Centro de Alto Rendimiento en Matemáticas

I Olimpiada de Otoño: 2011

Problemas y soluciones

I Olimpiada de Otoño 2011

Equipo CARMA

26 de enero de 2022

Enero 2022

Los problemas originales de este material son autoría del Equipo CARMA, a saber: Armando Moreno, Luis Islas, Jonathan Pérez y Danielle Flores. Este material puede ser distribuido de manera libre porque nuestro compromiso es con la creación y divulgación de material para Olimpiada de Matemáticas; **por favor considera hacer un donativo, porque todxs tenemos que comer y pagar renta.** Por el amor de Euler, no subas este material a Scribd ni cobres por compartirlo.

Para cualquier correción, por favor comunícate con nosotros vía Facebook o a nuestro correo electrónico en matematicascarma@gmail.com.

La persona a cargo del material es Danielle Flores.

Primera edición: Noviembre 2011
Segunda edición: Enero 2022

Editorial Dinosaurio
San Luis Potosí, México
carmatematicas (at) gmail (dot) com

Si este material te ha sido útil, por favor considera apoyar nuestro proyecto editorial.
Puedes hacerlo en Patreon, comprometiendo un donativo mensual.

https://www.patreon.com/ugesaurio

También puedes hacer una donación ocasional vía PayPal.

https://www.paypal.com/paypalme/ugesaurio

O bien, mediante depósito o transferencia, a nombre de Eugenio Daniel Flores Alatorre en BBVA Bancomer, a través de su aplicación bancaria, deposito en practicaja o en cualquier Oxxo del país:

CLABE: 012700004649844474   número de tarjeta: 4152 3133 9055 2979

Introducción

Enero 2022

Esta es una reedición bonita, en LaTeXdel primer número de la Revista *factorial!*, que era un esfuerzo conjunto de Casa Olímpica, CARMA y Editorial Dinosaurio. Como casi todo el material hasta relativamente poco, estaba improvisado en Word, pero con mucho cariño. Hoy en día no diría que la revista *factorial!* sigue viva, aunque algunos números siguen circulando en la comunidad olímpica y lugares como Scribd. Aunque hicimos un esfuerzo sincero por sacar a tiempo los números correspondientes a las Olimpiadas de Otoño –y creo que lo hicimos tal vez los primeros tres años– fuimos perdiendo el ritmo rápidamente. El plan de renovación editorial actual tiene la idea de crear *folletos*, en lugar de la revista; algunas secciones como problemas sugeridos y artículos ya no aparecen.

Muchas cosas han cambiado en todo este tiempo y más que ninguna otra, nos encantaría recapturar la energía y el entusiasmo que teníamos hace 11 años, cuando nos creíamos capaces de conquistar el mundo.

Octubre 2011

Este es el primer número de **factorial!** la revista de matemáticas de la Casa Olímpica, de CARMA –el Centro de Alto Rendimiento en Matemáticas–, y la Olimpiada Potosina de Matemáticas, que es la fase estatal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas que organiza la Sociedad Matemática Mexicana y de la Olimpiada Nacional de Matemáticas para Alumnos de Primaria y Secundaria que organiza la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas, entre otras.

Es decir, esta revista está editada por el mismo grupo de jóvenes que forman parte de todos los proyectos mencionados antes y es un esfuerzo más por difundir lo que nos gusta tanto: las matemáticas. Además, desde este mismo número, tendremos geniales colaboraciones de amigos y compañeros de olimpiada de todo el país.

La idea es que esta revista se lea como si escucharas una conversación entre olímpicos o exolímpicos. Probablemente el tema más recurrente en las páginas de este número y todos los siguientes sea precisamente la Olimpiada de Matemáticas, tanto resultados y convocatorias como exámenes, problemas y soluciones. Sin embargo, queremos abordar estos temas de forma nueva y ofrecer algunos artículos sobre problemas o temas que nos son muy interesantes, pequeños ensayos sobre matemática educativa o didáctica de las matemáticas que llevemos trabajando o algún profesor que conocemos y admiramos, políticas educativas exitosas sobre matemáticas, experiencias de exolímpicos, y muchas cosas más.

Queremos que la matemática que nos une a todos nos una con muchas más personas y pueda darles las mismas oportunidades que a nosotros. ¡Cuánta gente escuchamos decir que las matemáticas son su coco! ¡Cuánta gente pasa años odiando los números porque no los entiende! La verdad es que las matemáticas son inevitables y mejor sería disfrutarlas: aunque uno quiera vivir sin matemáticas, la vida misma no puede darse sin ellas.

Espero disfruten leer la revista tanto como nosotros editarla.

Ganadores

La Olimpiada de Otoño es un concurso de matemáticas tipo Olimpiada que celebró su primera edición el sábado 22 de octubre de 2011. El concurso está organizado por CARMA, y se llevó a cabo únicamente en el estado de San Luis Potosí. Convocó a alumnos desde primer año de primaria hasta último semestre de preparatoria de todo el estado.

El concurso nace por múltiples razones:

- Mantener vivo el interés por la Olimpiada todo el año. En particular, como aviso de que la convocatoria para la Olimpiada Potosina de Matemáticas está próxima a salir. Encontrar alumnos que no hayan destacado antes y que quizás no encontraríamos de otra manera.
- "Presentación en sociedad" de la delegación de 6 alumnos que representará a San Luis Potosí en la XXV Olimpiada Mexicana de Matemáticas.
- Fomentar la sana competencia entre escuelas y sedes, para motivar la organización al interior de cada sede y la identificación en regiones.
- Recaudar recursos para la organización de la Olimpiada Potosina de Matemáticas y este año en particular, de la XXV Olimpiada Mexicana de Matemáticas San Luis Potosí 2011.

Las primeras tres razones explica alguno de los premios que ofrecimos en la convocatoria. La última razón explica el costo de participar. El examen del concurso se presentó simultáneamente el sábado 22 de octubre del 2011 en siete sedes del Estado:

- Cobach 03: Cedral / Matehuala (MTH)
- ITESM: San Luis (SNL)
- Cobach 05: Cuidad Fernández / Rioverde (RIO)
- Cobach 06: Ciudad Valles (CDV)
- Cobach 14: Tancanchuitz (TNC)
- Cobach 21: Matlapa (MTL)
- Secundaria General Justo Sierra Méndez: Tamazunchale (TMZ)

Agradecemos a cada una de las instituciones que nos facilitaron sus instalaciones para llevar a cabo el concurso: la prepa Tec de Monterrey, Dirección General de Colegio de Bachilleres y sus planteles 03, 05, 06, 14 y 21, y a la Secundaria Justo Sierra Méndez de Tamazunchale.

