Centro de Alto Rendimiento en Matemáticas

IX Olimpiada de Otoño: 2019

Problemas y soluciones

IX Olimpiada de Otoño

Equipo CARMA

18 de enero de 2022

Enero 2022

Para cualquier correción, por favor comunícate con nosotros vía Facebook o a nuestro correo electrónico en matematicascarma@gmail.com.

Una versión preliminar de este material fue compilada por Cecilia Hernández, revisada por Luis Islas. La persona a cargo del material es Danielle Flores.

Primera edición: Enero 2022

Editorial Dinosaurio
San Luis Potosí, México
`carmatematicas (at) gmail (dot) com`

Introducción

La IX Olimpiada de Otoño se celebró en octubre de 2019, de manera presencial pero a distancia. Participaron en total 3490 estudiantes en las categorías de Cuyo (440), Koala (721), Walabi (1075), Canguro (727), Uombat (430) y Ardilla (18). Esta Olimpiada se celebró de manera presencial en 89 sedes distintas en todo México. Agradecemos la participación entusiasta de cada una de las sedes, a saber:

- AGS: Aguascalientes ESG 38
- AGS: Aguascalientes Sanford
- AGS: Aguascalientes UAA
- BC: Ensenada
- BC: Tijuana del Valle
- BCS: Cabo Delmar
- BCS: Cabo Gauss Euler
- BCS: Instituto Santa María
- BCS: La Paz Carrillo
- BCS: San José del Cabo Mauricio Pino Orozco
- CDMX: Venustiano Carranza
- CHIH: Chihuahua CUU
- CHIH: Cobach SEA
- CHIH: Juárez UACJ IIT
- CHIS: Comitán de Domínguez
- CHIS: Ocozocuautla
- CHIS: San Cristóbal Poniente
- CHIS: Tuxtla Gutiérrez
- COA: Torreón Británico

- COA: Torreón Cervantes
- COA: Torreón Domus
- GRO: COLMEX Chilpancingo
- GTO: Guanajuato Valenciana
- GTO: León CECyT 17
- HGO: Freinet
- HGO: Mineral de la Reforma
- HGO: Tezontepec CA
- JAL: Kumón Ajijic
- JAL: Yahualica
- MEX: EFROMMEX
- MEX: Metepec IMSC
- MEX: Preparatoria Agrícola
- MEX: Texcoco CMA
- MICH: Morelia
- NAY: Bahía de Banderas
- NAY: Tepic del Valle
- NL: Apodaca CEH
- NL: Euro Americano
- NL: Euroamericano Valle
- NL: García
- NL: Monterrey Alef
- NL: Monterrey Alfa
- NL: Monterrey FCFM
- NL: Monterrey IENU
- NL: Monterrey ITESM
- NL: Monterrey Prepa 2 UANL
- NL: Monterrey Prepa 9 UANL

- OAX: El Carrizo Pinotepa
- OAX: Huajuapan de León IFM-UTM
- OAX: Huajuapan IFM-UTM
- OAX: Oaxaca
- OAX: Oaxaca OMMO
- OAX: Santa Ana IEBO 171
- OAX: Tuxtepec José Vasconcelos
- PUE: Puebla CBTA 184
- QR: Cancún MIS
- QR: FCP Leona Vicario
- QRO: Querétaro UAQ
- SIN: Altata Cetmar 28
- SIN: Culiacán del Valle
- SLP: Cedral Cobach 03
- SLP: Ciudad del Maíz
- SLP: Ciudad Valles Sec2
- SLP: Mexquitic Estanzuela
- SLP: Mexquitic Los Moreno
- SLP: Mexquitic Maravillas
- SLP: Mexquitic Monte Obscuro
- SLP: Mexquitic Ojo Zarco
- SLP: San Luis Ciencias
- SLP: San Luis FMdlV
- SLP: San Luis Potosino
- TAB: Atenas Asesorías
- TAB: Paideia
- TAB: Universidad IEU
- TAM: Ocampo Cuauhtémoc

- TAM: Tampico UNITAM
- TAM: Victoria NS
- TLA: Chiautempan Tec 4
- VER: Americano Xalapa
- VER: COATJRC
- VER: Nogales COBAEV
- VER: Xalapa Americano
- VER: Xalapa MateClub
- YUC: Teresiano Tizimín
- ZAC: Zacatecas IPN
- ZAC: Zacatecas Tec

Ganadores

Para cada una de las categorías de la Olimpiada de Otoño (Cuyo, Koala, Walabi, Canguro, Uombat y Ardilla) se entrega Primer Lugar, Segundo Lugar, Tercer Lugar, Mención Honorífica y Gran Pez. En cada categoría se procura que exista únicamente un Primer Lugar y el resto de los premios se otorgan en proporción 1 : 2 : 3 : 4. En particular, el premio de Gran Pez se entrega al mejor participante de cada sede y categoría que no haya obtenido alguno de los otros premios.

