Centro de Alto Rendimiento
en Matemáticas

II Olimpiada Virtual de Matemáticas: 2021

Problemas y soluciones

II Olimpiada Virtual de Matemáticas

Equipo CARMA

14 de diciembre de 2021

Diciembre 2021

Los problemas originales de este material son autoría del Equipo CARMA, a saber: Germán Puga, Cecilia Hernández, Luis Islas, Armando Moreno y Danielle Flores. Este material puede ser distribuido de manera libre porque nuestro compromiso es con la creación y divulgación de material para Olimpiada de Matemáticas; **por favor considera hacer un donativo, porque todxs tenemos que comer y pagar renta.** Por el amor de Gauss, no subas este material a Scribd ni cobres por compartirlo.

Para cualquier correción, por favor comunícate con nosotros vía Facebook o a nuestro correo electrónico en matematicascarma@gmail.com.

La primera edición de este material estuvo a cargo de Cecilia Hernández y Germán Puga.
La persona a cargo del material es Danielle Flores.

Primera edición: Noviembre 2021

Editorial Dinosaurio
San Luis Potosí, México
`matematicascarma (at) gmail (dot) com`

Si este material te ha sido útil, por favor considera apoyar nuestro proyecto editorial.
Puedes hacerlo en Patreon, comprometiendo un donativo mensual.

https://www.patreon.com/ugesaurio

También puedes hacer una donación ocasional vía PayPal.

https://www.paypal.com/paypalme/ugesaurio

O bien, mediante depósito o transferencia, a nombre de Eugenio Daniel Flores Alatorre en BBVA Bancomer, a través de su aplicación bancaria, deposito en practicaja o en cualquier Oxxo del país:

CLABE: 012700004649844474 número de tarjeta: 4152 3133 9055 2979

Introducción

La Olimpiada Virtual de Matemáticas (OVM) surge como un respetuoso homenaje hacia la Olimpiada Nacional de Matemáticas para Alumnos de Primaria y Secundaria y su 20º Concurso Nacional, que no pudo celebrarse en tiempo y forma debido a la pandemia del coronavirus. Este año, la OVM 2021 es un homenaje a la OVM 2020 Y hasta el momento, es el único concurso de Carma que mantiene un formato tipo IMO: 2 días de examen, 3 problemas cada día, 9 horas de resolución de problemas. Como ya es tradición en las competencias de CARMA, la Olimpiada Virtual estuvo dividida, según el grado académico, en las siguientes categorías:

Cuyo: 3ro de Primaria (3er año) y 4to de Primaria (4to año)
Koala: 5to de Primaria (5to año) y 6to de primaria (6to año)
Walabi: 1ro de Secundaria (7mo año) y 2do de Secundaria (8vo año)
Canguro: 3ro de Secundaria (9no) y 1ro de Bachillerato (10mo año)
Uombat: 2do de Bachillerato (11vo) y 3ro de Bachillerato (12vo año)

La II Olimpiada Virtual de Matemáticas se llevó a cabo durante el 31 de julio y 01 de agosto de este año. Con una partición de 317 estudiantes, provenientes de 4 países: México, Perú, Estados Unidos y Cuba; la participación por categoría fue la siguiente: Cuyo (29), Koala (82), Walabi (104), Canguro (76) y Uombat (26 estudiantes).

En este folleto presentamos, al igual que hacemos con las ediciones dedicadas a la Olimpiada Femenil, y la Olimpiada de Otoño, la lista de ganadores del concurso, seguida de las pruebas que presentaron los participantes y sus respectivas soluciones.

Ganadores

Como en el resto de los concursos organizados por CARMA, la II OVM entregó reconocimientos a Primer Lugar, Segundo Lugar, Tercer Lugar, Mención Honorífica y Participación en proporción 1 : 2 : 3 : 4 : 50 del total de estudiantes inscritos.

Categoría Cuyo

Primer Lugar

México	Emmanuel López Terrones	Colegio Cervantes Torreón
México	Rommel Issac Requena López	Escuela Urbana No. 35

Segundo Lugar

Perú	Rosa Loreny O. Fernandez Carrizales	Saco Oliveros
Perú	Benites Villaneva Sharon Mishel	I.E.P. Ai apaec
Perú	Andre Reynaldo Urviola Palomino	Trinomio
Perú	Verau López Geanfranco Caleb	I.E.P. Ai apaec

Tercer Lugar

Perú	Enrique Sebastian Millones Espejo	I.E.P. Ai apaec
México	Gabriel Tadeo Rivera	OMA
México	Demian Patricio Medina González	CEPAC
México	Mateo Isaí Torres Díaz	Colegio G. González Camarena
México	Diego Mateo Correa Arriaga	OMA
México	Ximena Cruz García	Prim. Prisciliano Villarreal Dávila
México	Francisco Duran	Colegio Labastida Fco. De Paula

Mención Honorífica

México	Isua Bigvai Otero Velazquez	Instituto Arnaiz
México	Alitzel Cruz de la Cruz	Olimpiada Oaxaca
México	Luis Fernando Ibarra Durán	Elvira Topete Gómez
México	Renato Benjamin Razabal Ramos	Castillo de Talentos
México	Esmeralda G. González Octaviano	OMA

México	David Fernando De La Torre Segura	Juan B. Tijerina Turno Matutino
México	Ximena Reynoso Velazquez	Colegio Axayacatl
México	Stephanie Contreras Segovia	J. Refugio Miranda Aguayo
México	Zabdi Jireh Mejia Zamora	La Escuelita 101

Categoría Koala

Primer Lugar

México	Dana Karen Medina González	Colegio Libanés Peninsular
México	Rodrigo Saldivar Mauricio	
México	Antonio Gutiérrez Meléndez	Prim. Juan Fco. Mancinas Casas
México	Angélica Montserrat Ortiz Aguilar	Colegio Euro Texcoco
México	Ian Elías Nava Roque	Macrina Vázquez

Segundo Lugar

México	Ángel de la Cruz Martínez Almeida	Primaria 23 de Junio
México	Alejandra Mireles Barron	Colegio Cervantes de Torreón
Perú	Samir Ochoa Since	Colegio Prolog
México	Luis Camilo López Tapia	Manuel González Gatica
Perú	Fabrizio Osores Gongora Nicolas	Colegio Prolog
Perú	Leonesl Joaquin Gutierrez Puma	I.E.P Tinomio
México	Ximena Loera Peña	Gral. Antonio Rosales
México	Olaf Daniel Magos Hernández	Escuelita 101
México	David Antonio Carvajal Arias	Alicia María Calderón de Avilés
Perú	Alessandra Ariana Valderrama Vigo	I.E.P. Ai apaec

Tercer Lugar

Perú	Ariana Marilyn Trujillo Gallegos	Colegio Prolog
Perú	Delia Faviana Esteban Vilchez	Colegio Prolog
Perú	Hidalgo Ascate Samuel Mathias	I.E.P. Ai apaec
México	Nicolás Fabiano Reyes Huaytalla	Colegio Prolog
México	Mayté Lozano Lozano	CEPAC Jalisco
Perú	Anderson Vladimir Cuba Barrientos	Colegio Prolog
México	Maria Alejandra Espinoza Herrera	Gral. Antonio Rosales
México	Alan Gael Villaseñor Rodriguez	Prim. Josefa Ortiz de Domínguez
México	Carlo Paolo León Legaria	Colegio Bilingüe Vista del Valle
Perú	Ángel Manuel Cuya Fierro	Colegio Prolog
México	Greta Lizeth Gutiérrez Eguino	Esc. Prim. Gral. Antonio Rosales
México	Celeste Margarita Cazarin Ortiz	Colegio AngloMéxicoicano A.C.
Perú	Jhoel Mamani	Institución Trinomio
México	Renata Perez Lira	I.E. Naciones Unidas
Perú	Joaquin Alonso Saravia Almeyda	Colegio Polog

Mención Honorífica

Perú	Camila Mercedes Jimenez Mendez	I.E.P. Ai apaec
México	Tristán Sánchez Díaz	Colegio Bochil
Perú	Alvaro Gonzalo Arcana Miranda	Instituto Trinomio
México	Keylani Renata Rust Escamilla	Adriaen Hanneman School
Perú	Maxwell Leonardo Ticona Condori	Instituto Trinomio
México	Sarai Torres Ayala	Colegio Enrique Arreguin
México	Jaime Emmanuel M. Rejon	Miguel Hidalgo
México	Guadalupe Montaño	Basilio Rojas
México	Artie Aarón Ramírez Villa	Álvaro Obregón
México	Georgina Alonso Durán	Centro Escolar Torreblanca
México	Dafne Yamilet Feria Ramírez	Colegio Bilingüe Vista del Valle
Perú	Cesar Eduardo Vilca Maravi	Colegio Prolog
México	Mia Fernanda Padilla Gutiérrez	Olimpiada Oaxaca
México	David Martínez Cortes	Benito Juárez
México	William Gabriel González Trejo	Esc. Prim. Adolfo López Mateos
México	Ana Yanitzi Cárdenas García	Sócrates
México	Yamilet Martínez Pacheco	Olimpiada Oaxaca
México	Gustavo Alejandro Becerra Cervantes	Cepac
México	América Nahiry López Ortega	Colegio Tijuana
México	Katherine Sandoval Gaxiola	Gral. Antonio Rosales
USA	Luisa Reneé Trejo Hernández	Synergy Public School
México	Daniela Samantha López Trujillo	OMA
México	Luna Gonzalez Galindo	Colegio Santee