Hubo cuatro categorías distintas:

- Canguro: Tercero de secundaria y preparatoria
- Mini Canguro: primero y segundo de secundaria
- Walabi: quinto y sexto de primaria
- Mini Walabi: primero a cuarto de primaria

En total, participaron 590 alumnos, divididos de la siguiente manera por sede y categoría:

	Canguro	Mini Canguro	Walabi	Mini Canguro	Total
MTH	35	3	1	1	40
SNL	145	94	27	38	304
RIO	14	5	2	0	21
CDV	48	36	0	0	84
TCN	24	33	1	0	58
MTL	35	3	1	1	40
TMZ	28	15	0	0	43
TOTAL	329	189	32	40	590

Evaluación

El examen fue diseñado por el Comité Organizador y la dificultad respondía a la necesidad de encontrar a los mejores. Creemos que el examen fue un buen instrumento para encontrarlos, pero aprendemos de cada experiencia, en particular de nuestros participantes más jóvenes. El examen tenía tres secciones distintas que tenían 25, 15 y 6 problemas, respectivamente. Según la categoría, cada participante debía contestar alguna cantidad de problemas de cada sección:

- Canguro: 25, 15, 6.
- Mini Canguro: 20, 12, 4.
- Walabi: 16, 8, 3.
- Mini Canguro: 13, 6, 2.

Los problemas de la primera sección valían 3 puntos cada uno. Los de la segunda sección, 5 puntos. Los de la tercera sección, 10 puntos. Así, los puntajes máximos por cada categoría eran:

- Canguro: $75 + 75 + 60 = 210$
- Mini Canguro: $60 + 60 + 40 = 160$
- Walabi: $48 + 40 + 30 = 118$
- Mini Walabi: $39 + 30 + 20 = 89$

Cada sección tiene dos puntajes distintos: Puntaje y Normalizado. El Puntaje es simplemente la suma de los puntos que se obtuvieron en cada sección; el Normalizado es la suma de puntos obtenidos entre la cantidad de puntos posibles. Este segundo parámetro nos permite hacer comparaciones entre categorías.

En la primera sección, una respuesta correcta sumaba 3 puntos, una respuesta incorrecta restaba 1 punto y dejar la pregunta en blanco no sumaba ni restaba. En tres preguntas en las que no había respuesta (8, 20 y 22) se calificó de manera distinta: una respuesta incorrecta restaba 1 punto, dejar la pregunta en blanco sumaba 1 punto, escribir "No está la respuesta" o algo similar sumaba 2 puntos, y escribir la respuesta correcta sumaba 3 puntos. En la segunda sección, la respuesta correcta sumaba 5 puntos, la respuesta incorrecta no sumaba ni restaba. En la tercera sección, para cada problema se hizo un criterio en el que se entregaban de 0 a 10 puntos según el grado en que estuviera completa la solución.

Resultados

El listado completo está en un archivo que ha sido subido al blog de la Olimpiada (ommslp.blogspot.com) y es público. Aparece el nombre, escuela y puntaje de cada participante. En todos los casos, hicimos nuestro mejor esfuerzo por interpretar la letra, por lo que les pedimos una disculpa si el nombre aparece con ligeros errores. Los datos aparecen por sede, ordenados por categoría y luego ascendentemente por puntaje total. Este es un resumen de los ganadores:

Trofeo de las Ciudades

Este trofeo se entrega a la sede con el promedio de los puntajes normalizados más alto. Quiere decir que sus participantes obtuvieron, en promedio, más puntos posibles por examen. La clasificación queda como sigue:

1. MTH: 0.16
2. RIO: 0.15
3. SNL: 0.14
4. CDV: 0.12
5. TNC: 0.08
6. TMZ: 0.08
7. MTL: 0.06

La sede ganadora es Matehuala / Cedral, con cabecera en el COBACH 03, a quienes entregamos el trofeo. Esperamos que esto aumente la participación en la sede.

Campeones Estatales

Ofrecimos premios a los puntajes más altos de todo el estado según su categoría. A continuación, listamos a los primeros diez lugares de cada categoría en todo el estado, el campeón es el primer lugar:

Canguro

1. José Ramón Guardiola Espinosa (SNL / ITESM): 183

2. José Ángel de Jesús Sosa Salinas (SNL / Hispano Inglés): 163
3. Demian Espinosa Ruiz (SNL / ITESM): 148
4. César Eduardo Reyna García (SNL / COBACH 01): 147
5. Carlos Alejandro Hernández Gómez (SNL / Potosino): 140
6. Juan Luis García Guerrero (TMZ / Justo Sierra): 133
7. Ángel Daniel Mejía Oros (SNL / Potosino): 123
8. Ulises Félix Rendón (SNL / ITESM): 109
9. Patricio Noyola (SNL / ITESM): 105
10. Dante Fidel Arista Alemán (SNL / COBACH 01): 101

Mini Canguro

1. Andrea Marcela López de la Cruz (SNL / Othón): 98
2. José Joaquín Zubieta Rico (SNL / Álvaro Obregón): 88
3. Víctor Manuel Briones Mondragón (SNL / Hispano Inglés): 67
4. Iñigo Huza de la Mora (SNL / Terranova): 65
5. Lucía Eugenia Chávez Valenzuela (SNL / Alzate): 55
6. Luis David Robles Guerrero (SNL / Othón): 52
7. Christoper Guerrero Castillo (CDV / Pedro Antonio Santos): 49
8. Luis Miguel Guardiola Espinosa (SNL / Hispano Inglés): 46
9. Ramón Ernesto Cantú Mendoza (SNL / Salesiano): 45
10. Miranda Oyarvide Maldonado (CDV / IEST): 44
11. Adrían Salas González (CDV / Pedro Antonio Santos): 44

Walabi

1. José Ángel Rodríguez Leija (MTH / Presidentes): 35
2. Diana Espinosa Ruiz (SNL / Alzate): 32
3. Elisa Espinosa Ruiz (SNL / Alzate): 26
4. Isaac Berrones Blanco (SNL / Salesiano): 22
5. Alejandro Escobeira Briseño (SNL / Apostólica): 19
6. Mateo Huza de la Mora (SNL / Terranova): 19
7. Ricardo Alberto Gloria Pidazzo (SNL / Apostólica): 18
8. Emilia Rodríguez Purata (SNL / Apostólica): 18
9. Francisco Javier Tovar Ortiz (SNL / Apostólica): 15
10. Anna Krystin Rivera Groves (SNL / Apostólica): 15

Mini Walabi

1. Eduardo Jaziel Juárez Martínez (MTH / Presidentes, 4to): 18
2. Carlos Gaeta López (SNL / Agnes Gonyha, 4to): 17
3. Diego Iván Gómez González (SNL / Apostólica, 4to): 8
4. Lucía Cosette Guirado Álvarez (SNL / Potosino, 3ro): 7
5. Alan Emmanuel Anguiano (SNL / Apostólica, 1ro): 7
6. Melissa Méndez Rodríguez (SNL / Apostólica, 4to): 7
7. Kiria Aglahe Guerrero Hernández (SNL / Apostólica, 2do): 7
8. Edgar Ibarra Zavala (SNL / Apostólica, 4to): 6
9. Edgar Mauricio Brilio (SNL / Apostólica, 3ro): 5

10. Carlo Armando García Romero (SNL / Apostólica, 4to): 5

El premio para las categorías Walabi y Mini Walabi se entregaría entre estas dos categorías según el puntaje normalizado. Por lo tanto, la siguiente lista es de los primeros diez lugares según su puntaje normalizado:

1. José Ángel Rodríguez Leija (MTH / Presidentes): 0.30
2. Diana Espinosa Ruiz (SNL / Alzate): 0.27
3. Elisa Espinosa Ruiz (SNL / Alzate): 0.22
4. Eduardo Jaziel Juárez Martínez (MTH / Presidentes, 4to): 0.20
5. Carlos Gaeta López (SNL / Agnes Gonyha, 4to): 0.19
6. Isaac Berrones Blanco (SNL / Salesiano): 0.19

