el par, pues son análogos) digamos que el par está en el cuadrado 2. En el cuadrado 5 debe haber un impar, en los cuadrados 1 y 3 debe haber impares. Esto implicaria que en el cuadrado dos hay un impar, contradicción. Si en los cuadrados negros hay dos dos pares y dos impares, hay dos casos: Que los impares estén en cuadrados que comparten un vértice o que estén en cuadrados que no compartan vértice. En el primer caso podemos suponer que los impares estén en los cuadrados 6 y 8. De esta manera en el cuadrado 5 hay un par, en el tres hay un impar y en el uno hay un par. Esto implicaria que en el dos hay un impar, contradicción. En el segundo caso podemos suponer que los impares están en los cuadrados 2 y 8. De este modo en el cuadrado cinco hay un par, en el 1 y 3 hay impares y esto implicaria que en el dos hay un impar, contradicción. Siguiendo de esta manera, revisemos el caso en el que en los cuadrados negros hay tres impares y un par. El par lo podemos poner donde sea pues los casos análogos, diamos que está en el cuadrado 6. De esta manera en los cuadrados 3,5 y 9 debe haber números impares y por lo tanto en el cuadrado 6 debe haber un número impar, contradicción. Finalmente en el caso en el que en todos los cuadrados negros hay pares, implica que en todos los cuadrados blancos también hay pares y esto no crea contradicción. Por ejemplo, podemos colocar en todas las casillas un cero y este será un cuadrado tranquilo. En conclusión, la máxima cantidad de números impares que puede tener un cuadrado tranquilo es cero.

**Solución Problema 4.** Solución recursiva: A cada lirio le asignamos un número que cuenta la cantidad de maneras de llegar a él. Como la rana debe separarse en algún momento, es posible considerar el problema como si fueran dos: un camino con 8 lirios y uno con 9.

Como la rana puede saltar 1 o 2 lirios hacia adelante, entonces, a partir del tercer lirio es posible llegar desde los dos anteriores, de manera que para obtener el número de cualquier lirio basta con sumar los números de los dos anteriores.

El número del primer lirio es 1, el número del segundo lirio es 2. Luego, la sucesión es $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$ maneras de llegar a la otra orilla usando el camino de 8 lirios, y $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89$ maneras de llegar a la otra orilla usando el camino de 9 lirios. (No basta con llegar al último lirio, hay que cruzar hasta la otra orilla.)

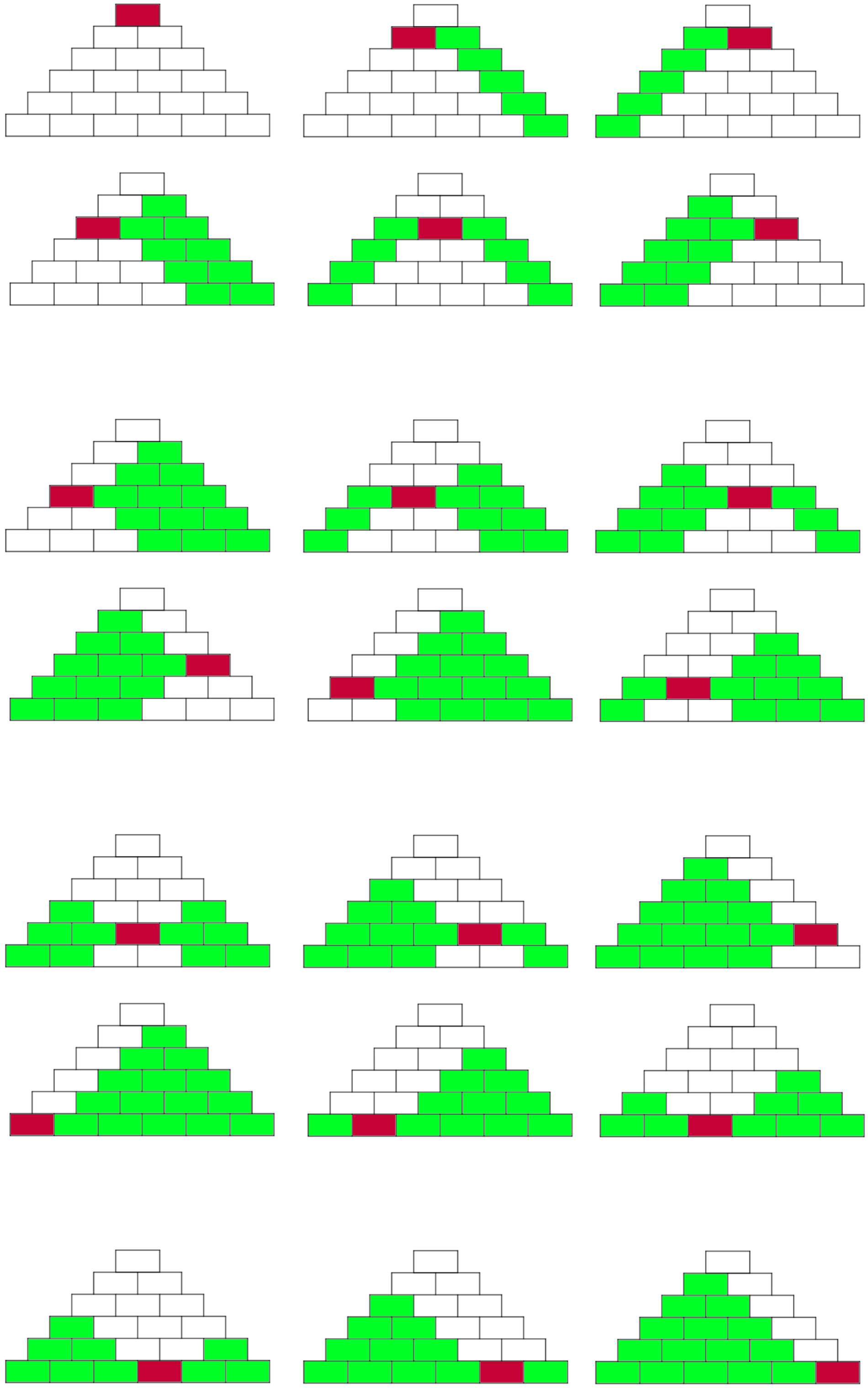
Luego, en total son $55 + 89 = 144$ maneras de cruzar el río.