Categoría Walabi

Primer Lugar

Perú	Rosangel Alexandra Bullon Linares	Saco oliveros
México	José Ángel Reynaga Álvarez	CEPAC Jalisco
México	Ever Juárez Quiñones	Colegio José María Lafragua
México	Angela Maria Flores Ruiz	jesusita neda
México	Camila Campos Juárez	instituto jean piaget
Perú	Jesús Martin Tasayco Pachas	Colegio Prolog LIMA
México	Trinidad Alfredo Segovia López	San Roberto International School

Segundo Lugar

Perú	Jordan Juárez Barreto	Colegio Prolog Lima
Perú	Alisson Ahilynn Moron Delgado	Colegio Prolog
México	Luis Lavariega Meneses	Olimpiada Oaxaca
México	Rafael Argumedo Solís	Instituto Educativo Ammadeus
México	Ruth Esmeralda Utrilla Verá	Secundaria 44
México	Eugenia María Cruz Pérez	Olimpiada Oaxaca
Perú	Liliana Gabriela Fernandez Carrizales	Saco Oliveros
México	Luis Israel Pool Cupul	ESP No.71 Siglo XXI
México	Luis Angel Maydana Canaza	Saco Oliveros
México	Dulce Paloma Romero Díaz	Colegio Huetamo
Perú	Roy Eduardo Yaranga Almeida	Saco Oliveros
México	Isaías Rafael López Terrones	Colegio Cervantes Torreón
México	Axel Fernandez Soto	Instituto Jean Piaget del Rio

Tercer Lugar

Perú	Adel Zaid Rivas Loayza	Prolog
Perú	Abraham Gonzalo Fajardo Incio	Saco Oliveros
México	Eva Rodríguez Muñoz	Telesecundaria 93
México	Emmanuel Buenrostro Briseño	CEPAC Jalisco
México	Julio Emmanuel Bautista Apolinar	ESG 69 Emiliano Zapata
México	Gauden Ronaldo Villaseñor Rodriguez	ESG No.55 Prisciliano Sánchez
México	Alexis Akim Ramírez Villa	EST No. 100
Perú	Valery Olivares Torres	Colegios Prolog
Perú	Diego Jefferson Rios Chavez	I.E.P. Ai apaec
México	Jireth Hernández Fuentes	EST No.4 José Agustín Arrieta
Perú	Keity Soa Lucila Valderrama Perez	I.E.P. Ai apaec
Perú	Flores Chate Felix Smith Alexander	I.E.P. Ai apaec
México	Rodrigo Alonso Benitez Martínez	Instituto Winston Churchill
México	Pedro E. Benitez Martinez	Instituto Winston Churchill
México	Mildred Ximena Lemus Barrientos	CEPIA

México	Juan Pablo Espinosa Martinez	Colegio Idaltu
México	Alejandra Ayme Anzures Castillo	Colegio Cervantes de Torreón
México	María Fernanda Maldonado Robledo	Centro Universitario del Noreste
México	José Alberto Vera Guzmán	EST No. 22
México	Yahvé Guadalupe Cruz González	EST No. 8
México	Giselle García Feria	Olimpiada Oaxaca
México	Diego Martinez Cortes	Instituto Margarita Chorne

Mención Honorífica

México	Edgar Alejandro Ayala Solís	Escuelita 101
México	Axel Rico Torres	Secundaria del Valle
México	Angélica Yazmín Carrillo Casanova	La Escuelita 101
México	Luis Nazariego Santomé	E.S.G. Benito Juarez
México	Eder Fernando	T.S.G. Lázaro Cárdenas
México	Luciano Eraña Vázquez	Instituto Potosino Marista
Perú	Angel Mathias argas Tarazona	Saco Oliveros
Perú	Valentina Jazmin Gomez Sarachaga	I.E.P. Ai apaec
México	Sayuri Ximena Rivera Araujo	CEPAC Jalisco
México	Daniel Alonso Marquez Corona	UNDL
México	Oscar Palomeque Flores	Colegio St Johns
Perú	Ruby Saravia Meza	Prolog Chincha
México	Ana Sofia Duran	Colegio Labastida Fco. de Paula
Perú	Wilson Max Chura Condori	Institución Trinomio
Perú	Reimond Miguel Condori Coaquira	Institución Trinomio de Jualiaca
México	Ana Ceci Martínez	Esc. Sec. Gral. Francisco Zarco
México	Mariana González Cepeda	Secundaria Imanti
México	Sara Maria Hurtado Gonzalez	E.S.T. No. 34
México	Juan Pablo De Lira Medina	Esc. Sec. Gral. 2
México	Luis Sergio González Cruz	José Pilar Cota Carrillo
México	Stephanie Contreras Segovia	J. Refugio Miranda Aguayo
México	Shakti Chavez San Juan	Escuela Jose Vasconcelos
México	Joseph Andrey Alvaez Reyes	Instituo Winston Churchill
México	Ana Guadalupe Báez Rovira	Éfren Ramírez Hernández
México	Marco Gabriel Panduro Grijalva	Colegio Pearson
Perú	Claudia Alexandra Barrionuevo Rivas	I.E.P. Ai apaec
México	Gibrán Amadeus Medina González	Sec. Prof. Ramón García Ruíz
Perú	Anthony Smith Suárez Chávez	Colegio Prolog

Categoría Canguro

Primer Lugar

Perú	Luis Fabian Sánchez Romero	IEP Prolog
Perú	Deivis Julian Ccancce Zapana	Institución Trinomio de Juliaca

México	Daniel Ramírez Kühn	Instituto Cervantes Apostolica
México	Sergio Alonso López García	Tomás Alva Edison
México	Maria Fernanda Montoya Lopez	Colegio Enrique Arreguín
Perú	José Perales Guevara	I.E.P. "Pedro Ruiz Gallo"

Segundo Lugar

México	David Garcia Maldonado	COBACH Oaxaca Plantel 01
México	Isabela Loredo Carvajal	Colegio Nuevo Santander
Perú	Aguilera Manchay Enver Williams	I.E.P. Ai apaec
México	María Rebeca Antezana De la cruz	SACO OLIVEROS
México	Logan Guerrero Díaz	Escuela Secundaria General No. 36
Perú	Jose Antonio Arredondo Tomairo	Saco Oliveros
Perú	Josué Rodrigo Arcana Miranda	Institución Trinomio de Juliaca
Perú	Deyner Steven Escobar Valverde	I.E.P. Ai apaec
México	Ana Camila Cuevas González	Instituto Winston Churchill
Perú	Andre Matías Centeno Chacon	I.E.P. Ai apaec
México	Sergio Gael Vale Lopez	Olimpiada Oaxaca

Tercer Lugar

México	Fernanda Salazar Quiñonez	CECyT 18 Zacatecas
México	Diana Laura Garza de la Riva	Colegio Cervantes de Torreón
México	Rogelio Emiliano Salinas Gutiérrez	Centro de Educación Media de la Universidad Autónoma AGS
México	Sergio Barragán Arroyo	Olimpiada Oaxaca
México	Sarah Martínez García	Motolinía
Perú	Flavio Josue Sanjorge Llactas	Saco Oliveros
Perú	Ivan Alexander Sánchez Silva	I.E.P. Ai apaec
México	Uma Salcedo Reyes	Instituto Sanford
México	Lucero Díaz Ortega	Sec 33
Perú	Luis David Ruiz Ulloa	IEP. Ai apaec
México	Carlos Alonso Carrillo Garcia	Comunidad Montessori San Pablo
México	Alexis Alberto Victoria García	Olimpiada Oaxaca / CBTis 123
México	César Daniel González Bernal	Colegio La Paz
México	Omar Manzano Medina	Secundaria Fray Juan De Padilla
México	Jheremy Cardenas Rodas	Colegio rolog

Mención Honorífica

Perú	Manuel Mario Nadir Gilvonio Saez	IE. Prolog
México	Abraham Emiliano Manzano Medina	Preparatoria México
México	Dessyret Juleysi Razabal Ramos	Saco Oliveros - Peru
México	Santiago González Salud	Olimpiada Oaxaca
México	Aymar Paola Jiménez Espinoza	Olimpiada Oaxaca
Perú	German Balbuena Huamani	Colegio Prolog