Campeones de Sede

Canguro

MTH: Juan Pablo Arriaga García (COBACH 03) SNL: José Ramón Guardiola Espinosa (ITESM) RIO: Armando Márquez Díaz (COBACH 05) CDV: Gregg Martínn Martínez Cruz (CBTis 46) TNC: Augusto Santiago Santiago (Lorenzo Asterio Chavarría) MTL: José Antonio Barrera Pérez (COBACH 21) TMZ: Juan Luis García Guerrero (Justo Sierra Méndez)

Mini Canguro

MTH: Gabriela Quetzalli Bravo Flores (Emiliano Zapata) SNL: Andrea Marcela López de la Cruz (Instituto Cultural Manuel José Othón) RIO: Leonardo Martínez Sánchez (Manuel Ávila Camacho) CDV: Christoper Guerrero Castillo (Pedro Antonio de los Santos) TNC: Shai Yael Moreno Estrada (Jesús Romero Flores) MTL: Sandra Paloma Rubio Hernándes (Belisario Domínguez) TMZ: Rogelio Rubio Rubio (Pedro Antonio de los Santos)

Walabi

MTH: José Ángel Rodríguez Leija (Presidentes de México) SNL: Diana Espinosa Ruiz (Antonio Alzate) RIO: Ana Pao de la Torre Páramo (Mariano Moctezuma) TNC: Víctor Alan (Miguel Hidalgo) MTL: Dara Nereida Villegas Ortiz (Emiliano Zapata)

Mini Walabi

MTH: Eduardo Jaziel Juárez Martínez (Presidentes de México) SNL: Carlos Gaeta López (Agnes Gonyha) MTL: Pedro Adiel Villegas Ortiz (Emiliano Zapata)

Capítulo 1

Enunciados de los Problemas

La I edición de la I Olimpiada de Otoño es la más extraña de todas. En total hubo 4 categorías, pero el examen fue el mismo para todos. La diferencia radicaba en cuáles problemas se pedía que resolviera cada categoría: las categorías mayores debían resolver lo mismo que las menores *y algo más*.

El resultado fue un examen un poco confuso y, para la categoría mayor, extremadamente largo: fueron en total $25+15+6 = 56$ problemas entre opción múltiple, respuesta cerrada y respuesta construida, un verdadero maratón. Es por eso que en este concurso se eligieron ganadores con un puntaje normalizado.

Sección I

Problema 1. La suma de tres números impares consecutivos es igual a 27. ¿Cuál es el número más pequeño de esos tres?

(a) 11 (b) 9 (c) 8 (d) 7 (e) 5

Problema 2. Utilizando cada una de las cifras $1, 2, 3$ y 4 se pueden escribir diferentes números, por ejemplo, podemos escribir 3241. ¿Cuál es la diferencia entre el más grande y el más pequeño de los números que se construyen así?

(a) 2203 (b) 2889 (c) 3003 (d) 3087 (e) 3333

Problema 3. Si se dibujan un círculo y un rectángulo en la misma hoja, ¿cuál es el máximo número de puntos comunes que pueden tener?

(a) 2 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) 8

Problema 4. el entrenador más experimentado del circo necesita 40 minutos para lavar un elefante. Su hijo lleva a cabo la misma tarea en 2 horas. ¿Cuántos minutos tardarán el entrenador y su hijo en lavar 3 elefantes trabajando juntos?

(a) 30 (b) 45 (c) 60 (d) 90 (e) 100

Problema 5. ¿Qué dígitos hay que eliminar en el número 4921508 para obtener el número de tres dígitos más pequeño posible?

(a) 4, 9, 2, 1 (b) 4, 2, 1, 0 (c) 1, 5, 0, 8 (d) 4, 9, 2, 5 (e) 4, 9, 5, 8

Problema 6. Si efectuamos la multiplicación de todos los números impares entre 1 y 101, ¿cuál es la cifra de las unidades del resultado?

(a) 1 (b) 3 (c) 5 (d) 7 (e) 9

Problema 7. José Luis cortó un cuadrado de papel que tenía $20cm$ de perímetro y obtuvo dos rectángulos. Si el perímetro de uno de los rectángulos recortados es $16cm$, ¿cuál es el perímetro del otro?

(a) $8cm$ (b) $9cm$ (c) $12cm$ (d) $14cm$ (e) $16cm$

Problema 8. ¿Cuántos $5's$ se usan al escribir todos los números del 1 al 170?

(a) 36 (b) 38 (c) 20 (d) 22

Problema 9. En el primer piso de un hotel están los cuartos $1, 4, 7, 10, 13, 16, \ldots$. En el segundo piso están los cuartos $2, 5, 8, 11, 14, 17, \ldots$. Y en el tercer piso están los cuartos $3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots$. ¿En qué piso está el cuarto 2011?

(a) Primero (b) Segundo (c) Tercero (d) No se puede saber

Problema 10. Consideremos los números de 5 cifras formados por los dígitos 1 y 2. ¿En cuántos de ellos el 1 aparece más veces que el 2?

(a) 20 (b) 16 (c) 32 (d) 18

Problema 11. Luis Miguel compró una bolsa con 101 caramelos de 5 colores: 18 eran blancos, 39 eran amarillos, 21 rojos, 11 verdes y 12 cafés. Decidió comerse los caramelos de la siguiente manera: sacaba 3 caramelos de la bolsa sin mirar. Si los 3 eran del mismo color, se los comía, si no, los regresaba a la bolsa. Continuó así hasta que solo quedaron dos caramelos en la bolsa. ¿De qué color eran?

(a) Blancos (b) Amarillos (c) Rojos (d) Verdes (e) Cafés

Problema 12. ¿Cuántos números distintos de tres cifras se pueden formar usando los dígitos $0, 1, 1, 2, 2, 2$?

(a) 18 (b) 17 (c) 16 (d) 15

Problema 13. A una cantidad le sumo su $10\,\%$, y a la cantidad así obtenida le resto su $10\,\%$. ¿Qué porcentaje de la cantidad original me queda?

(a) 98 (b) 99 (c) 100 (d) 101 (e) 102

Problema 14. Una operación $*$ entre números enteros está definida por

$$a * b = 2 \times a + 3 \times b.$$

Calcula el valor de

$$(((1 * 2) * 3) * 4) * 5$$

(a) 62 (b) 71 (c) 120 (d) 139

Problema 15. Alicia va al club cada día; Beatriz va cada 2 días; Carlos va cada 3; Daniel cada 4; Enrique cada 5; Francisco cada 6 y Gabriela cada 7. Si hoy están todos en el club, ¿dentro de cuántos días será la primera vez que vuelvan a reunirse?

(a) 27 (b) 28 (c) 210 (d) 420 (e) 5040

Problema 16. Considera la sucesión $1, 2, 4, 5, 8, 9, 13, 14, 19, 20, \ldots$ que se forma sumando 1 al 1, al número obtenido se suma 2, luego al resultado se suma 1, luego se suma 3, luego 1, luego 4, así sucesivamente alternando la suma de 1 y luego la suma de n. ¿En qué paso de este proceso se está más cerca de 1996?