**Solución Problema 5.** Como $OA$ es la diagonal de un cuadrado, el ángulo $\angle AOB$ mide 45 grados. Como $\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$, entonces el arco $OB$ representa un octavo de la circunferencia. Es decir, el perímetro es $8 \times 505\pi = 4040\pi$.

Como la fórmula del perímetro de un círculo es $2\pi r$, donde $r$ es el radio, entonces $2\pi r = 4040\pi$, $2r = 4040$, $r = 2020$.

**Solución Problema 6.** Los números 16 y 17 no comparten factores, así que no es posible que uno esté debajo del otro, ni inmediatamente abajo ni en algún nivel inferior. Esto forma una pirámide “debajo” y una pirámide invertida “arriba”

Vamos a colocar el 16 en cada uno de los ladrillos y contar los ladrillos en los que podría estar el 17. Como estamos considerando todas las posibles ubicaciones del 16, este proceso concluiría el problema. En cada una de las siguientes imágenes, el ladrillo con el 16 va a estar sombreado oscuro (rojo) y los ladrillos donde podría ir el 17 estarán sombreados claro (verde). Los ladrillos en blanco serían las posiciones donde NO puede ir el ladrillo 17.



Lo único que resta es contar los cuadritos verdes, que son 210.

# Nivel Dos

**Solución Problema 1.** Ver solución al Problema 1, Nivel 1.

**Solución Problema 2.** Sabemos que el área de un hexágono regular se calcula como $\frac{6la}{2} = 3la$ donde $l$ es la medida del lado y $a$ es la medida del apotema. Trazando las diagonales del hexágono regular, es fácil convencernos de que $CD = 2l$, pues las diagonales dividen al hexágono en seis triángulos equiláteros y congruentes entre sí. Además, como $AB$ es perpendicular a los lados, entonces $AB = 2a$.

Luego, el área del cuadrilátero $ABCD$ se puede calcular como $\frac{AB \times CD}{2} = \frac{2l \times 2a}{2} = 2al$.

Sabiendo que $3al = 2020$, entonces $2al = \frac{4040}{3}$.

**Solución Problema 3.** Para que un número sea múltiplo de 99 debe ser múltiplo de 9 y de 11. Para que cumpla el criterio del 9, es necesario que la suma de los dígitos sea múltiplo de 9. Sabiendo que hay en total 14 dígitos, tenemos que la suma se puede calcular como $7x+3(14-x) = 4x+42$. Para que sea múltiplo de 9, se necesita $x = 2, 11$.

Si $x = 11$, entonces hay tres dígitos 3. Luego, las posibles sumas en posiciones pares e impares son 77 y 65, 73 y 69. Las diferencias son 12 y 4, que no es múltiplo de 11.

Si $x = 2$, entonces hay dos dígitos 7. Luego, las posibles sumas en posiciones pares e impares son 33 y 41, 37 y 37. Las diferencias son 8 y 0. Únicamente 0 es múltiplo de 11.

Luego, obtenemos lo que queremos si hay 12 dígitos 3 y 2 dígitos 7, con un dígito 7 en posición par y otro en posición impar. Es decir, hay $7 \times 7 = 49$ números que cumplen lo que buscamos.

**Solución Problema 4.** Dejemos que Uma, Valentina, Waniela, Xamila y Yareli escogan su número libremente. Como cada una tiene 9 opciones, esto da un total de $9^5$ combinaciones posibles. Sea $S$ la suma de los cinco números que eligieron.

(1) Si $S \equiv 0(mod3)$, entonces Zaira puede decir cualquiera de 3, 6, 9 y $S$ seguirá siendo múltiplo de 3. (2) Si $S \equiv 1(mod3)$, entonces Zaira puede decir cualquiera de 2, 5, 8 y $S$ será un múltiplo de 3. (3) Si $S \equiv 2(mod3)$, entonces Zaira puede decir cualquiera de 1, 4, 7 y $S$ será un múltiplo de 3.

Luego, independientemente de las primeras cinco elecciones, Zaira siempre tiene 3 opciones. Por lo tanto, hay $3 \times 9^5 = 3^1 1$ maneras distintas en que las seis niñas pueden elegir un número de manera que la suma sea múltiplo de 3.