Perú	Emanuel Fabian Guevara Carrasco	I.E.P. Ai apaec
México	Javier Mena Chávez	Jose Vasconcelos
Perú	Fatima Stefania Olaya Herrera	Colegio Prolog
Perú	Fabian Obed Huamanchay Sánchez	IEP. AI APAEC
México	Gabriela Sarahí Martínez Rodríguez	Colegio Fray Pedro de Gante
México	Juan Pablo Salinas Muñoz	Centro de Educación Media UAA
México	Grecia Fernanda Rosas Alias	Olimpiada Oaxaca
México	Bastian Alejandro López Vásquez	Olimpiada Oaxaca
México	Natalia Peña	Instituto Peninsular
México	Berenice Torres Ayala	Colegio Enrique Arreguin
Perú	Diana Claudia Garcia Ito	Institución Trinomio

Categoría Uombat

Primer Lugar

Perú	Augusto Eduardo Perales Guevara	C.E.P "Pedro Ruiz Gallo"
Perú	Bejnamin Nicolas Flores Lalangui	I.E.P. Ai apaec

Segundo Lugar

México	Alexandra Valdepeñas	ITESM Campus Laguna
México	Megan Ixchel Monroy Rodríguez	CECyT No.16 "HIDALGO"
México	Andrés Emiliano De la Garza Rosales	Liceo Freinet

Tercer Lugar

México	Natalia Montserrat Cruz Pérez	Olimpiadas Oaxaca
México	Natalia Malpica Blackaller	Instituto Miguel Ángel
Perú	Edison Jean Franco Coaguila Fuentes	Institución Trinomio de Juliaca
México	Ian Axel Ruiz Moreno	UACH
Perú	Juan Daniel Mamani Mamani	Institución Trinomio de Juliaca

Mención Honorífica

Perú	Luis Aaron Leon Escobar	I.E.P. Ai apaec
Cuba	Carlos Jorge García Rodríguez	IPU Eduardo García Delgado
Perú	Raquel Apaza	Institución Trinomio de Juliaca
México	María Inés López García	Prepa TEC Campus Zacatecas
México	Indra Avila Garciamoreno	ITESM
México	Aaron Mireles Barrón	Colegio Cervantes de Torreon
México	Carlos Alberto López Vázquez	CBTIS 261: Ignacio López Rayón

Enunciados de los Problemas

Categoría Cuyo

Problema 1. En un trozo de papel encontré cuatro palabras codificadas:

$$\spadesuit\clubsuit\bigstar\bullet \quad \heartsuit\Box\diamondsuit\bullet \quad \nabla\Box\spadesuit\bullet \quad \bigstar\clubsuit\nabla\bullet$$

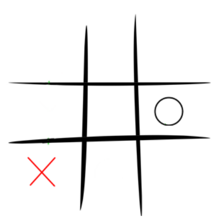
En algún orden, deben estar escritas las palabras:

MESA, CITA, SERA y RIMA

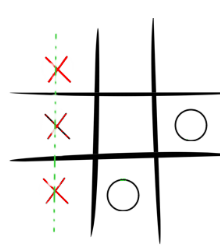
pero no sé cuál es cuál. Con esta información, descifra el siguiente mensaje y explica con tus palabras cómo lo resolviste.

$$\heartsuit\bullet\nabla\spadesuit\bullet \quad \clubsuit\bigstar \quad \spadesuit\Box \quad \heartsuit\bullet\bigstar\Box\diamondsuit\bullet.$$

Problema 2. Laurita y su hermana juegan al gato, que también es llamado michi o tres en raya. Laurita escoge la cruz $\times$ y su hermana el círculo $\circ$, para ir colocando su figura por turnos. Laurita comienza el juego y después de dos turnos el tablero se ve así:

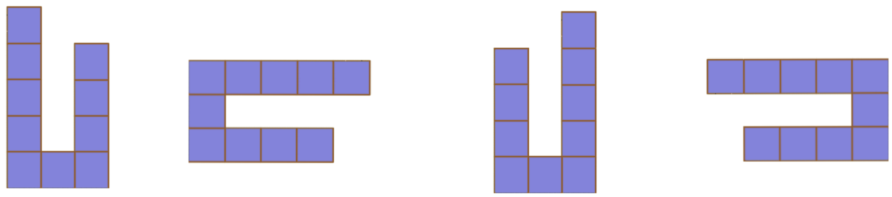


El juego termina cuando alguna logra poner tres de sus figuras en una línea horizontal, vertical o diagonal. Se necesitaron 5 turnos para que alguna de las dos ganara. Por ejemplo, el siguiente es un posible tablero final del juego, donde puede verse que ganó Laurita. ¿De cuántas formas pudo haber quedado el tablero final? Explica con tus



palabras cómo llegaste a la respuesta.

Problema 3. Yareli tiene muchas piezas iguales como las que se muestran. Las quiere acomodar para que juntas formen un cuadrado, sin que se encimen ni queden huecos. Puede girar las piezas o voltearlas. ¿Qué tamaño tiene el menor cuadrado que puede formar? Muestra el cuadrado e identifica claramente cada pieza que usaste. Explica con tus palabras por qué este es el menor cuadrado que puede formar Yareli.



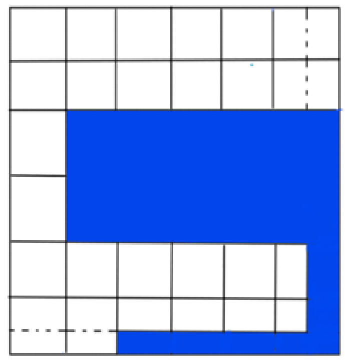
Pieza — Pieza girada — Pieza volteda — Pieza volteada y girada

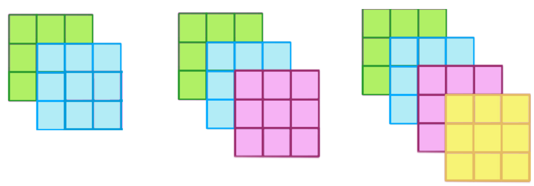
Problema 4. En el siguiente tablero, cada letra de la A a la F representa un número entero. Miguel sabe el valor de cada letra y en cada casilla comenzó a escribir el resultado de multiplicar el número de la fila por el número de la columna en la que se encuentra. Por ejemplo, escribió el número 175 en la casilla de la columna A y fila F, porque sabe que $A \times F = 175$. De esta forma fue rellenado algunas de las otras casillas del tablero, pero no terminó. Encuentra el valor de cada una de las letras y explica con tus palabras cómo lo resolviste.

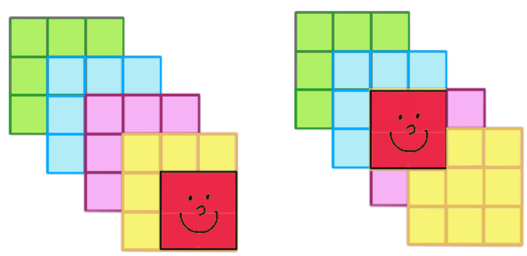
	A	B	C	D	E	F
A						
B				24		
C			121			
D						35
E	0					
F	175					

Problema 5. El siguiente es un cuadrado de 6×6 con seis renglones y seis columna separadas por líneas continuas. El último renglón y la última columna han sido divididos a la mitad con una línea punteada. Si el área de la región coloreada es 68 cm^2, ¿cuál es el área de todo el cuadrado? Explica con tus palabras cómo llegaste a la respuesta.

Problema 6. Luis tiene muchas piezas cuadradas iguales de tamaño 3×3. Comenzó apilando las de 3×3 en varios niveles y se dio cuenta de que comenzaban a parecer una oruga caminando hacia abajo. En la siguiente figura se ven sus orugas de 2, 3 y 4 niveles. Después tomó una pieza de 2×2, le pintó una carita feliz y se puso a colocarla sobre la oruga, de forma que coincidieran sus líneas sobre las líneas de las piezas de 3×3. Y observó que en la oruga de 4 niveles puede ponerla en **13 lugares diferentes**,







sin salirse de la figura y sin salirse de las rayitas. En la siguiente imagen se muestran dos diferentes lugares donde Luis pudo acomodar la carita.
¿En cuántos lugares podría colocar la pieza de carita feliz, siguiendo estas reglas, en una oruga de 100 niveles? Explica con tus palabras cómo llegaste a la respuesta.