(a) 104 (b) 124 (c) 132 (d) 158

Problema 17. Los lados de un triángulo miden $15, 20, 25$. De los siguientes números, ¿cuál de ellos no es la longitud de una altura del triángulo?

(a) 25 (b) 20 (c) 15 (d) 12

Problema 18. ¿Cuál es el dígito de las unidades del número $14^{14} + 15^{15} + 16^{16}$?

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7

Problema 19. ¿Cuál es el número de 10 cifras diferentes tal que el número formado por sus dos primeros dígitos (de izquierda a derecha) es divisible entre 2, el número formado por sus tres primeros dígitos es divisible entre 3, y así sucesivamente hasta el número formado por sus nueve primeros dígitos, que es divisible entre 9, y el número es divisible entre 10?

(a) 3816547290 (b) 1836547290 (c) 1234567890 (d) 9276548130

Problema 20. Si en un viaje de $100km$, un coche recorre los primeros $25km$ a $80km/h$ y los últimos $75km$ a $100km/h$, ¿a qué velocidad promedio hizo todo el viaje?

(a) $90km/h$ (b) $76{,}19km/h$ (c) $75{,}12km/h$ (d) $82{,}33km/h$

Problema 21. Sea $\triangle ABC$ un triángulo isósceles cuyo perímetro es 32 y cuya altura sobre el lado desigual es 8. ¿Cuál es el valor del área del triángulo?

(a) 32 (b) 36 (c) 40 (d) 48

Problema 22. Un comerciante aumenta en 20 % el precio de un producto. Como no se vende, decide ponerlo de barata. ¿Qué descuento debe dar sobre el nuevo precio para regresar al precio original?

(a) 20 % (b) 18,3 % (c) 16,3 % (d) 21 %

Problema 23. ¿Cuántas ternas x, y, z de números reales satisfacen el sistema

$$x(x + y + z) = 26$$

$$y(x + y + z) = 27$$

$$z(x + y + z) = 28?$$

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) ninguna

Problema 24. ¿Cuál es el último dígito de

$$2011^{2011} + 2013^{2013} + 2015^{2015} + 2017^{2017}?$$

(a) 1 (b) 9 (c) 6 (d) 4

Problema 25. Si $a + b = 1$ y $a^2 + b^2 = 2$, entonces $a^3 + b^3$ es igual a

(a) 4 (b) $\frac{5}{2}$ (c) 3 (d) $\frac{7}{2}$

Sección II

Problema 26. Yo saló de mi casa en automóvil a las 8 de la mañana. Un automóvil que va al doble de mi valocidad sale también de mi casa, me alcanza exactamente a la mitad del camino y llega $1:30h$ antes que yo a nuestro lugar de destino. ¿A qué hora salió el otro automóvil?

Problema 27. Orlando, Chuy, Manuel, Trinidad y Luis salieron a jugar partidos de tenis. Como solo llevaban cuatro raquetas, en cada partido solo jugaron 4 de ellos. Orlando jugó 5 partidos y fue el que menos jugó, mientras que Trinidad jugó 8 partidos y fue el que más jugó. ¿Cuántos partidos se jugaron en total?

Problema 28. En una extraña ciudad, los números de teléfono tienen 4 dígitos. Los primeros dos dígitos de izquierda a derecha pueden ser solo 10 o 73. Además, los números siempre son múltiplos de 5 y contienen exactamente un dígito par. ¿Cuántos números de teléfono hay con estas condiciones?

Problema 29. Tenemos tres cubetas, con capacidades de $2, 4, 7$ litros, respectivamente. Para llenar un tinaco de 100 litros, disponemos de una toma de agua cerca del tinaco. ¿Cuál es el mínimo número de vueltas que debemos realizar entre el tinaco y la toma de agua para llenar el tinaco, sin que sobre agua en las cubetas, si en cada vuelta podemos cargar máximo dos cubetas?

Problema 30. ¿Qué número sigue: $2, 3, 5, 9, 17, 33, ...$?

Problema 31. Se tienen 6 sabores diferentes de helados. Ernesto quiere comprar un helado con dos bolas. ¿Cuántas posibles combinaciones puede hacer?

Problema 32. La maestra distribuyó la misma cantidad de dulces entre cada uno de sus 5 niños y se quedó con 3 dulces para ella misma. No se acuerda cuántos dulces tenía, pero se acuerda que era un múltiplo de 6 entre 465 y 100. ¿Cuántos dulces tenía?

Problema 33. En un concurso de baile, los jueces califican a los competidores con números enteros. El promedio de las calificaciones de un competidor es de 5,625. ¿Cuál es el mínimo número de jueces para que esto sea posible?

Problema 34. De entre los números del 1 al 100, se eligen aquellos que tengan la mayor cantidad de divisores. Se suman los números que se eligieron. ¿Cuántos divisores tiene el resultado de la suma?

Problema 35. La superficie de un cubo expresada en centímetros cuadrados es igual al volumen del cubo expresado en centímetros cúbicos. ¿Cuál es la longitud de la arista del cubo?

Problema 36. ¿Cuántos números entre 5678 y 9876 tienen la propiedad de que el producto de sus cifras es igual a 343?

Problema 37. Encuentra el número de dos dígitos tal que el triple de la suma de sus dígitos sea igual a dicho número.

Problema 38. Odalys se baña solo los días del mes que son números primos. ¿Cuántas veces se bañará en un periodo de 4 años?

Problema 39. El producto de tres números enteros positivos es 1500 y su suma es 45. ¿cuál es el mayor de estos tres números?

Problema 40. Enlista todas las parejas de enteros positivos (a, b) que satisfacen la ecuación $a^2 - b^2 = 15$.

Sección III

Problema 41. Con los dígitos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ y 7 se forman números cuyas cifras suman 9. ¿Cuántos de esos números que sean menores que 5000 y no tengan cifras repetidas se pueden formar? Explica por qué.

Problema 42. En una calle hay 8 casas numeradas del 1 al 8. Se usarán 4 colores diferentes para pintarlas (cada casa será pintada de un solo color, sin combinarse). ¿De cuántas formas diferentes se pueden pintar las casas si al menos debe haber una de cada color?

Problema 43. Un número se dice *panchillo* si al sumar sus subpedacitos tenemos un número con la misma cantidad de cifras y con el orden inverso al número original. Los subpedacitos se eligen de la siguiente manera: si el número es de 4 cifras, por ejemplo 5678, los subpedacitos son: $5, 6, 7, 8, 56, 67, 78, 567$ y 678. Si es de tres cifras, por ejemplo 345, los subpedacitos son: $3, 4, 5, 34$ y 45. Encuentra todos los números *panchillos* menores que $10,000$.

Problema 44. El rey de Ranilandia está moribundo y quiere repartir su herencia entre dos hijos. La herencia consta de 50 objetos que valen: el primero 1 quack, el segundo 2 quacks, el tercero 3 quacks y así sucesivamente hasta el objeto 50, que vale 50 quacks.

1. ¿Será posible que los objetos que herede el hijo mayor valgan exactamente el doble de los que herede el hijo menor? En caso afirmativo, muestra cómo repartir los objetos. (No se pueden vender ni partir.)

2. Supongamos ahora que el rey perdió el objeto que vale 50 quacks y que quiere repartir la herencia según las mismas reglas que en el inciso anterior. ¿Podrá hacerlo?