**Solución Problema 5.** Ver solución al Problema 6, Nivel 1.

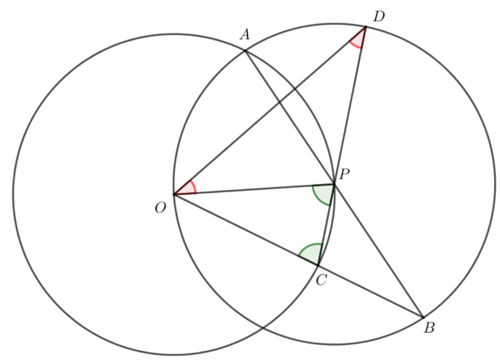
**Solución Problema 6.** Hay 4 distintas configuraciones para este problema. Esto se debe a que hay dos intersecciones entre $\alpha$ y la recta $\overline{OB}$, y dos más entre $\beta$ y la recta $\overline{CP}$. Independientemente de eso, se satisface que $\triangle AOP$ es un triángulo equilátero. Esto se debe a que ambas circunferencias tienene el mismo radio $OP$. Luego $OA = OP$ por ser radios de $\alpha$ y $AP = OP$ por ser radios de $\beta$.

**Configuración 1:** En este caso $C$ está entre $O$ y $B$, y $P$ está entre $C$ y $D$. Los triángulos $\triangle OPB$ y $\triangle OPC$ son isósceles, con parejas de lados iguales a radios de los círculos. Observamos también que $\angle APO$ es ángulo externo del triángulo $\triangle OPB$, por lo que

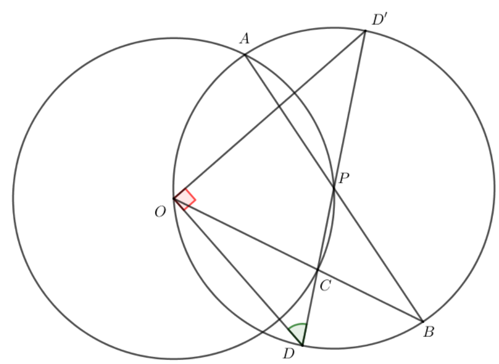
$$60^\circ = \angle APO = \angle POB + \angle PBO.$$

Por tanto $\angle POC = \angle POB = 30^\circ$. Como $\angle OPC = \angle OCP$, se sigue que cada uno de ellos mide $\frac{180^\circ - \angle POC}{2} = \frac{150\circ}{2} = 75^\circ$.

Finalmente, $\angle OPC$ es el ángulo central que subtiende el mismo arco que el ángulo semiinscrito $\angle CDO$. Por lo tanto $\angle CDO = \frac{75^\circ}{2} = 37{,}5$.



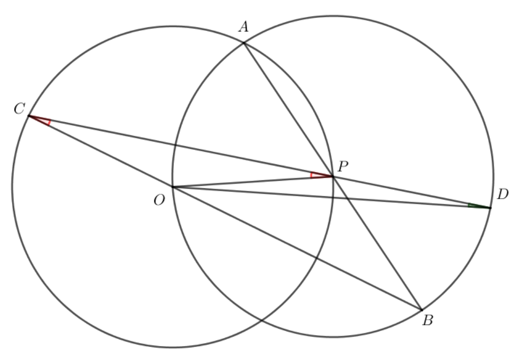

**Configuración 2:** En este caso $C$ está entre $O$ y $B$, y $C$ está entre $P$ y $D$. Definimos




el punto $D'$ como la segunda intersección de $\overline{CP}$ con $\beta$. Como la cuerda $DD'$ pasa por $P$, el centro de $\beta$, entonces $\angle D'OD = 90°$. Como calculamos en la configuración 2, $\angle OD'D = 37{,}5°$. Por lo tanto

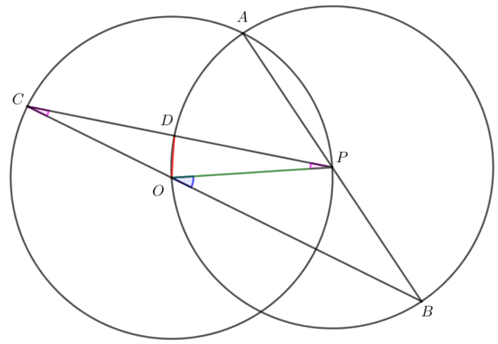
$$\begin{aligned}\angle CDO &= \angle D'DO\\ &= 180° - 90° - 37{,}5°\\ &= 52{,}5°.\end{aligned}$$

**Configuración 3:** En este caso $O$ está entre $C$ y $B$, y $P$ está entre $C$ y $D$. Como




calculamos en la configuración 1, $\angle POB = 30°$. Además, al ser un ángulo exterior de $\triangle COP$, sabemos que $\angle OCP = \angle OPC = 15°$, pues $\triangle OPC$ es isósceles. Finalmente, Una vez más se tiene que $\angle OPC$ es exterior del triángulo $\triangle OPD$, que también es un triángulo isósceles. Con ello $\angle POD = \angle CDO = 7{,}5°$.

**Configuración 4:** En este caso $O$ está entre $C$ y $B$, y $P$ está entre $C$ y $D$. Como




vimos en la solución anterior, $\angle OPC = 15°$. Notemos que $\triangle ODP$ es isósceles y por tanto

$$\angle ODP = \angle DOP = \frac{180° - 15°}{2} = 82{,}5°.$$

Finalmente, $\angle CDO$ es suplementario a uno de los anteriores ($\angle ODP$). Así que $\angle CDO =$ 97,5

# Nivel Tres

**Solución Problema 1.** solución al Problema 1, Nivel 2.

**Solución Problema 2.** Vamos a separar en 4 casos distintos, según la distribución de las personas con el billete de 100 pesos: (1) llegan las 3 juntas, (2) llegan las 3 separadas, (3) llegan 2 y 1, (4) llegan 1 y 2. Usaremos separadores para cada caso y representaremos una persona con billete de 50 pesos como $o$ y una persona con billete de 100 pesos como $x$.