Categoría Koala

Problema 1. En un trozo de papel encontré cuatro palabras codificadas:

♠♣★•   ♡□♢•   ∇□♠•   ★♣∇•

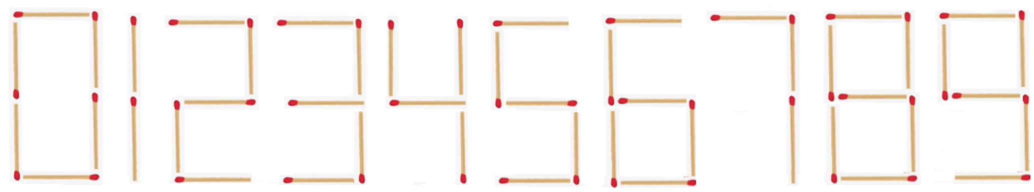
En algun orden, deben estar escritas las palabras:

MESA, CITA, SERA y RIMA

pero no sé cuál es cuál. Con esta información, descifra el siguiente mensaje y explica con tus palabras cómo lo resolviste.

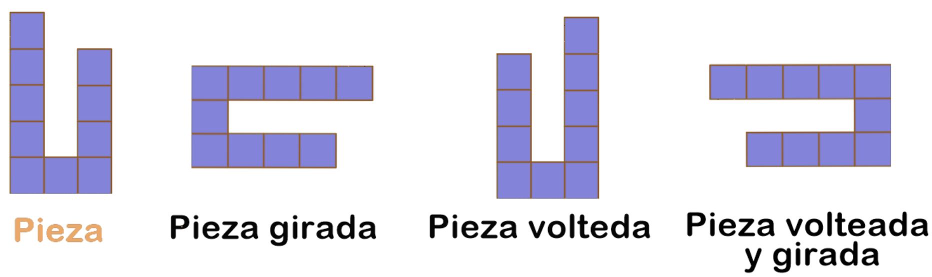
♡•∇♠• ♣★ ♠□ ♡•★□♢•.

Problema 2. Usando cerillitos se pueden escribir los números del 0 al 9 de la siguiente manera: Chiqui y Choco escribieron, cada una, la fecha de hoy como un gran número: 31072021, con los cerillos. Luego, cambiando de lugar 0, 1 o 2 cerillitos de cada dígito, Chiqui hizo el número más pequeño posible y Choco hizo el número más grande posible.

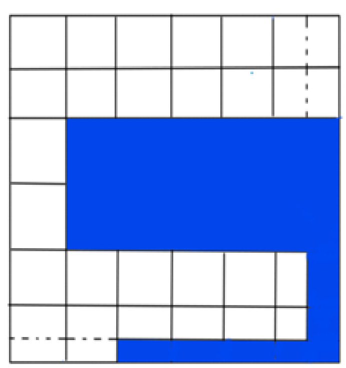


Luego calcularon la resta de esos dos números. ¿Cuál fue el resultado? Explica con tus palabras cómo llegaste a la respuesta.
Nota: No se movieron cerillos de un dígito a otro. Los números que formaron Chiqui y Choco siguen siendo de 8 dígitos

Problema 3. Yareli tiene muchas piezas iguales como las que se muestran. Las quiere acomodar para que juntas formen un cuadrado, sin que se encimen ni queden huecos. Puede girar las piezas o voltearlas. ¿Qué tamaño tiene el menor cuadrado que puede formar? Muestra el cuadrado e identifica claramente cada pieza que usaste. Explica con tus palabras por qué este es el menor cuadrado que puede formar Yareli.



Problema 4. El siguiente es un cuadrado de 6×6 con seis renglones y seis columna separadas por líneas continuas. El último renglón y la última columna han sido divididos a la mitad con una línea punteada. Si el área de la región coloreada es 68 cm^2, ¿cuál es el área de todo el cuadrado? Explica con tus palabras cómo llegaste a la respuesta.



Problema 5. Ana, Betty, Carla, Dani, Eli y Fer tienen cartas numeradas.

- Ana tiene las cartas del 1 al 11
- Betty tiene las cartas del 1 al 12
- Carla tiene las cartas del 1 al 13

- Dani tiene las cartas del 1 al 14
- Eli tiene las cartas del 1 al 15
- Fer tiene las cartas del 1 al 16

Cada una de ellas quiere repartir sus cartas en tres montones manera que las cartas en cada montón sumen lo mismo. ¿Quiénes de ellas pueden lograrlo? Muestra cómo deben hacerlo y explica tu razonamiento.

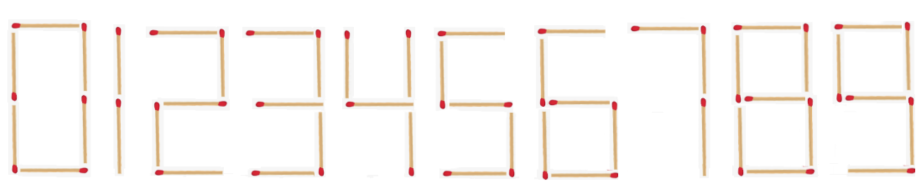
Problema 6. Imagina un tablero cuadriculado con la misma cantidad de renglones y columnas. En cada cuadrito se puede escribir un número, o dejarlo vacío. Decimos que una fila *está de buena*, si la cantidad de números que tiene escritos, es uno de los números que aparecen en la fila. Del mismo modo, una columna *está de buenas*, si la cantidad de números que tiene, aparece como un número de esa columna. Y finalmente, decimos que un tablero *está de buenas*, si todas sus filas y columnas están de buenas. Por ejemplo, la siguiente figura es un tablero de 2×2 que está de buenas.

1	
2	1

Da un ejemplo de un tablero de buenas de tamaño 30×30, donde los números sumen más de 99, y que además no se repitan los números de una misma fila, ni de una misma columna.

Categoría Walabi

Problema 1. Usando cerillos se pueden escribir los números del 0 al 9 de la siguiente manera:



Chiqui y Choco escribieron, cada una, la fecha de hoy como un gran número: 31072021, con los cerillos. Luego, cambiando de lugar 0, 1 o 2 cerillos de cada dígito, Chiqui hizo el número más pequeño posible y Choco hizo el número más grande posible. Luego calcularon la resta de esos dos números. ¿Cuál fue el resultado? Explica tu respuesta.
Nota: No se movieron cerillos de un dígito a otro.

Problema 2. ¿De cuántas formas puedes tomar dos números distintos de la siguiente lista de números

$$-15, -14, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 19, 20,$$

de forma que su promedio sea un entero positivo?

Problema 3. En un triángulo $\triangle ABC$, la bisectriz de $\angle BAC$ corta a BC en D. El $\triangle ADC$ es isósceles con $AD = CD = 36$ y $BD = 64$. Encuentra la medidas de los lados de $\triangle ABC$.

Problema 4. Ana, Betty, Carla, Dani, Eli y Fer tienen cartas numeradas.

- Ana tiene las cartas del 1 al 11
- Betty tiene las cartas del 1 al 12
- Carla tiene las cartas del 1 al 13
- Dani tiene las cartas del 1 al 14
- Eli tiene las cartas del 1 al 15
- Fer tiene las cartas del 1 al 16

Cada una de ellas quiere repartir sus cartas en tres montones manera que las cartas en cada montón sumen lo mismo. ¿Quiénes de ellas pueden lograrlo? Muestra cómo deben hacerlo y explica tu razonamiento.

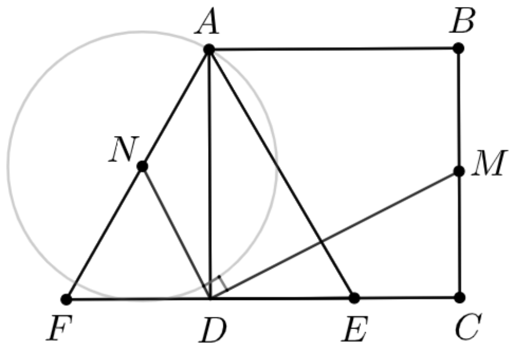
Problema 5. German tiene tres tarjetas en blanco. En cada una de ellas escribe un dígito diferente, del 0 al 9. Entonces reparte las tarjetas entre Alma, Brenda y Ceci, dándole una tarjeta a cada una. Cada una de ellas anota el número de su tarjeta en un papel. Luego German recoge las revuelve, las baraja y las vuelve a repartir, dando una a cada una. Cada una de las tres chicas anota el número de su nueva tarjeta. Este proceso se repite algunas veces. Al final, cada chica suma los números que anotó. La suma de Alma es 25, la de Brenda 9 y la de Ceci 31. ¿Qué números estaban escritos en las tarjetas? Encuentra todas las posibilidades.

Problema 6. Sea ABC un triángulo con el ángulo en A obtuso (mayor a 90 grados) y $AB < AC < BC$. Los puntos M y N están en el segmento BC de manera que $AM = BM$ y $AN = NC$. Demuestra que la bisectriz del ángulo $\angle MAN$ pasa por el centro de la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo ABC.