Problema 45. Sea $ABCD$ un cuadrado y P un punto en el lado BC distinto de B y de C. Considera el cuadrado $APRS$ (con B exterior a ese cuadrado). Encuentra la medida del ángulo $\angle ACR$.

Problema 46. Sea n un entero positivo. Generamos una sucesión de la siguiente manera: el primer término es n, y a partir de ahí, el siguiente término es la cantidad de divisores del número anterior. Por ejemplo, si $n = 2048$, la sucesión es $2048, 12, 6, 4, 3, \ldots$. Encuentra, con justificación, todos los enteros positivos m tales que en la secuencia no aparezca ningún cuadrado perfecto.

Soluciones a los problemas

Sección I

Solución Problema 1. La respuesta es 7. Probamos cada una de las opciones:

- $11 + 13 + 15 = 39$
- $9 + 11 + 13 = 33$
- 8 no es impar
- $7 + 9 + 11 = 27$
- $5 + 7 + 9 = 19$

Sin verificar las opciones, si el número más pequeño es x, entonces los siguientes dos son $x + 2$ y $x + 4$. La suma de los tres es $x + x + 2 + x + 4 = 3x + 6 = 27$ de donde $3x = 21$ y $x = 7$.

Solución Problema 2. La respuesta es 3087. El número más grande que podemos formar es 4321 y el más pequeño es 1234. Calculamos su diferencia como $4321 - 1234 = 3087$.

Solución Problema 3. La respuesta es 8. Cada lado del rectángulo, al ser una recta, puede cruzar el círculo en $0, 1$ o 2 puntos. Luego, lo más que podríamos hacer con cuatro lados es que cada uno cruzara el círculo en 2 puntos distintos, de donde obtenemos 8 en total. Este es un ejemplo:

Solución Problema 4. La respuesta es 90. Imaginamos el elefante dividido en 120 secciones. En cada minuto, el hijo del entrenador lava 1 de esos pedazos. En cada minuto, el entrenador lava 3 de esos pedazos, pues $40 \times 3 = 120$. Entonces, si trabajan juntos pintan 4 pedazos de 120 cada minuto. Como $120 \div 4 = 30$, tardan 30 minutos en lavar un elefante trabajando juntos y tardarían $30 \times 3 = 90$ minutos en lavar tres elefantes trabajando juntos.

Solución Problema 5. La respuesta es $4, 9, 2, 5$. El número más pequeño es el que tenga menos centenas. Entonces, quisiéramos que el 1 fuera el dígito de las centenas y para eso hay que eliminar $4, 9$ y 2. Como tenemos que eliminar un número más, podemos comparar cuál de las 3 posibilidades es el más pequeño: $150, 108, 158$. El más pequeño es 108 por lo que hay que eliminar el 5.

Solución Problema 6. La respuesta es 5. Todos los números que estamos multiplicando son impares y el 5 es uno de ellos, así que el resultado es un múltiplo de 5. Todos los múltiplos impares de 5 terminan en 5.

Solución Problema 7. La respuesta es $14cm$. Si el cuadrado tiene 20 centímetros de perímetro, cada uno de sus lados mide $5cm$. Dos de los lados de los nuevos rectángulos miden $5cm$ cada uno, pues la manera de partir en dos rectángulos es con una recta paralela a los lados. Si uno mide $16cm$ y dos de sus lados miden $5cm$, los otros dos suman 6 y son iguales, por lo que miden $3cm$ cada uno. Si pegamos los rectángulos obtenemos un cuadrado de lado 5, así que $5 - 3 = 2cm$ es la medida de los lados del otro rectángulo. Concluimos que el perímetro es $5 + 2 + 5 + 2 = 14cm$.

Solución Problema 8. La respuesta es 37. El 5 aparece como dígito de las unidades una vez por decena. Del 1 hasta el 170 son 17 decenas completas, así que el 5 ha aparecido 17 veces. Además, aparece en todos los números de la decena del 50 y del 150. En total son $10 + 10 + 17 = 37$ dígitos 5.

Solución Problema 9. La respuesta es "Primero". Veamos que en el tercer piso están todos los múltiplos de 3. Como 2010 es múltiplo de 3, debe estar en el tercer piso. Entonces, 2011 está en el siguiente piso, que es el primero.

Solución Problema 10. La respuesta es 16. Si hay más $1s$ que $2s$, entonces tenemos 3 casos: puede haber cinco $1s$, puede haber cuatro $1s$ o puede haber tres $1s$.

- Si hay cinco $1s$, el único número es 11111.
- Si hay cuatro $1s$, tenemos $11112, 11121, 11211, 12111, 21111$.
- Si hay tres $1s$, tenemos $11122, 11212, 12112, 21112, 11221, 12121, 21121, 12211, 21211, 22111$.

En total son $1 + 5 + 10 = 16$ números.

Solución Problema 11. La respuesta es "Verdes". Se come los caramelos de 3 en 3, así que se come todos los de cualquier color si hay una cantidad múltiplo de 3. Como $18, 39, 21, 12$ son todos múltiplos de 3, de los que sobran son verdes.

Solución Problema 12. La respuesta es 15. Los escribimos todos:

- Usando tres 2: 222.
- Usando dos 2: $221, 212, 122, 220, 202$. (Recuerda que 022 no es un número de tres cifras.)
- Usando un 2: $112, 121, 211, 120, 210, 102, 201$.
- Usando cero 2: $110, 101$.

En total son $1 + 5 + 7 + 2 = 15$.

Solución Problema 13. La respuesta es 99. Empezamos con 100. Le sumamos el $10\,\%$, que es 10; tenemos 110. Le restamos el $10\,\%$, que es 11; tenemos 99.

Solución Problema 14. La respuesta es 139. Hacemos paso por paso, aplicando la fórmula de adentro hacia afuera:

$$1 * 2 = 2 \times 1 + 3 \times 2 = 2 + 6 = 8.$$

$$8 * 3 = 2 \times 8 + 3 \times 3 = 16 + 9 = 25.$$

$$25 * 4 = 2 \times 25 + 3 \times 4 = 50 + 12 = 62.$$

$$62 * 5 = 2 \times 62 + 3 \times 5 = 124 + 15 = 139.$$

Solución Problema 15. La respuesta es 420. Buscamos el mínimo común múltiplo de $2, 3, 4, 5, 6, 7$, que es el mismo que el de $3, 4, 5, 7$. Como estos cuatro números son primos relativos por pareja, su mínimo común múltiplo es su producto, $3 \times 4 \times 5 \times 7 = 420$.

Solución Problema 16. Podemos ver la sucesión de diferencias como $+1, +2, +1, +3, +1, +4, +1, +5, \ldots$ En un paso par, digamos $2n$, hemos sumado n veces 1 y $2 + 3 + \cdots + n$ al número 1; es decir, tenemos el valor $n + \frac{n(n+1)}{2}$. Podemos verificar cada opción:

- $104, n = 52, a_{104} = 52 + \frac{52(53)}{2} = 1430$
- $124, n = 62, a_{124} = 62 + \frac{62(63)}{2} = 2016$
- $132, n = 66, a_{132} = 66 + \frac{66(67)}{2} = 2277$
- $158, n = 79, a_{158} = 79 + \frac{79(80)}{2} = 3239$

Así que estamos más cerca de 1996 en el paso 124.