(1) El acomodo base es *oooxxx*; los primeros $o$ garantizan que las personas reciben su cambio. Falta acomodar siete $o$ con un solo separador. Luego, son $\binom{8}{1} = 8$ acomodos.

(2) El acomodo base es *oxoxox*; el primer $o$ garantiza que la primera $x$ recibe su cambio, los otros dos ponen distancia entre personas. Luego, falta acomodar siete $o$ con tres separadores. Luego, son $\binom{10}{3} = 120$ acomodos.

(3) El acomodo base es *ooxxox*. Falta acomodar siete $o$ con dos separadores. Luego, son $\binom{9}{2} = 36$ acomodos.

(4) El acomodo base es *oxoxx*. Falta acomodar ocho $o$ con dos separadores. Luego, son $\binom{10}{2} = 45$ acomodos. Sin embargo, el caso *oxoxxoooooooo* no funciona y es el único que no funciona, de modo que son 44 acomodos.

En total son $8 + 120 + 36 + 44 = 208$ acomodos que cumplen.

**Solución Problema 3.** Como $a, b$ son divisores de $2020^3$, entonces sus factores primos solo pueden ser 2, 5, 101. Digamos que $a = 2^x \times 5^y \times 101^z$ y que $b = 2^m \times 5^n \times 101^p$. Como $2020^3 = 2^6 \times 5^3 \times 101^3$, entonces se cumple que $x, m \leq 6, y, n, z, p \leq 3$. Además, $ab = 2^(x + m) \times 5^(y + n) \times 101^(z + p)$ y, como es múltiplo de $2020^3$, tenemos que $x + m \geq 6, y + n, z + p \geq 3$.

Procedemos por casos. Si $x = 0$, entonces, para cumplir ambas desigualdades simultáneamente, tenemos que $m = 6$. Si $x = 1$ entonces $m = 6, 5$. Si $x = 2$ entonces $m = 6, 5, 4$ y así sucesivamente para un total de $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ casos posibles. Si $y = 0$, entonces, para cumplir ambas desigualdades simultáneamente, tenemos que $n = 3$. Si $y = 1$ entonces $n = 3, 2$. Si $y = 2$ entonces $n = 3, 2, 1$. Finalmente, si $y = 3$ entonces $n = 3, 2, 1, 0$ para un total de $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ casos posibles. Este caso es análogo al de $z, p$. Luego, hay 28 maneras de elegir la pareja $(x, m)$, 10 maneras de elegir la pareja $(y, n)$ y 10 maneras de elegir la pareja $(z, p)$ para un total de $28 \times 10 \times 10 = 2800$ parejas $(a, b)$ distintas que cumplen lo que pide el problema.

**Solución Problema 4.** Ver solución de Nivel 2, problema 6.

**Solución Problema 5.** Para cada suma posible $S$ de $n$ elementos, escribimos su promedio como $\frac{S}{n}$. Para $n > 1$, si dicha fracción es irreducible, entonces ese promedio ya aparece en el conjunto $B$. Luego, queremos contar únicamente los primos relativos en el rango de la menor y la mayor suma posible con $n$ elementos, pues todas las sumas intermedias son posibles.

- Para $n = 1$, los naturales de 1 a 2020 están todos en $B$. Cabe destacar que cualquier otro promedio posible será un racional en este intervalo.

- Para $n = 2$, la menor suma es $1 + 2 = 3$ y la mayor suma es $2020 + 2019 = 4039$. Como $\frac{3}{2} = 1{,}5$ y $\frac{4039}{2} = 2019{,}5$, todos los “medios” desde 1,5 hasta 2019,5 están en el conjunto.

- Para $n = 3$, la menor suma es $1+2+3 = 6$ y la mayor suma es $2020+2019+2018 = 6057$. Como $\frac{6}{2} = 2$ y $\frac{6057}{3} = 2019$, todos los “tercios” desde 2,333 hasta 2019,666 están en el conjunto.

- Para $n = 4$, la menor suma es $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ y la mayor suma es $2020 + 2019 + 2018 + 2017 = 8074$. Como $\frac{10}{4} = 2{,}5$ y $\frac{8074}{4} = 2018{,}5$, todos los “cuartos” desde 2,75 hasta 2018,25 están en el conjunto. En particular, todos los medios ya estaban en el conjunto.

- Para $n = 5$, la menor suma es $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ y la mayor suma es $2020 + 2019 + 2018 + 2017 + 2016 = 10090$. Como $\frac{15}{5} = 3$ y $\frac{10090}{5} = 2018$, todos los “quintos” desde 3,2 hasta 2017,8 están en el conjunto.

- Para $n = 6$, la menor suma es $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ y la mayor suma es $2020+2019+2018+2017+2016+2015 = 12105$. Como $\frac{21}{6} = 3{,}5$ y $\frac{12105}{6} = 2017{,}5$, entonces todos los “sextos” desde 3,8333 hasta 2017,1666 están en el conjunto. En particular, los medios y tercios ya estaban en el conjunto.