Categoría Canguro

Problema 1. En carmalandia el alfabeto tiene 13 letras ABCEFGIJKOPRU (5 vocales pero sólo 8 consonantes). Las palabras se forman con tres letras, sin que aparezcan dos vocales o dos consonantes consecutivas. Por ejemplo: IPO, EFE, CAP y POK son palabras, pero PRO, PIE, AKR no lo son. Si se escribe un diccionario de ese lenguaje en dos tomos, en orden alfabético y de manera que cada tomo contenga la misma cantidad de palabras. ¿Cuál será la primera palabra del segundo tomo?

Problema 2. Sea $ABCD$ un cuadrado. Se toman puntos E y F en la recta DC de manera que AFE sea un triángulo equilátero. Sea M el punto medio de BC y N un punto sobre AF de manera que ND y DM sean perpendiculares. Demuestra que la recta FC es tangente a la circunferencia de centro N y radio NA



Problema 3. Una tercia de enteros positivos (a, b, c) se dice *ajustada* si a divide a b y b divide a c. Sean A, B y C enteros positivos cualesquiera. Demuestra que existen 6 tercias ajustadas (a_i, b_i, c_i) para $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ de manera que

$$A = a_1a_2b_3b_4c_5c_6$$
$$B = b_1c_2a_3c_4a_5b_6$$
$$C = c_1b_2c_3a_4b_5a_6.$$

También demuestra que $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ es el máximo común divisor de A, B y C además que $c_1c_2c_3c_4c_5c_6$ es el mínimo común múltiplo de A, B y C.

Problema 4. German tiene tres tarjetas en blanco. En cada una de ellas escribe un dígito diferente, del 0 al 9. Entonces reparte las tarjetas entre Alma, Brenda y Ceci, dándole una tarjeta a cada una. Cada una de ellas anota el número de su tarjeta en un papel. Luego German recoge las revuelve, las baraja y las vuelve a repartir, dando una a cada una. Cada una de las tres chicas anota el número de su nueva tarjeta. Este proceso se repite algunas veces. Al final, cada chica suma los números que anotó. La suma de Alma es 25, la de Brenda 9 y la de Ceci 31. ¿Qué números estaban escritos en las tarjetas? Encuentra todas las posibilidades.

Problema 5. Sea ABC un triángulo con el ángulo en A obtuso (mayor a 90 grados) y $AB < AC < BC$. Los puntos M y N están en el segmento BC de manera que $AM = BM$ y $AN = NC$. Demuestra que la bisectriz del ángulo $\angle MAN$ pasa por el centro de la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo ABC.

Problema 6. Encuentra todas las parejas de p, q primos positivos tales que $(p^2 - q^2)^2 + (p + q)^2(p - q) + pq = 2021$

Categoría Uombat

Problema 1. En carmalandia el alfabeto tiene 13 letras ABCEFGIJKOPRU (5 vocales pero sólo 8 consonantes). Las palabras se forman con tres letras, sin que aparezcan dos vocales o dos consonantes consecutivas. Por ejemplo: IPO, EFE, CAP y POK son palabras, pero PRO, PIE, AKR no lo son. Si se escribe un diccionario de ese lenguaje en dos tomos, en orden alfabético y de manera que cada tomo contenga la misma cantidad de palabras, ¿cuál será la primera palabra del segundo tomo?

Problema 2. Sea ABCD un cuadrilátero con $\angle B = \angle D > 90°$. La recta AD y BC se cortan en E. Demuestra que
$$\frac{AB}{CD} = \frac{AE}{CE}.$$

Problema 3. Una tercia de enteros positivos (a, b, c) con $a < b \leq c$ es *ajustada* si a divide b y b divide a c. Para cada entero positivo n sea $D(n)$ el número de tercias ajustadas de la forma (a, b, n). Sea m un entero positivo con k divisores primos distintos. Demuestra que si $D(m^2)$ es impar, entonces la cantidad de divisores positivos de m es múltiplo de 2^k.

Problema 4. Sea ABC un triángulo con $AB = 15$ cm y $BC = 20$ cm. Considera la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo. Si la tangente a dicha circunferencia en B es perpendicular a la recta que contiene el segmento AC. Determina la medida del segmento AC en centimetros.

Problema 5. Sean α y β las raíces de la ecuación $x^2 - 2bx + c^2$ donde b y c son números reales que no sean cero. Demuestra que
$$\frac{c}{\alpha}(b - \alpha) = \frac{\beta}{c}(\beta - b).$$

Problema 6. Para un entero positivo n definimos $W(n) = B - A$, donde A es la suma de los divisores positivos de n menores o iguales a $\sqrt{n}$, y B la suma de los divisores de n mayores o iguales a $\sqrt{n}$. Decimos que un entero positivo es exótico si $W(n) > 2n$. Demuestra que existen infinitos enteros n, tales que n y $W(n)$ son exóticos.

Soluciones a los Problemas

Categoría Cuyo

Solución Problema 1. El mensaje dice: Carma es mi casita.
Observamos primero que todas las palabras terminan con la letra a, y todas las claves con un puntito, por lo que $\bullet = a$. Luego, que casi todas las letras (símbolos) se utilizan al menos dos veces entre las palabras, con excepción de las c y la t, que solo se utilizan una vez, y es en la palabra CITA. Entre las palabras codificadas, los símbolo que se utilizan una sola vez son el corazón y diamante, que aparecen en el código $\heartsuit\square\diamondsuit\bullet$. Por lo que concluimos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\heartsuit &= c\\ \square &= i\\ \diamondsuit &= t\\ \bullet &= a\end{aligned}$$

Veamos que el símbolo cuadrado que representa la letra i, aparece también en el código $\nabla\square\spadesuit\bullet$, por lo que debe tratarse de la palabra RIMA. Comparando los símbolos con las letras tenemos que:

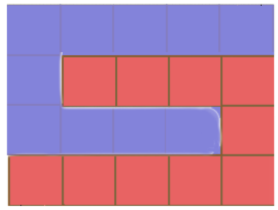
$$\begin{aligned}\nabla &= r\\ \spadesuit &= m\end{aligned}$$

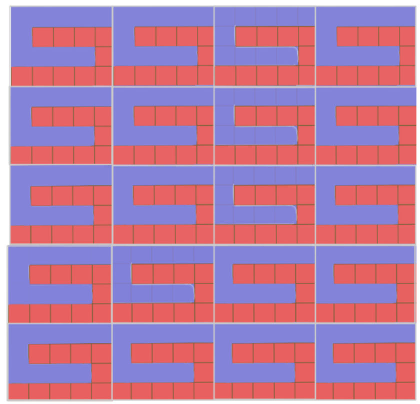
Y ya que $\spadesuit$ representa a la letra m, entonces $\spadesuit\clubsuit\bigstar\bullet$ es la palabra MESA, lo cual nos revela los valores faltantes.

$$\begin{aligned}\clubsuit &= e\\ \bigstar &= s\end{aligned}$$

Solución Problema 2. Como Laurita empezó el juego y alguien ganó después de 5 turnos, solo pudo haber sido Laurita. Por lo tanto, nuestros dibujos tienen tres $\times$ y dos $\circ$. Como ya sabemos que Laurita colocó en la esquina inferior izquierda, pudo haber ganado de 3 maneras: con la primera columna, con la diagonal ascendente o con la última fila. Si colocamos las otras dos $\times$ de Laurita, en cualquier caso, quedan todavía 5 cuadritos vacíos donde podría jugar su hermana. Por lo tanto, para cada manera de Laurita de ganar, hay 5 maneras de completar el dibujo.

Solución Problema 3. El cuadrado más pequeño mide 20×20.
Veamos que Yareli puede tomar dos fichas y acomodarlas para formar un rectángulo de 4×5, el cual no sobrepone las piezas, ni deja huecos.





Si colocamos 20 rectángulos como éste, podemos formar el siguiente cuadrado, con las características pedidas:

Como cada pieza, tiene 10 cuadritos, el menor cuadrado que podríamos formar es el de 10×10. Sin embargo, est no es posible, porque cada rectángulo mide 4 cuadritos de alto y 10 no es un múltiplo de 4. El siguiente tamaño sería 20×20 que, como ya vimos, sí es posible.

Solución Problema 4. Los valores son: $A = 5, B = 24, C = 11, D = 1$ y $E = 0$.
Podemos ver que C es un número que cumple que $C \times C = 121$. Con esto encontramos que $C = 11$.

Como $A \times E = 0$, alguno de los dos números tiene que ser 0. Sin embargo, como $A \times F = 35$, no puede ser A. Por lo tanto, $E = 0$.

El reto está en D. Veamos que $D \times B = 24$ y que $D \times F = 35$. Como sabemos que son números enteros, podemos expresar las maneras de multiplicar 24 y 35:

$24 = 1 \times 24 = 2 \times 12 = 3 \times 8 = 4 \times 6$
$35 = 1 \times 35 = 5 \times 7$

Por la tabla, sabemos que D debe ser un factor común de 24 y 35. Podemos ver que la única opción es $D = 1$. Por lo tanto, $B = 24$ y $F = 35$. Sabiendo eso, como $A \times 175 = 5$, encontramos que $A = 5$.