Solución Problema 17. La respuesta es 25. Observemos que los lados del triángulo cumplen el Teorema de Pitágoras (es un triángulo semejante al $3, 4, 5$ con razón $3 : 1$), así que es un triángulo rectángulo. El lado más grande es la hipotenusa, que no puede ser la longitud de una altura.

Solución Problema 18. La respuesta es 7. El último dígito de una suma es igual a la suma de los últimos dígitos. El último dígito de una multiplicación es la multiplicación de los últimos dígitos. Entonces, el último dígito de $14^{14} + 15^{15} + 16^{16}$ es igual al último dígito de $4^{14} + 5^{15} + 6^{16}$. Las potencias de 5 siempre terminan en 5 y las potencias de 6 siempre terminan en 6. Por lo tanto, buscamos el último dígito de $4^{14} + 5 + 6 \equiv 4^{14} + 1$. Analicemos el comportamiento de las potencias de 4:

- $4^1 = 4$
- $4^2 = 16$
- $4^3 = 64$
- $4^4 = 256$

Las potencias pares de 4 siempre terminan en 6 y las impares en 4. Como 14 es par, 4^{14} termina en 6. Podemos calcular el último dígito como $6 + 1 = 7$.

Solución Problema 19. La respuesta es 3816547290. Eliminamos las opciones una por una. Veamos que (c) no es divisible entre 4, (d) no es divisible entre 8, (b) no es divisible entre 7. Podemos verificar que (a) sí es divisible por cada uno de los números del 1 al 10, por lo que la respuesta correcta es (a).

Solución Problema 20. La respuesta es $94{,}11 km/h$. Viajando a $80 km/h$, recorremos $80 km$ en 1 hora, $40 km$ en $\frac{1}{2}$ hora, $20 km$ en $\frac{1}{4}$ hora, $10 km$ en $\frac{1}{8}$ hora y $5 km$ en $\frac{1}{16}$ hora; para sumar $25 km$ tomamos $\frac{1}{4} + \frac{1}{16}$ hora.

Viajando a $100 km/h$, recorremos $100 km$ en 1 hora, $50 km$ en $\frac{1}{2}$ hora, $25 km$ en $\frac{1}{4}$ hora; para sumar $75 km$ tomamos $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ hora.

Sumando el tiempo, tenemos $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{17}{16}$ hora. Por la fórmula de velocidad promedio que es igual a distancia entre tiempo, calculamos la velocidad como:

$$\frac{100km}{\frac{17}{16}h} = \frac{1600km}{17h} = 94{,}11km/h.$$

Solución Problema 21. La respuesta es 48. Trazamos la altura sobre el lado desigual. Como es un triángulo isósceles, la altura también es mediana, por lo que el lado se divide en dos partes iguales. Esa mitad de la base junto con un lado suman la mitad del perímetro, así que formamos un triángulo rectángulo con dimensiones $x, 8, 16 - x$. Aplicando el Teorema de Pitágoras,

$$x^2 + 64 = (16 - x)^2 = 256 - 32x + x^2,$$

de donde $32x = 192, x = 6$. Por la fórmula del área, tenemos que $\frac{12\times 8}{2} = 48$ es el área del triángulo.

Solución Problema 22. La respuesta es $16{,}7\,\%$. Si el producto valía x, aumentar el precio en $20\,\%$ es lo mismo que multiplicar x por 1,2. Entonces, para volver a obtener x, debemos dividir entre 1,2, o, lo que es lo mismo, multiplicar por $\frac{1}{1{,}2} \approx 0{,}833$. Entonces, el descuento es de $100(1 - 0{,}833) = 100 \times 0{,}167 = 16{,}7\,\%$.

Solución Problema 23. La respuesta es 2. Sumamos las tres ecuaciones para obtener una sola:

$$x(x + y + z) + y(x + y + z) + z(x + y + z) = 81.$$

Factorizamos el término común para obtener:

$$(x + y + z)(x + y + z) = 81,$$

de donde $(x+y+z)\pm 9$. Para cada uno de los valores de $x+y+z$ tenemos una solución, así que tenemos dos soluciones en total.

Solución Problema 24. La respuesta es 6. Usando la misma idea que usamos en el problema 18, transformamos la ecuación en $1 + 3^{2013} + 5 + 7^{2017}$ que es equivalente. Analizamos las potencias de 3 y las de 7:

- $3^0 = 1$ y $7^0 = 1$

- $3^1 = 3$ y $7^1 = 7$
- $3^2 = 9$ y $7^2 = 49$
- $3^3 = 27$ y $7^3 = 343$
- $3^4 = 81$ y $7^4 = 2401$

Entonces, si el exponente es divisible entre 4, la potencia termina en 1. Puesto que tanto 2013 como 2017 son un múltiplo de 4 más 1, 3^{2013} termina en 3 y 7^{2017} termina en 7. Sustituimos, $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ para obtener el último dígito que es 6.

Solución Problema 25. La respuesta es $\frac{5}{2}$. Como $a+b = 1$, entonces $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = (a+b)^3 = 1$. Por otro lado, $(a+b)(a^2+b^2) = a^3+ab^2$‘$a^2b+b^3 = 2$. Multiplicamos la segunda ecuación por 3 y al resultado le restamos la primera ecuación:

$$3a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^2 = 6$$

$$-a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3 = -1$$

$$2a^3 + 2b^3 = 5,$$

de donde podemos ver que $a^3 + b^3 = \frac{5}{2}$.

Sección II

Solución Problema 26. La respuesta es $9:30$. Como me alcanza exactamente a la mitad, hizo la segunda mitad del viaje en $1:30h$ menos que yo. Entonces, también hizo la primera mitad en $1:30h$ menos que yo. Como llegamos al mismo tiempo a la mitad, debió salir $1:30h$ después que yo, es decir, a las $9:30$ de la mañana.

Solución Problema 27. Supongamos que se jugaron 9 juegos. Se necesitan $9\times 4 = 36$ personas jugando. De esas 36, Orlando sería 5 y Trinidad sería 8, quedan $36-5-8 = 23$ que deben cubrir entre chuy, Manuel y Luis. Sin embargo, $7\times 3 = 21 < 23$, así que alguno habría jugado al menos 8, empatando a Trinidad, lo cual no es posible. Como sabemos que al menos se jugaron 8 juegos, que es la cantidad que jugó Trinidad, entonces la respuesta es 8.

Solución Problema 28. La respuesta es 15. Analizamos por casos:

- Empieza en 10. Como el 0 es par, no puede haber más dígitos pares. Como es múltiplo de 5 y no puede tener dígitos pares, el último dígito es 5. Como el tercer dígito tampoco es par, los números posibles son $1015, 1035, 1055, 1075$ y 1095, que son 5 en total.
- Empieza en 73. Como es múltiplo de 5, puede terminar en 0 o 5.
  - Si termina en 5, el tercer dígito tiene que ser par: $7305, 7325, 7345, 7365, 7385$, que son 5.
  - Si termina en 0, el tercer dígito tiene que ser impar: $7310, 7330, 7350, 7370, 7390$, que también son 5.

Hacemos la suma y tenemos 15 en total.