- Para $n = 7$ la menor suma es $1 + 2 + \cdots + 7 = 28$ y la mayor suma es $2020 + 2019 + \cdots + 2014 = 14119$. Como $\frac{21}{7} = 4$ y $\frac{14119}{2017}$, entonces todos los séptimos desde 4,1428 hasta 2016,8571 están en el conjunto.

- Para $n = 8$ la menor suma es $1 + 2 + \cdots + 8 = 36$ y la mayor suma es $2020 + 2019 + \cdots + 2013 = 16132$. Como $\frac{36}{8} = 4{,}5$ y $\frac{16132}{8} = 2016{,}5$, entonces todos los octavos desde 4,625 hasta 2016,375 están en el conjunto. En particular, medios y cuartos ya estaban en el conjunto.

- Para $n = 9$, la menor suma es $1 + 2 + \cdots + 9 = 45$ y la mayor suma es $2020 + 2019 + \cdots + 2012 = 18144$. Como $\frac{45}{9} = 5$ y $\frac{18144}{9} = 2016$, todos los novenos desde 5,111 hasta 2015,888 están en el conjunto. En particular, los tercios ya estaban en el conjunto.

- Para $n = 10$, la menor suma es $1 + 2 + \cdots + 10 = 55$ y la mayor suma es $2020+2019+\cdots+2011 = 20155$. Como $\frac{55}{10} = 5{,}5$ y $\frac{20155}{5} = 2015{,}5$, entonces todos los décimos desde 5,6 hasta 2015,4 están en el conjunto. En particular, los medios y los quintos ya estaban en el conjunto.

Como podemos observar, cada vez que $n$ aumenta en 1, el intervalo se reduce en 1 también, exactamente $\frac{1}{2}$ de cada extremo. Todas las fracciones en ese intervalo, con $n$ como denominador, están en $B$.

Hagamos una lista:

- Entre 1 y 2 hay 1 entero y 1 medio.

- Entre 2 y 3 hay 1 entero, 1 medio, 2 tercios y 1 cuarto.

- Entre 3 y 4 hay 1 entero, 1 medio, 2 tercios, 2 cuartos, 4 quintos y 1 sexto.

- Entre 4 y 5 hay 1 entero, 1 medio, 2 tercios, 2 cuartos, 4 quintos, 2 sextos, 6 séptimos y 2 octavos.

- Entre 5 y 6 hay 1 entero, 1 medio, 2 tercios, 2 cuartos, 4 quintos, 2 sextos, 6 séptimos, 4 octavos, 6 novenos y 2 décimos.

- Para cada entero entre 6 y 2015 hay 1 entero, 1 medio, 2 tercios, 2 cuartos, 4 quintos, 2 sextos, 6 séptimos, 4 octavos, 6 novenos y 4 décimos, es decir, 32 elementos. Calculamos esto de manera sencilla como $\phi(1) + \phi(2) + \cdots + \phi(10)$.

- Los demás intervalos son simétricos.

- Contamos además el 2020.

En total, hay $2(2 + 5 + 11 + 20 + 30) + 2009(32) + 1 = 64,425$ elementos en $B$.

**Solución Problema 6.** Vamos a fijarnos en los múltiplos de 11. Por criterio del 11, si $11|n, s(n) = 0 \pmod{11}$. Ahora acotamos $s(n)$. Como $n \leq 6000$, los números son de a lo más 4 cifras y $s(n) \leq (9+9) - (0+0) = 18$. Entonces, si $n|11$ y $n \leq 6000, s(n) = 0, 11$. En 22 números consecutivos, siempre hay 2 múltiplos de 11. Si uno tiene $s(n) = 11$, es colorido.

Si no, los dos tienen $s(n) = 0$, pero al menos uno de esos dos múltiplos de 11 tiene también a su sucesor y a su predecesor en los 22 consecutivos. Si el menor de los dos tiene a su sucesor y predecesor, terminamos; si no, es porque no tiene a su predecesor, y entonces es el menor de los 22, pero entonces el otro múltiplo de 11 si tiene a su predecesor y sucesor.

Nos fijamos en el que tiene sucesor y predecesor, digamos $k$. Sabemos que $s(k) = 0$. Y que al menos uno de $k - 1$ y $k + 1$ es "cas" el mismo número con $\pm 1$ en las unidades (porque no puede ser que ambos $k + 1$ y $k - 1$ lleven o quiten a las decenas y resto de cifras). Entonces alguno de los dos tiene $s(n) = 1$, y ese claramente será colorido.

# Nivel Cuatro

**Solución Problema 1.** Ver solución al Problema 2, Nivel 3.

**Solución Problema 2.** De la primera ecuación, como alguno de $p+1, p+2$ debe ser par, entonces $pq+1$ también debe ser par, de donde $p, q$ son ambos impares.

Luego, desarrollando la segunda ecuación obtenemos $1892 + 43p = pq + 2$ que es equivalente a la ecuación $1890 = p(q-43)$. Los factores primos de 1890 son 2, 3, 5, 7 y $p$ debe ser alguno de ellos, distinto de 2.

Si $p = 3$, entonces $q - 43 = 630$ y $q = 673$ que es primo. Si $p = 5$, entonces $q - 43 = 378$ y $q = 421$ que es primo. Si $p = 7$, entonces $q - 43 = 270$ y $q = 313$ que es primo.