Solución Problema 5. El área total mide 192 cm^2.
Comenzamos por trazar todas las líneas medias en la cuadrícula, como en la última fila y último renglón, para que nos queden puros cuadritos del mismo tamaño. Ahora hay 12 filas, con 12 cuadritos en cada una, es decir, 144 cuadritos en total.

Vamos a contar cuántos cuadritos están coloreados. De los cuadritos grandes son $10 \times 4 = 40$ cuadritos; de los cuadritos a la mitad son $4 \times 2 = 8$ cuadritos, y del cuadrito de la esquina son otros 3 cuadritos. Tenemos $40 + 8 + 3 = 51$.

Observa que $51 = 17 + 17 + 17$ y que $68 = 17 + 17 + 17 + 17$. Es decir, si 51 cuadritos tienen $68cm^2$ de área, entonces 3 cuadritos tienen 4 centímetros de área. En todo el cuadrado hay 144 cuadritos y multiplicando 144 por 3, se llega al resultado buscado.

Solución Problema 6. La carita feliz se puede poner en 301 lugares.
Hagamos algunos ejemplos pequeños para tratar de encontrar un patrón. En la oruga que solo tiene 1 nivel, la carita se puede poner en 4 lugares distintos. En la oruga que tiene 2 niveles, la carita se puede poner en 7 lugares distintos. En la oruga que tiene 3 niveles, la carita se puede poner en 10 lugares distintos y el ejemplo nos dice que en la oruga de 4 niveles, la carita se puede poner en 13 lugares distintos.

Vemos que cada vez que agregamos 1 nivel, la carita se puede colocar en 3 lugares nuevos. Para pasar de 1 nivel a 100 niveles, hay que agregar 99 niveles. En total, agregamos $3 \times 99 = 297$ lugares donde podamos colocar la carita, 3 por cada nivel. Si sumamos los 4 del nivel 1, en total son $297 + 4 = 301$ lugares donde se puede colocar la carita en la oruga.

Categoría Koala

Solución Problema 1. Ver solución de Y1.

Solución Problema 2. La respuesta es 30903030.
Veamos, mediante prueba y error, cuáles números se pueden convertir en cuáles otros moviendo 1 o 2 cerillitos. Veamos que 1 es el único que ocupa 2 cerillitos, 4 es el único que ocupa 4 cerillitos, 7 es el único que ocupa 3 cerillitos y 8 es el único que ocupa 7 cerillitos, por lo que ninguno de ellos se puede convertir en ningún otro.

Con algo de experimentación, podemos convencernos de que $0, 6$ y 9 son intercambiables. Es decir, que con a lo más 2 movimientos de cerillitos, se puede pasar de uno a otro. Además, $2, 3$ y 5 también. Sabiendo esto, podemos ver cada caso:

Chiqui tiene 31072021 y quiere el número más pequeño. Sabemos que los 1 y 7 no se pueden cambiar. Los números que sí se pueden cambiar, los quiere como el más pequeño de su grupo; su número es 21072021.

Choco también tiene 31072021. Cambia cada número por el más grande de su grupo; su número es 51975051. Al restar al número de Chiqui el número de Choco, se obtiene la respuesta.

Solución Problema 3. Ver solución de Y3.

Solución Problema 4. Ver solución de Y5.

Solución Problema 5. Solo Ana, Betty, Dani y Fer pueden hacerlo.
Veamos que una condición necesaria para que cada niña pueda repartir las cartas como desea, es que la suma de los números de cada una sea un múltiplo de 3. Es fácil calcular que las cartas de Ana, Betty, Carla, Dani, Eli y Fer suman $66, 78, 91, 105, 120, 136$ y 153, respectivamente. Por lo tanto, ni Carla ni Eli pueden, pues ni 91 ni 136 son múltiplos de 3.

Para cada una de las demás, basta con mostrar un arreglo. Los siguientes son ejemplos de cómo puede hacerlo cada una, pero hay varias maneras.

Ana: $\{1, 10, 11\}, \{2, 3, 8, 9\}$ y $\{4, 5, 6, 7\}$.
Betty: $\{1, 6, 7, 12\}, \{2, 5, 8, 11\}$ y $\{3, 4, 9, 10\}$.
Dani: $\{8, 13, 14\}, \{1, 6, 7, 9, 12\}$ y $\{2, 3, 4, 5, 10, 11\}$.
Fer: $\{1, 2, 3, 4, 5, 10, 15\}, \{6, 9, 11, 14\}$ y $\{7, 8, 12, 13\}$.

Una buena estrategia es empezar calculando la suma y luego dividirla entre 3, para saber cuánto queremos obtener. Además, cuando sea posible, considera hacer *sándwich* e ir sumando números en los extremos, de afuera hacia adentro para obtener parejas que sumen lo mismo

Solución Problema 6. El siguiente tablero de 8×8 es un tablero de buenas pues cada columna y fila tiene escritos los números del 1 al j, es decir tiene escritos j números y el número j está escrito dicha fila o columna por lo que está de buenas.

1							
2	1						
3	2	1					
4	3	2	1				
5	4	3	2	1			
6	5	4	3	2	1		
7	6	5	4	3	2	1	
8	7	6	5	4	3	2	1

Recordando que $1+2+3+\cdots+j = \frac{j(j+1)}{2}$. La suma de los números escritos en este tablero es de

$$\frac{1\times 2}{2}+\frac{2\times 3}{2}+\frac{3\times 4}{2}+\frac{4\times 5}{2}+\frac{5\times 6}{2}+\frac{6\times 7}{2}+\frac{7\times 8}{2}+\frac{8\times 9}{2}=120.$$

Vamos a usar este tablero para resolver el problema. En el tablero de 30×30 dejaremos la mayoría de los cuadraditos en blanco. Solamente tomaremos un cuadradito de 8×8 (puede ser el más a la esquina inferior derecha) y lo llenaremos igual que el de la imagen. Ahora el tablero de 30×30 estará de buenas. En efecto cada fila o está vacía o tiene los números del 1 al j para $1 \leq j \leq 8$, es decir tiene escritos j números y el número j es uno de ellos. Esta fila está de buenas. Análogamente con las columnas. Por lo que el tablero de 30×30 está de buenas y la suma de los números escritos en él es $120 > 99$.

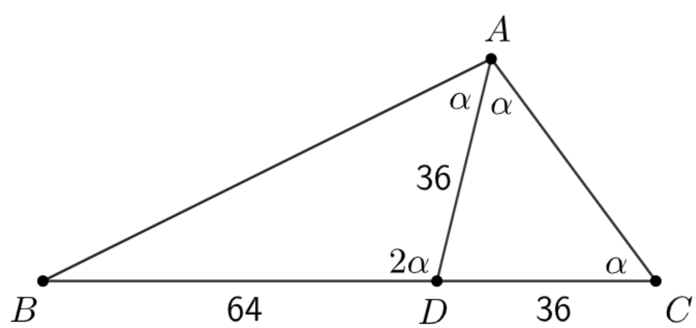
Categoría Walabi

Solución Problema 1. Ver solución de K2.

Solución Problema 2. La respuesta es 186.
Veamos que de forma gráfica, el promedio de dos puntos sobre una recta es el punto medio. Podemos empezar considerando un número entero positivo y contar cuántos segmentos de línea lo tienen a él, como punto medio. Si el promedio fuera 1, necesitamos

elegir dos puntos a la misma distancia, uno a la derecha y otro a la izquierda. Podemos elegir: (2, 0), (3, -1), (4, -2), (5, -3), (6, -4), (7, -5), (8, -6), (9, -7), (10, -8), (11, -9), (12, -10), (13, -11), (14, -12), (15, -13), (16, -14) y (17, -15). Estas 16 parejas tienen promedio 1.
Siguiendo este procedimiento, si el promedio fuera 2, obtendríamos 17 parejas, desde $(3, 1)$ hasta $(19, -15)$. Si el promedio fuera 3, son 17, desde $(4, 2)$ hasta $(20, -14)$. Si el promedio fuera 4, serían 16 parejas. Si fuera 5, serían 15 parejas. Si fuera 6, serían 14 parejas y así sucesivamente hasta promedio 19, del cual $(20, 18)$ es la única pareja. En total, son $16 + 17 + 17 + 16 + 15 + 14 + 13 + ... + 1 = 186$ parejas cuyo promedio es un entero positivo.

Solución Problema 3. Los lados del triángulo miden 45, 80 y 100 unidades.
Llamemos $\angle ACB = \alpha$. Al ser $\triangle ADC$ un triángulo isósceles con $AD = DC$, sabemos que $\angle ADC = \angle ACD = \alpha$. Y como AD es la bisectriz del ángulo BAC, además $\angle BAD = CAD = \alpha$.