Solución Problema 29. La respuesta es 10. La menor cantidad de viajes se da cuando llevamos la mayor cantidad de agua en cada viaje. En cada viaje podemos llevar $2{+}4 = 6$ litros, $2+7 = 9$ litros, o $4+7 = 11$ litros. Hay varias maneras de sumar 100 en 10 viajes: 8 viajes de 11 litros y 2 viajes de 6 litros, o 5 viajes de 11 litros y 5 viajes de 9 litros. Es fácil ver que no podemos hacerlo en 9 viajes o menos, pues $9 \times 11 = 99 < 100$, es decir, ni siquiera haciendo puros viajes con la mayor cantidad de agua posible alcanzamos.

Solución Problema 30. La respuesta es 65. El primer número es $1 + 1$. El segundo número es $2+1$. El tercer número es $4+1$. El cuarto número es $8+1$. El quinto número es $16+1$. El sexto número es $32+1$. A cada paso, el número "base" se duplica y después se le aumenta 1. Entonces, el séptimo número debería ser

$$(32 \times 2 + 1 = 64 + 1 = 65.$$

Solución Problema 31. La respuesta es 21. Como un helado de vainilla y chocolate es lo mismo que un helado de chocolate y vainilla, basta con elegir los dos sabores. Si son dos sabores distintos, entonces tenemos $\frac{6\times 5}{2} = 15$ combinaciones distintas; si es el mismo sabor dos veces, entonces son 6 combinaciones. En total tenemos $15 + 6 = 21$ posibles helados.

Solución Problema 32. La respuesta es 78. Encontramos todos los múltiplos de 6 entre 65 y 100: $66, 72, 78, 84, 90, 96$. Si al restarle 3 obtenemos un número divisible entre 5, debe terminar en 3 u 8; el único que cumple es 78.

Solución Problema 33. La respuesta es 8. Veamos que $5{,}625 = 5 + \frac{5}{8}$. Si esto es un promedio, es el resultado de dividir entre alguna cantidad (de jueces). El menor entero por el que tenemos que multiplicar esta fracción para obtener un entero es 8.

Solución Problema 34. La respuesta es 8. La mayor cantidad de divisores para un número del 1 al 100 es 12, y son 5 números: $60, 72, 84, 90, 96$. Su suma es 402, que tiene exactamente 8 divisores.

Solución Problema 35. La respuesta es 6. Si la arista del cubo mide x, entonces su volumen vale x^3 y la superficie de cada una de sus caras vale x^2. Como tiene 6 caras, la superficie del cubo vale $6x^2$. Si tenemos que $x^3 = 6x^2$ es porque $x = 6$.

Solución Problema 36. La respuesta es 3. Primero, necesitamos ver qué números multiplicados nos dan 343. Veamos que $343 = 7^3$, por lo que los dígitos solo pueden ser 7 o 1. Para que sea mayor que 5678, el primer dígito debe ser 7; hay tres números que cumplen: $7771, 7717, 7177$.

Solución Problema 37. La respuesta es 27. Los dígitos del número serán a y b. Entonces, el número de dos dígitos lo podemos ver como $10a + b$ y queremos encontrar números tales que $10a + b = 3a + 3b$. Simplificando la expresión anterior, tenemos que $7a = 2b$. Como 2 y 7 son primos relativos, la igualdad solo se puede dar cuando a es múltiplo de 2 y b es múltiplo de 7. Como además deben ser dígitos, la única solución es 27.

Solución Problema 38. La respuesta es 505. Los meses tienen 31 o menos días. Hacemos la lista de primos hasta el 31: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31$. Los meses de 31 días tienen 11 días primos; los meses de 30 días tienen 10 días primos; los meses de 29 días tienen 10 días primos; y los meses de 28 días tienen 9 días primos.

Cada 4 años tenemos un año bisiesto. Entonces, tenemos 1 mes de 29 días, 3 meses de 28 días, 16 meses de 30 días y 28 meses de 31 días. Entonces, son

$$10 + 3 \times 9 + 16 \times 10 + 28 \times 11 = 10 + 27 + 160 + 308 = 505.$$

Por lo tanto, Odalys se baña solo 505 días cada 4 años.

Solución Problema 39. La respuesta es 30. Como $1500 = 2^2 \times 3 \times 5^3$, entonces tiene $3 \times 2 \times 4 = 24$ divisores. Escribimos los que son menores que 45: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 25, 30$. Veamos que es posible una solución usando 30: $30 + 10 + 5 = 45$ y $30 \times 10 \times 5 = 1500$. Luego, 30 es el mayor.

Solución Problema 40. La respuesta es $(8, 7), (4, 1)$. Transformamos nuestra expresión a

$$(a + b)(a - b) = 15.$$

Los divisores de 15 son $15, 5, 3$ y 1. Como $a + b > a - b$ para enteros positivos, debemos tener que $a + b = 15$ o $a + b = 5$. analizamos cada caso:

- Si $a + b = 15, a - b = 1$, entonces $2a = 16, a = 8$ y $b = 7$.
- Si $a + b = 5, a - b = 3$, entonces $2a = 8, a = 4$ y $b = 1$.

Por lo tanto, hay solo dos parejas que satisfacen y son $(8, 7)$ y $(4, 1)$.

Sección III

Solución Problema 41. Vamos a separar en casos, para 4 dígitos y después para 2. Está claro que con solo 1 dígito no se puede. En todos los casos vamos a considerar el 0. Cuando el 0 sea el primer dígito, entonces tenemos menos dígitos: por ejemplo, el número 0123 tiene solo 3 cifras y no 4.

- Con 4 y 3 dígitos:
  - $0 + 1 + 2 + 6$
  - $0 + 1 + 3 + 5$
  - $0 + 2 + 3 + 4$
- Con 3 y 2 dígitos:
  - $1 + 8 + 0$
  - $2 + 7 + 0$
  - $3 + 6 + 0$

- $4+5+0$

Ahora, para cada combinación, vemos cuántos números menores que 5000 podemos formar:

1. $(0,1,2,6)$. El 6 no puede ser el primer dígito. Para cada uno de los demás hay 6 números distintos que podemos formar. En total son 18.

2. $(0,1,3,5)$. El 5 no puede ser el primer dígito. Para cada uno de los demás, hay 6 números distintos que podemos formar. En total son 18.

3. $(0,2,3,4)$. Cualquiera puede ser el primero. En total, podemos hacer 24 números distintos.

4. Para cada una de las tercias tenemos 6 combinaciones distintas. Si son 4 tercias, tenemos 24 números distintos.

En total tenemos $18+18+24+24=84$ números que cumplen.

Solución Problema 42. Vamos a escribir 8 como suma de cuatro enteros positivos: $(1,1,1,5),(1,1,2,4),(1,1,3,3),(1,2,2,3),(2,2,2,2)$ Cada uno de estos casos se resuelve como sigue, indicando primero las permutaciones de esta suma y elegir las casas que se pintan de cada color:

- $(1,1,1,5)$: $\frac{4!}{3!}\binom{8}{1}\binom{7}{1}\binom{6}{1}\binom{5}{5}=4\times 8\times 7\times 6\times 1=1344$.
- $(1,1,2,4)$: $\frac{4!}{2!}\binom{8}{1}\binom{7}{1}\binom{6}{2}\binom{4}{4}=12\times 8\times 7\times 15\times 1=10080$.
- $(1,1,3,3)$: $\frac{4!}{2!2!}\binom{8}{1}\binom{7}{1}\binom{6}{3}\binom{3}{3}=6\times 8\times 7\times 20\times 1=6720$.
- $(1,2,2,3)$: $\frac{4!}{2!}\binom{8}{1}\binom{7}{2}\binom{5}{2}\binom{3}{3}=12\times 8\times 7\times 10\times 1=6720$.
- $(2,2,2,2)$: $\frac{4!}{4!}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}=1\times 28\times 15\times 6\times 1=2520$.