**Solución Problema 3.** Primero recordemos el siguiente **lema**: Sean dos circunferencias que se intersectan en los puntos $X$ y $Y$. Si las circunferencias tienen centros $O_1$,$O_2$ y radios $r_1$, $r_2$, respectivamente, entonces la distancia entre los centros se puede calcular usando los radios y la cuerda común a las circunferencias. A saber:

$$O_1O_2 = \sqrt{r_1^2 - \left(\frac{XY}{2}\right)^2} + \sqrt{r_2^2 - \left(\frac{XY}{2}\right)^2}.$$

Además conviene recordar que $O_1O_2$ es la mediatriz de $XY$.

Usando el lema tenemos que

$$PQ = \sqrt{13^2 - 12^2} + \sqrt{20^2 - 12^2} = 21.$$

Por otro lado, consideremos $M$, la intersección de $OQ$ con $AB$ y $T$ el punto de tangencia de $AB$ con $\gamma$. Por el lema sabemos que $M$ es punto medio de $AB$ y que $OQ$ es mediatriz de $AB$. Además, por hipótesis sabemos que $OP \parallel AB$ y con ello $\angle POM = 90°$. Y si trazamos $PT$, que es un radio, podemos observar que también $\angle PTM = 90°$. Así $OMTP$ es un rectángulo.

Usando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo $OQP$, tenemos que $OQ^2 = 21^2 - 13^2 = 4\sqrt{17}$. Luego, como $OM = PT = 13$ y $OQ = OM + MQ$, entonces $MQ = 4\sqrt{17} - 13$.

Por el teorema de Pitágoras en $\triangle AMQ$,

$$AM^2 = AQ^2 - MQ^2 = 20^2 - (4\sqrt{17} - 13)^2.$$

Entonces, por el teorema de Pitágoras una última vez en $\triangle OAM$,

$$\begin{aligned} OA^2 &= 13^2 + AM^2 \\ &= 13^2 + 20^2 - (4\sqrt{17} - 13)^2 \\ &= 13^2 + 20^2 - (16)(17) + (8)(13\sqrt{17}) \\ &= 128 + 104\sqrt{17}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el área de $\alpha$ es igual a

$$\boxed{\pi \cdot (128 + 104\sqrt{17})}.$$

**Solución Problema 4.** Ver solución de Nivel 3, problema 5.

**Solución Problema 5. Emmanuel Buenrostro.** Queremos que $\lfloor \frac{2^n}{7} \rfloor$ sea primo. Si $n \equiv 1 \mod 3$, entonces

$$\lfloor \frac{2^n}{7} \rfloor = \frac{2^n - 2}{7} = \frac{2(2^{3k} - 1}{7},$$

y como 2 y 7 son primos relativos, esa fracción, cuando es un entero, es siempre par; si queremos que sea primo, necesitaríamos que $\frac{2^{3k}-1}{7} = 1$. Entonces $2^{3k} = 8$, de donde $k = 1$ y $n = 4$.

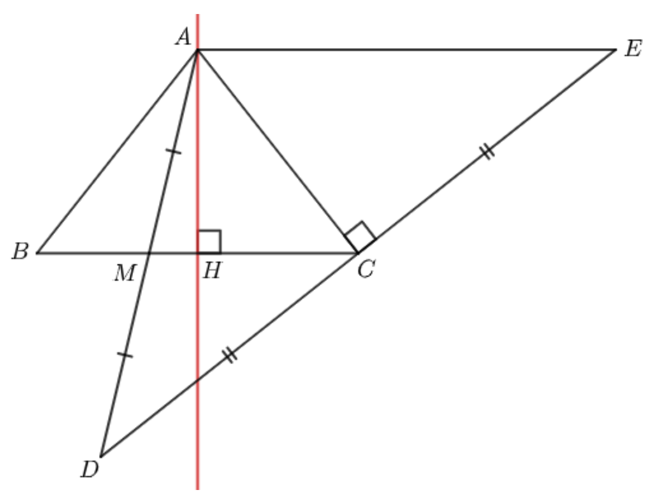
Si $n \equiv 2 \mod 3$, entonces $\lfloor \frac{2^n}{7} \rfloor = \frac{2^n-4}{7} = \frac{4(2^{3k}-1}{7}$. Similar el caso anterior, como 4 y 7 no comparten factores, la fracción es siempre múltiplo de 4 cuando es entera, por lo que no puede ser un primo.

Si $n \equiv 0 \mod 3$, entonces $\lfloor \frac{2^n}{7} \rfloor = \frac{2^{3k}-1}{7} = \frac{(2^k-1)(2^{2k}+2^k+1}{7}$. Si $2^k - 1 = 1$, entonces $k = 1$ y $\lfloor \frac{2^n}{7} \rfloor = 1$, que no es primo. Además, $2^{2k} + 2^k + 1 > 0$, entonces en $(2^k - 1)(2^{2k} + 2^k + 1)$ hay un mínimo. Si $2^k - 1 = 7$, entonces $k = 3$ y $n = 9$. Si $2^{2k} + 2^k + 1 = 7, 2^k(2^k + 1) = 6$. Como $k$ es un entero, entonces $2^k = 2, 2^k + 1 = 3$ y $k = 1$, que ya habíamos eliminado.

Por lo tanto, las dos soluciones son $n = 4$ y $n = 9$.

**Solución Problema 6.** Sea $H$ el pie de la perpendicular a $BC$ por $A$. Como $ABC$ es isósceles con $AB = AC$, sabemos que $H$ es punto medio de $BC$, y también $AH = AI$.