Por ser ángulo exterior en el triángulo $\triangle ADC$, tenemos que $\angle ADB = \alpha + \alpha = 2\alpha = \angle BAC$. Por el criterio AAA, los triángulos $\triangle DBA$ y $\triangle ABC$ son semejantes y se sabemos que

$$\frac{AB}{64 + 36} = \frac{AD}{AC} = \frac{64}{AB}.$$

Despejando en la expresión anterior, tenemos que $AB^2 = 100 \times 64$, y $AC = \frac{AD \cdot AB}{64}$, de donde $AB = 80$ y $AC = \frac{36 \times 100}{64} = 45$.

Solución Problema 4. Ver solución de K5.

Solución Problema 5. Hay 4 posibles valores para los números en las cartas.
Sean a, b, c los números escritos en cada carta, y digamos que Alma, Brenda y Ceci obtuvieron *puntos* con cada una. Como cada ronda se repartieron las mismas tres cartas, es decir, se repartieron $a + b + c$ puntos. Si se jugaron x rondas, entonces tenemos que $x(a + b + c)$ es igual a la cantidad total de puntos, es decir, $25 + 9 + 31 = 65$. Como $65 = 5 \times 13$ y sabemos que tres dígitos distintos no pueden sumar 0 ni 65, nos quedan dos casos: Se jugaron 5 rondas y $a + b + c = 13$ o se jugaron 13 rondas y $a + b + c = 5$.

Caso 1: Hay 10 ternas de números que suman 13: $\{9, 4, 0\}$, $\{9, 3, 1\}$, $\{8, 5, 0\}$, $\{8, 4, 1\}$, $\{8, 3, 2\}$, $\{7, 6, 0$
No es difícil convencernos, de que sumando 5 números, solo se puede obtener 9 puntos, si las cartas son $\{9, 3, 1\}$ o $\{7, 5, 1\}$.

Veamos que es posible para cada una de estas ternas con un ejemplo. Por favor verifica que en ningún turno se repartió la misma carta dos veces:

Terna $\{9,3,1\}$:
A obtuvo, en orden, $9+1+9+3+9=31$.
B obtuvo, en orden, $3+3+1+1+1=9$.
C obtuvo, en orden, $1+9+3+9+3=25$.
Terna $\{7,5,1\}$:
A obtuvo, en orden, $7+7+7+5+5=31$.
B obtuvo, en orden, $5+1+1+1+1=9$.
C obtuvo, en orden, $1+5+5+7+7=25$.

Caso 2: Ahora veamos la tenas que suman 5. Estas son: $\{0,1,4\},\{0,2,3\}$. Observa que con ambas es posible haber obtenido los puntos de Alma, Brenda y Ceci, como se muestra a continuación:

Terna $\{0,2,3\}$:
A obtuvo, en orden, $0+2+2+2+2+2+3+3+3+3+3+3+3=31$.
B obtuvo, en orden, $3+3+3+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0=9$.
C obtuvo, en orden, $2+0+0+3+3+3+2+2+2+2+2+2+2=25$.
Terna $\{0,1,4\}$:
A obtuvo, en orden, $0+0+0+1+1+1+4+4+4+4+4+4+4=31$.
B obtuvo, en orden, $4+4+1+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0=9$.
C obtuvo, en orden, $1+1+4+4+4+4+1+1+1+1+1+1+1=25$.

Dando un total de 4 posibles formas de llenar los números en las tres cartas.

Solución Problema 6. Ver solución de U4.

Categoría Canguro

Solución Problema 1. La primer palabra del segundo tomo es IJA.
Las palabras que existe en carmalandia son de la forma ABA, o BAB, dónde A representa una de las 5 vocales y B una de las 8 consonantes.

Del tipo ABA, se tienen en total $5\times8\times5=200$ y $8\times5\times8=320$ del tipo BAB. En total, su alfabeto tiene 520 palabras y nosotros deseamos conocer la que se encuentran en la posición 261. Ahora observemos que las primeras palabras del alfabeto inician con la letras A, por lo que son del tipo ABA y en total hay $1\times8\times5=40$ de ellas.

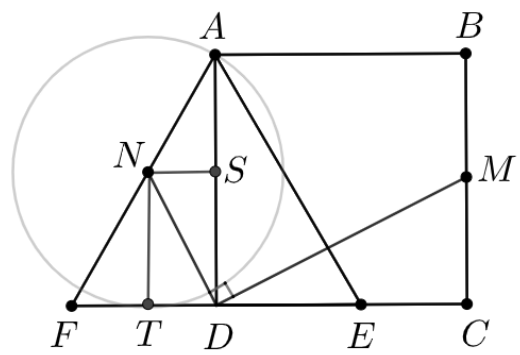
Las siguientes en orden alfabético, son las que comienzan con la letras B, que son del tipo BAB, y en total también hay $1\times5\times8=40$ de ellas. Observamos que hay 40 palabras que inician con cada una de las letras, por lo que la palabra número 261 debe comenzar con la séptima letra de este alfabeto: la I. Ya que sabemos que existen 40 palabras que inician con I, y todas son del tipo ABA. En orden alfabético, son las siguientes: IBA, IBE, IBI, IBO, IBU, ICA, ICE,ICI ... y la palabra que ocupe el puesto 21 de esta lista es IJA. Siendo esta, la palabra número 261 del alfabeto.

Solución Problema 2. Sean S y T las perpendiculares desde N a AD a FD respectivamente. El que $NS \parallel FD$ implica que $\Delta ANS \sim AFD$. El triángulo AFD es la mitad de un equilátero por lo que $AF=2\cdot FD$. De esto obtenemos que

$$AN=2\cdot NS. \quad (1)$$

Por criterio AAA,

$$\Delta NTD \simeq \Delta DMC. \quad (2)$$



Uno de sus ángulos es recto, por lo que los ángulos TND y TDN son complementarios. Además, $\angle NDT + \angle MDC = 90°$, entonces $\angle NDT$ y $\angle MDC$ también son complementarios. De la semejanza (2) se obtiene $\frac{NT}{TD} = \frac{DC}{MC} = 2$, lo cual implica que

$$NT = 2 \cdot TD. \quad (3)$$

El cuadrilátero $NSDT$ es rectángulo. Lo que implica que $NS = TD$, esto junto con (1) y (3) implican que $NT = NA$. Finalmente, NT es un radio perpendicular a FD. Acabamos.

Solución Problema 3. Sean $p_1, p_2, \ldots, p_k$ todos los divisores primos de ABC para algún entero k. Consideremos las siguientes factorizaciones:

$$A = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$$
$$B = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$$
$$C = p_1^{\gamma_1} \cdots p_k^{\gamma_k}$$

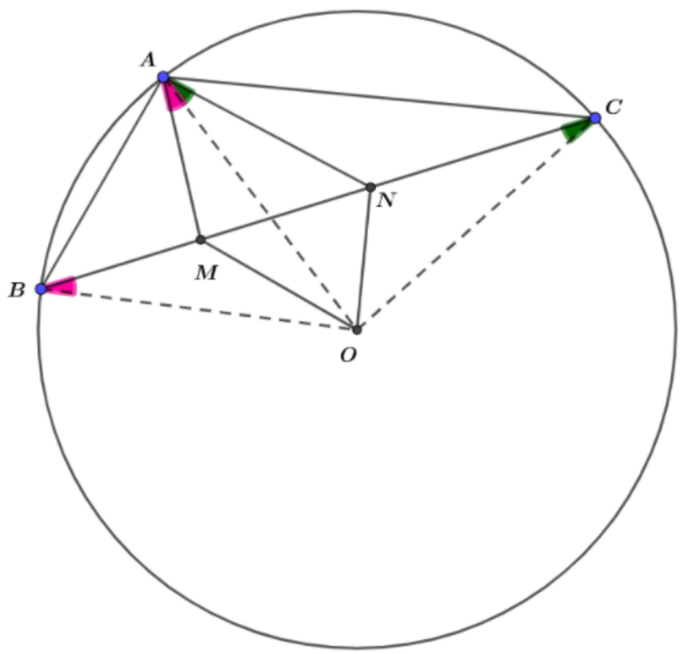
con $0 \leq \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ para $i = 1, 2, \ldots, k$.

La construcción de las tercias ajustadas será como sigue. Cada a_i, b_i y c_i describe quienes serán las máximas potencias de primos que lo dividen, y cada uno será simplemente el producto de ellas. Ahora organicemos los p_j^r con $r = \alpha_j, \beta_j, \gamma_j$. El más pequeño de ellos lo ponemos en el a_i, que corresponda a su A, B o C, ¡pero hay dos opciones! Entonces el más grande lo ponemos en el c_i correspondiente de su A, B, o C. De esta manera, los p_j^r quedan todos en una misma tercia y por como acomodamos los primos, cada tercia es ajustada. Ahora, a los a_is les toco los exponentes primos más pequeños. Por la definición del máximo común divisor, $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ es el máximo común divisor de A, B y C. A los c_i's les tocaron los exponentes primos más grandes, por lo que por definición de mínimo común múltiplo, $c_1c_2c_3c_4c_5c_6$ es el mínimo común múltiplo de A, B y C.