En total, son $1344+10080+6720+6720+2520=27384$.

Solución Problema 43. José Ramón Guardiola Espinosa. Los números de un dígito no pueden ser panchillos pues no tienen subpedacitos. Tampoco hay panchillos de dos dígitos. Si hubiera uno de la forma $10a+b$ con a,b dígitos, debería cumplir $a+b=10b+a$ y eso solo pasa si $b=0$, pero entonces $10b+a$ no sería un número de dos dígitos como originalmente era $10a+b$.

Los números panchillos de tres dígitos abc cumplen que

$$a+b+c+10a+b+10b+c=100c+10b+a$$

$$10a+2b=98c.$$

Veamos que $c=1$, pues $10a+2b\leq 90+18=108$. Además, si $c=0$, entonces $a=b=0$ y no podemos formar un número de tres dígitos. Tenemos soluciones con $a=9,b=4,a=8,b=9$ y los números son $941,891$.

Haciendo el mismo procedimiento para un número de cuatro dígitos $abcd$, sumando todos los subpedacitos, llegamos a que $110a + 112b = 997d + 77c$. Veamos que si $d = 0$, entonces $a = b = 0$, que no queremos. Además, tenemos que $110a + 112b < 997(2)$ pues $a, b \leq 9$. La única opción es $d = 1$.

Si estudiamos la expresión módulo 11, tenemos que $2b \equiv 7$, de donde $b = 9$. Tenemos ahora que $110a + 1008 = 997 + 77c$, es decir, $110a + 11 = 77c, 10a + 1 = 7c$, cuya única solución con c un dígito es $a = 2, c = 3$. Tenemos el único panchillo de cuatro dígitos es 2931.

Como ya resolvimos para uno, dos, tres y cuatro dígitos, ya encontramos todos los panchillos menores a 10,000: $891, 941, 2931$.

Solución Problema 44. Patricio Noyola.

1. Agrupamos los objetos de esta manera: descartamos el 50 y al 25 y separamos los demás de manera que queden en parejas que sumen 50 cada una: el 49 con el 1, el 48 con el 2, el 47 con el 3 y así sucesivamente, hasta el 26 con el 24. En total, tenemos 24 parejas que suman 50. Entonces, si al menor le damos 8 de las parejas y el objeto 25, tendría la mitad que el mayor que tiene 16 parejas y el objeto 50.

2. Si pierde el objeto que vale 50, ahora el valor total de la herencia es $1275 - 50 = 1225$ que no es divisible entre 3. Por lo tanto, no es posible.

Solución Problema 45. José Ángel Sosa Salinas. Digamos que $\angle BAP = \alpha$. Luego, el ángulo $\angle APB = 90° - \alpha$, porque $\triangle ABP$ es un triángulo rectángulo. El ángulo $\angle APR = 90°$, entonces el ángulo $\angle RPC = \alpha$ por ser el complementario.

Una diagonal de un cuadrado divide al ángulo en dos ángulos de 45°, y trazamos la diagonal AC, por lo que

$$\angle BAC = 45° = \angle BAP + \angle PAC = \alpha + \angle PAC \longrightarrow \angle PAC = 45° - \alpha.$$

Ahora trazamos la diagonal AR del cuadrado $APRS$, entonces tenemos que

$$\angle PAR = 45° = \angle PAC + \angle CAR = 45° - \alpha + \angle CAR \longrightarrow \angle CAR = \alpha.$$

Y como el ángulo $\angle CAR = \angle CPR$, que comparten CR, entonces el cuadrilátero $PARC$ es cíclico, por lo que $\angle APR = \angle ACR$, pero $\angle APR$ es una esquina del cuadrado $APRS$, por lo que mide 90°, y concluimos que $\angle ACR$ también mide 90°.

Solución Problema 46. Veamos que $n \geq d(n)$, donde $d(n)$ es la cantidad de divisores de un número, y que la igualdad se da únicamente en $n = 2$. Esto debe ser claro, pues $n - 1$ no divide a n para $n > 2$.

Entonces, para cualquier m, la sucesión $m, d(m), d(d(m)), d(d(d(m))), \ldots$ es estríctamente decreciente y está acotada inferiormente por 2, pues únicamente 1 tiene un divisor. Por lo tanto, la sucesión debe alcanzar el valor mínimo 2.

Por definición, un número tiene exactamente 2 divisores positivos únicamente si es primo. Entonces, en algún lugar de la sucesión tenemos un número primo mayor que 2 y, después de él, solo tenemos $2, 2, 2, \ldots$, pues $d(2) = 2$. Como es un número primo mayor que 2, es un número impar.

Un número m tiene una cantidad de divisores impar si y solo si m es un cuadrado perfecto. Entonces, como toda sucesión llega al 2, toda sucesión tiene un número primo. Si dicho primo no es el primer término de la sucesión, su predecesor es un cuadrado perfecto. Como no queremos que haya cuadrados perfectos en la sucesión, hacemos que el primo sea el primer número de la sucesión: $p, 2, 2, 2, \ldots$

Esto demuestra que todos los primos cumplen y que todos los que cumplen son primos.

El Centro de Alto Rendimiento en Matemáticas fue fundado en 2011 en San Luis Potosí, México. Desde entonces, nos hemos dedicado a la preparación de estudiantes, profesores y familias para distintos concursos de matemáticas, principalmente aquellos que caen bajo el paragüas de Olimpiada de Matemáticas. Hemos tenido la oportunidad de trabajar con cientos de estudiantes muy talentosos, dentro y fuera de la Olimpiada, en todo México y partes de América Latina.

En CARMA estamos comprometidos con la educación matemática, con proporcionar un espacio accesible y seguro donde todos, todas y todes puedan continuar su preparación olímpica permanente, dar sus primeros y segundos pasos en concursos, o acercarse a las matemáticas desde una perspectiva lúdica y un aprendizaje basado en problemas.

Para más información sobre CARMA: Centro de Alto Rendimiento en Matemáticas, te presentamos los siguientes enlaces:

- Cursos en https://cursos.carmaenlinea.com/
- Concursos en https://concursos.carmaenlinea.com/.
  Anualmente organizamos Olimpiada Femenil (febrero-marzo), Olimpiada Virtual de Matemáticas (agosto) y Olimpiada de Otoño (septiembre-octubre).
- Nuestra página de Facebook en http://fb.com/carmatematicas
- Nuestro canal de YouTube en https://youtube.com/carma2011
- El canal de YouTube de ugesaurio en https://www.youtube.com/ugesaurio

CENTRO DE ALTO RENDIMIENTO EN MATEMATICAS

CARMA

·2011·

CENTRO DE ALTO RENDIMIENTO EN MATEMATICAS

CARMA

·2011·