Primero probaremos que $A$ debe ser circuncentro de $\triangle DEP$ y $\triangle DEQ$.




Sea $M$ la intersección de $AD$ con $BC$. Sabemos que $M$ es punto medio de $AD$. Luego, como $MC \parallel AE$, por el converso del teorema del punto medio en $\triangle ADE$, $C$ es punto medio de $DE$. Además, como $AC \perp DE$, $AC$ es mediatriz de $DE$. Entonces $\triangle ADE$ es isósceles.

Más aún, sea $O_P$ el circuncentro de $\triangle DEP$. Sabemos que $O_P \in AC$, y como queremos que $AH$ sea la recta de Euler de $\triangle DEP$, $O_P \in AH$. Entonces $O_P \in AC \cap AH$.

Como $AC$ y $AH$ son dos rectas solo pueden intersecarse en 0, 1 o infinitos puntos. El primer caso no es posible porque tienen al menos una intersección ($A$). El tercer caso tampoco es posible, porque como $H$ es punto medio de $BC$ y $B \neq C$, $H$ siempre es distinto de $C$, y $AH$ siempre es distinta de $AC$. Luego, tienen exactamente una intersección. Se sigue que $O_P = A$.

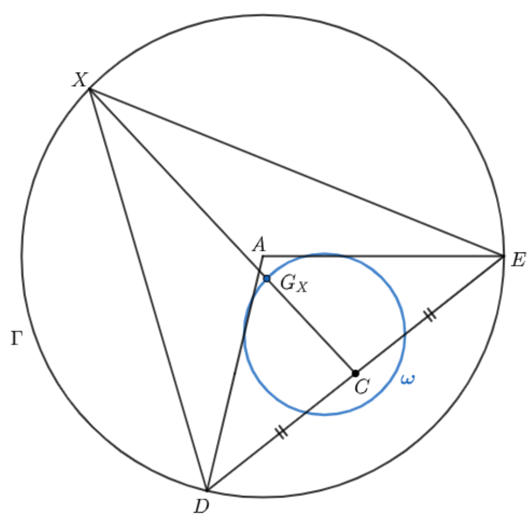
Lo mismo ocurre con $\triangle DEQ$. Entonces $A$ es circuncentro de $\triangle DEP$ y $\triangle DEQ$, como queríamos.

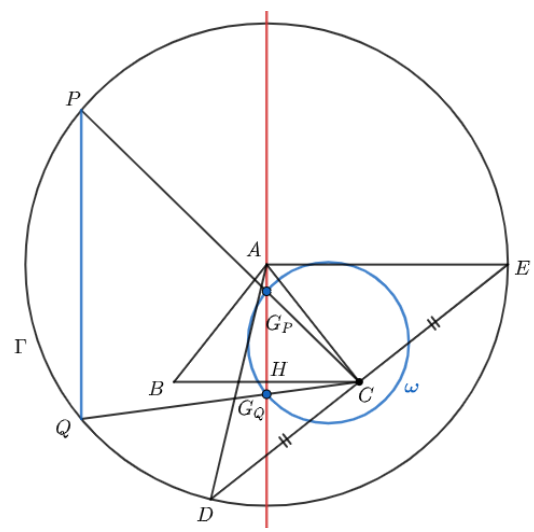
Ahora encontraremos las localizaciones posibles de $P$ y $Q$. Para esto buscaremos en $AH$ los gravicentros de los triángulos que queremos.

Sea $\Gamma$ la circunferencia con centro en $A$ y radio $AD$. Sabemos que $\Gamma$ es circuncírculo de $\triangle DEP$ y $\triangle DEQ$. Entonces $P, Q \in \Gamma$.

Sea $X$ un punto cualquiera de $\Gamma$, y $G_X$ el gravicentro de $\triangle DEX$. Como $C$ es punto medio de $DE$, $XC$ es mediana, y $G_X$ será el punto del segmento $XC$ que lo divida en razón $2:1$. Entonces para todo punto $X$ en $\Gamma$, podemos encontrar $G_X$ trazando $XC$ y dividiendo el segmento en tres partes.

Aplicando este proceso a todos los puntos de $\Gamma$ para encontrar todos los gravicentros posibles, se sigue que el lugar geométrico de todos los gravicentros de triángulos de los que $DE$ es lado, y con circuncírculo $\Gamma$, es la homotecia de $\Gamma$ con centro en $C$ y razón $\frac{1}{3}$, llamésmola $\omega$.



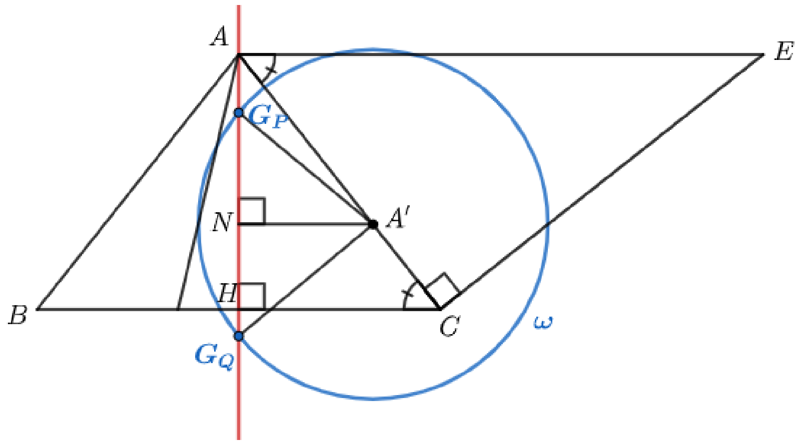




Luego, buscamos que los gravicentros de $\triangle DEP$ y $\triangle DEQ$ estén en $AH$, para que junto con el circuncírculo $A$, $AH$ sea su recta de Euler. Sabemos que todos los gravicentros posibles están en $\omega$. Entonces, sean $G_P$ y $G_Q$ las dos intersecciones de $\omega$ con $AH$. $G_P$ y $G_Q$ son los gravicentros de los triángulos que buscamos.