Solución Problema 4. Ver solución de W5.

Solución Problema 5. Por criterio LLL, $\Delta MAO \cong MBO$, por lo que $\angle MAO = \angle MBO$. De la misma manera, se prueba que $\angle OAN = \angle NCO$.

Además, el triángulo ΔBOC es isósceles, por lo que $\angle OBC = \angle OCB$. Esto demuestra que $\angle MAO = \angle OAN$.



Solución Problema 6. Como 2021 es positivo, se tiene que $p > q$. Empecemos por desarrollar $p^2 - q^2 = (p+q)(p-q)$, para luego convertir $(p^2-q^2)^2 + (p+q)^2(p-q) + pq$ en

$$(p+q)^2(p-q)^2 + (p+q)^2(p-q) + pq.$$

Por simplicidad, digamos que $a = (p+q)(p-q)$. Luego, la ecuación anterior se puede convertir en

$$a^2 + a(p+q) + pq,$$

y esta expresión puede factorizarse con término común de la siguiente manera:

$$(a+p)(a+q) = [(p+q)(p-q)+p][(p+q)(p-q)+q] = 2021.$$

Por lo tanto, el menor de esos factores es 43 y el mayor de los factores es 47, ya que $43 \times 47 = 2021$. Si restamos ambos factores entre sí, obtenemos $p - q = 47 - 43 = 4$. Si sustituimos y sumamos, obtenemos $4(p+q) + p + q = 90$, de donde $p + q = 10$. Esto produce un sistema lineal de 2×2. Al resolverlo obtenemos los valores que buscamos: $p = 7$ y $q = 3$.

Categoría Uombat

Solución Problema 1. Ver solución de C1.

Solución Problema 2. Sea F el punto donde se intersectan los segmentos AB y CD. El cuadrilátero $EDBF$ es cíclico, ya que $\angle EDF = \angle EBF$, al ser lo ángulos suplementarios de los ángulos en D y B del cuadrilátero inicial. El que sea cíclico implica que $\triangle ADB \simeq \triangle AFE$ y $\triangle CDB \simeq \triangle CEF$. Esto nos da las siguientes razones de semejanza:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{DB}{FE}$$

$$\frac{DB}{FE} = \frac{CD}{CE}.$$

Por lo que $\frac{AB}{AE} = \frac{CD}{CE}$, que es equivalente a la igualdad que queríamos demostrar.

Solución Problema 3. Relajemos la noción de tercias ajustadas. Diremos que una tercia (a, b, c) es *re-ajustada* si $a \leq b \leq c$, a divide a b y b divide a c.

Sea n un entero positivo. Denotamos por $\mathbb{D}(n)$ a la cantidad de tercias re-ajustadas de la forma (a, b, n), y tenemos lo siguiente:

$$\mathbb{D}(n) = \sum_{k|n} d(k).$$

Como la función $d(\cdot)$ es multiplicativa, por el teorema de convolución de Dirichlet $\mathbb{D}(n)$ también lo es. Por lo que será suficiente encontrar $\mathbb{D}$ en potencias de primos. De hecho, si para algún primo y algunos exponentes enteros, $(p^\gamma, p^\beta, p^\alpha)$ es una tercia re-ajustada, entonces $0 \leq \gamma \leq \beta \leq \alpha$. Estas condiciones nos permiten asegurar que $\mathbb{D}(p^\alpha) = \binom{\alpha+1}{2}$ y $D(n) = \mathbb{D}(n) - d(n)$. En efecto, a las re-ajustadas hay que quitarles las de la forma (a, a, n), para encontrar las tercias ajustadas. Afortunadamente, observa que este tipo de tercias re-ajustadas son precisamente la cantidad de divisores de n. Finalmente sea m un entero positivo con $D(m)$ par y $z = m^2$. Como $D(m^2) + d(m^2) = \mathbb{D}(m^2)$, se sigue que $\mathbb{D}(m^2)$ es impar. Para cada número primo p que divida a m, denotaremos por $m||p$, al exponente de p en la factorización en primos de m. Por la multiplicidad de $\mathbb{D}$ obtenemos que $\mathbb{D}(p^{z||p})$ es impar pues divide a $\mathbb{D}(z)$. Esto implica que $\frac{(2(z||p)+1)(2 \cdot z||p)}{2}$ es impar, por lo tanto $z||p$ es par. Y como $d(m)$ es la multiplicación de k números pares de la forma $z||p + 1$, se concluye que $d(m)$ es múltiplo de 2^k.

Solución Problema 4. Sea T el punto donde de intersección entre la tangente y el lado AC. Notemos que los triángulos $\triangle ATB$ y $\triangle BTC$ son semejantes. Por las condiciones del problema,

$$\frac{3}{4} = \frac{AB}{BC} = \frac{TB}{TC},$$

por lo que el triángulo rectángulo $\triangle TBC$ es semejante al famoso triángulo rectángulo de medidas 3, 4 y 5. Con esta información podemos completar que $AT = 9$ y $TC = 16$ por lo tanto $AC = 7$.

Solución Problema 5. Dado que α y β son las raíces de la ecuación, tenemos que

$$\begin{aligned}(x - \alpha)(x - \beta) &= x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\dot{\beta} \\ &= x^2 - 2bx + c^2.\end{aligned}$$

De esto, $\alpha \cdot \beta = c^2$ y $\alpha + \beta = 2b$, y se sigue que $\frac{\alpha}{c} = \frac{c}{\beta}$ y $b - \alpha = \beta - b$. Acabamos.

Solución Problema 6. El número $24p$, con p primo, tiene como divisores a:

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, p, 2p, 3p, 4p, 6p, 8p, 12p, 24p\}.$$

Si $p > 24$, entonces $W(24p) = p + 2p + 3p + 4p + \cdots + 24p - (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 12 + 24) = 60(p - 1)$. Como $60(p - 1) > 2 \cdot 24p$, si y sólo si $12(p - 5) > 0$ y esto último es cierto, tenemos que los números de la forma $28p$ con $p > 24$ son exótico.

Demostraremos que $60(p-1)$ es exótico. De manera más general, una expresión para $W(n)$ es

$$\sum_{1\leq d\leq\sqrt{n}} \frac{n}{d} - d. \quad (*)$$

Observa que cada término en esta última suma es mayor que cero. Sea $p-1=k$, para obtener

$$W(60k) > (60k-1)+(30k-2)+(20k-3)+(12k-5)+(10k-6) > 2\times 60k$$

$$\iff \quad 132k-17 > 2\times 60k \quad \iff \quad k\geq 2 \quad \iff \quad p\geq 3.$$

La primera desigualdad se da puesto que cada paréntesis es un término de la suma $(*)$, es decir $W(60k)$ son todos los términos de la suma mientras que el lado derecho son sólo algunos de ellos. En conclusión, si $p>24$ entonces $24p$ y $W(24p)=60(p-1)$ son exóticos y como los primos son infinitos se concluye el problema.

El Centro de Alto Rendimiento en Matemáticas fue fundado en 2011 en San Luis Potosí, México. Desde entonces, nos hemos dedicado a la preparación de estudiantes, profesores y familias para distintos concursos de matemáticas, principalmente aquellos que caen bajo el paragüas de Olimpiada de Matemáticas. Hemos tenido la oportunidad de trabajar con cientos de estudiantes muy talentosos, dentro y fuera de la Olimpiada, en todo México y partes de América Latina.

En CARMA estamos comprometidos con la educación matemática, con proporcionar un espacio accesible y seguro donde todos, todas y todes puedan continuar su preparación olímpica permanente, dar sus primeros y segundos pasos en concursos, o acercarse a las matemáticas desde una perspectiva lúdica y un aprendizaje basado en problemas.

Para más información sobre CARMA: Centro de Alto Rendimiento en Matemáticas, te presentamos los siguientes enlaces:

- Cursos en https://cursos.carmaenlinea.com/
- Concursos en https://concursos.carmaenlinea.com/.
  Anualmente organizamos Olimpiada Femenil (febrero-marzo), Olimpiada Virtual de Matemáticas (agosto) y Olimpiada de Otoño (septiembre-octubre).
- Nuestra página de Facebook en http://fb.com/carmatematicas
- Nuestro canal de YouTube en https://youtube.com/carma2011
- El canal de YouTube de ugesaurio en https://www.youtube.com/ugesaurio

CENTRO DE ALTO RENDIMIENTO EN MATEMATICAS

CARMA

·2011·

CENTRO DE ALTO RENDIMIENTO EN MATEMATICAS

CARMA

·2011·