Con esto también podemos ubicar exactamente a $P$ y $Q$, como la intersección de $\Gamma$ con los rayos $\overrightarrow{CG_P}$ y $\overrightarrow{CG_Q}$ respectivamente. Además, por la razón de homotecia, $3G_PG_Q = PQ$, así que sólo hace falta encontrar $G_PG_Q$ para hayar la longitud que queremos.

Buscamos la longitud de una cuerda de $\omega$. Podemos hacer esto conociendo su radio y la distancia del centro a la cuerda.

Sea $A'$ tal que $3CA' = CA$. Sea $N$ el pie de la perpendicular a $AH$ por $A'$.




Como $A$ es centro de $\Gamma$, por la homotecia, sabemos que $A'$ es centro de $\omega$. Como $NA' \perp AH$ y $HC \perp AC$, $NA' \parallel HC$. Entonces por Tales:

$$\frac{NA'}{HC} = \frac{AA'}{AC} \Longrightarrow NA' = HC \cdot \frac{AA'}{AC} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{a}{3}$$

Para hayar el radio de $\omega$, hayaremos primero el radio de $\Gamma$. Recordemos que $AE$ es radio de $\Gamma$. Veamos que $\angle AHC = \angle ECA = 90^o$, y $\angle HCA = \angle CAE$ ($HC \parallel AE$). Entonces, por criterio $AA$, $\triangle AHC \sim \triangle ECA$. Por las razones de semejanza:

$$\frac{AE}{CA} = \frac{AC}{CH} \Longrightarrow AE = CA \cdot \frac{AC}{CH} = b \cdot \frac{b}{\frac{a}{2}} = \frac{2b^2}{a}$$

Por la homotecia, sabemos que el radio de $\omega$ será un tercio de esto, es decir, $\frac{2b^2}{3a}$.

Como $A'$ es centro de $\omega$ y $A'N$ es perpendicular a la cuerda $G_PG_Q$, $N$ es punto medio de $G_PG_Q$. Si calculamos $G_PN$ podemos terminar. Como $A'NH$ es triángulo rectángulo, por Pitágoras:

$$G_PN^2 + A'N^2 = A'G_P^2 \longrightarrow G_PN^2 = A'G_P^2 - A'N^2$$

$$G_PN^2 = \left(\frac{2b^2}{3a}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{4b^4}{9a^2} - \frac{a^2}{9} = \frac{4b^4 - a^4}{9a^2}$$

$$G_PN = \sqrt{\frac{4b^4 - a^4}{9a^2}} = \frac{\sqrt{4b^4 - a^4}}{3a}$$

Finalmente, usaremos $G_PN$ para calcular $PQ$. Recordemos que por la homotecia, $PQ = 3G_PG_Q$, y que $N$ es punto medio de $G_PG_Q$. Entonces tenemos que:

$$PQ = 3 \cdot G_PG_Q = 3(2 \cdot G_PN) = 3 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{4b^4 - a^4}}{3a}$$

$$PQ = \frac{2\sqrt{4b^4 - a^4}}{a}$$

Así que hemos encontrado una expresión para $PQ$ en términos de $a$ y $b$, que era lo que buscábamos.

El Centro de Alto Rendimiento en Matemáticas fue fundado en 2011 en San Luis Potosí, México. Desde entonces, nos hemos dedicado a la preparación de estudiantes, profesores y familias para distintos concursos de matemáticas, principalmente aquellos que caen bajo el paragüas de Olimpiada de Matemáticas. Hemos tenido la oportunidad de trabajar con cientos de estudiantes muy talentosos, dentro y fuera de la Olimpiada, en todo México y partes de América Latina.

En CARMA estamos comprometidos con la educación matemática, con proporcionar un espacio accesible y seguro donde todos, todas y todes puedan continuar su preparación olímpica permanente, dar sus primeros y segundos pasos en concursos, o acercarse a las matemáticas desde una perspectiva lúdica y un aprendizaje basado en problemas.

Para más información sobre CARMA: Centro de Alto Rendimiento en Matemáticas, te presentamos los siguientes enlaces:

- Cursos en https://cursos.carmaenlinea.com/
- Concursos en https://concursos.carmaenlinea.com/.
  Anualmente organizamos Olimpiada Femenil (febrero-marzo), Olimpiada Virtual de Matemáticas (agosto) y Olimpiada de Otoño (septiembre-octubre).
- Nuestra página de Facebook en http://fb.com/carmatematicas
- Nuestro canal de YouTube en https://youtube.com/carma2011
- El canal de YouTube de ugesaurio en https://www.youtube.com/ugesaurio

CENTRO DE ALTO RENDIMIENTO EN MATEMATICAS

CARMA

·2011·