Categoría Cuyo

Primer Lugar

Nelly Sofía Palma Barbosa	Instituto Gauss Euler BCS: Cabo

Segundo Lugar

Ana Paula Lizcano Montemayor	IENU NL: Monterrey IENU

Tercer Lugar

Guillermo Emmanuel Martínez Rivera	Instituto Domus COA: Torreón Domus
Alan Vargas Paz	Elise Freinet HGO: Freinet
Andrea Ontiveros Pérez	IENU NL: Monterrey IENU
Ricardo Arturo Villalobos Sámano	Anexa a la normal QRO: Querétaro UAQ
Inti Israel Castillo Suástegui	ICM VER: Xalapa MateClub
Samantha Sarahí Ceballos Morales	Moisés Sánez QR: FCP Leona Vicario

Mención Honorífica

Paola Muñoz Treviño	Instituto Británico De Torreón COA: Torreón Británico
Aldo Said Barrera Espinoza	Colegio Cervantes De Torreón COA: Torreón Cervantes
Isabella Fernanda Barrera	Colegio México de Chilpancingo GRO: COLMEX Chilpancingo
Oscar Emiliano Aguilar Burgoa	Colegio México de Chilpancingo GRO: COLMEX Chilpancingo

Pablo Martins Romero	Elise Freinet HGO: Freinet
Lucas Menchaca Bello	Instituto Educativo Alef NL: Monterrey Alef
Isaac Azael Juárez Martínez	Colegio Real del Fraile SLP: Cedral Cobach 03
Cristian Llanas Castro	Rafael Ramires SLP: Mexquitic Estanzuela
Melanie Hernández Tovar	Rafael Ramires SLP: Mexquitic Estanzuela
Vanessa Yaneth González Pérez	Rafael Ramires SLP: Mexquitic Estanzuela
Ismael Cardenas Cardenas	Apostolica SLP: San Luis Ciencias
Mateo Jesús Cano Rodríguez	Latin American School NL: Monterrey Latin
Mateo Valdés Jiménez	Instituto Sanford AGS: Aguascalientes Sanford
Andrés Cedillo Vázquez	Nueva Era Álamo AGS: Aguascalientes UAA
Uziel Salazar Castro	Mauricio Pino Orozco BCS: San José del Cabo
Fernando Alonso Lara	Instituto La Salle CHIH: Cobach SEA
Raúl Everardo Sifuentes	Colegio Cervantes De Torreón COA: Torreón Cervantes
Monica Nauvu Espericueta Aguirre	Colegio Cervantes De Torreón COA: Torreón Cervantes
Emiliano Hernández Ramírez	Instituto Domus COA: Torreón Domus
María Jaqueline Pérez Lara	Colegio York HGO: Mineral de la Reforma
Alyssa Dali Campos Martínez	Jean Baptiste MEX: EFROMMEX
Valeria Cáceres Maldona	IENU NL: Monterrey IENU
Mateo Santos Panait	IENU NL: Monterrey IENU
Lorena Liseth Rengifo Toledo	Instituto Cultural de la Mixteca OAX: Huajuapan de León IFM-UTM
Jade Elena Velázquez Azamar	Eduardo Vasconcelos OAX: Oaxaca OMMO
Daniel Cuevas García	Rafael Ramires SLP: Mexquitic Estanzuela
Edith Quirino Díaz	Rafael Ramires SLP: Mexquitic Estanzuela
Helena Beltran Molina	Apostólica SLP: San Luis Ciencias
Andrea Moreno Garza	Latin American School NL: Monterrey Latin

Categoría Koala

Primer Lugar

Javier Caram Quirós	Instituto Sucre CDMX: Venustiano Carranza
Sebastian Montemayor Trujillo	Latin American School NL: Monterrey Latin

Segundo Lugar

Sebastián Gutiérrez Suárez	CEYDI SIN: Culiacán del Valle
Rafael Argumedo Solis	Instituto Educativo Ammadeus ZAC: Zacatecas IPN

Tercer Lugar

Eugenia María Cruz Pérez	Casa de Cuna OAX: Oaxaca OMMO

Mención Honorífica

Leonardo Iván Bustamante Parada	Instituto Británico de Torreón COA: Torreón Británico
Alvaro Muñoz Herrera	Instituto Asunción QRO: Querétaro UAQ
Nicolás Santana Boa	CEYDI SIN: Culiacán del Valle
Mónica Yatzary Fernández Atonal	Colegio Esperanza TLA: Chiautempan Tec 4
Jonathan Aldair Martínez Marcelo	Axayacatl CDMX: Venustiano Carranza
Íker Torres Terrazas	Guillermo González Camarena CHIH: Juárez UACJ IIT
Charly Giovany Vidal Rosaldo	José M. García TAB: Atenas Asesorías
Daniel Alonso Márquez Corona	Jean Piaget BC: Ensenada
Andrea Sofía de Jesús Estrada	Carlos Carrillo BCS: La Paz Carrillo
Franco Agustín Castro Cabrera	Mauricio Pino Orozco BCS: San José del Cabo Mauricio Pino Orozco
Roberto Andrés Villalobos Torres	Proyecto Montaña CHIH: Chihuahua CUU
Isaías Rafael López Terrones	Colegio Cervantes de Torreón COA: Torreón Cervantes
Camila Navarrete Moreno	Colegio Cervantes de Torreón COA: Torreón Cervantes
Antonio Gutiérrez Melendez	Juan Francisco Mancinas Casa COA: Torreón Cervantes
Matilde Rivera Sordo	Elise Freinet HGO: Freinet
Karla Jimena Gutiérrez Camacho	Elise Freinet HGO: Freinet
Ian Santiago López Ramírez	Instituto Cultural Bilingüe HGO: Mineral de la Reforma
Artie Aarón Ramírez Villa	Álvaro Obregón JAL: Yahualica
Santiago Molina Lemus	Colegio México Americano MEX: Texcoco CMA
Fernanda Conde Linares	Colegio México Americano MEX: Texcoco CMA
Oscar Santos Santamaria	Colegio Josué Mirlo MEX: Texcoco CMA
Azul Bridget Hernández Peña	Josefa Ortiz de Dominguez NAY: Tepic del Valle
Naomi Cortes y Barbosa Hernández	Josefa Ortiz de Dominguez NAY: Tepic del Valle
Alan Jesús Jiménez Espinosa	Josefa Ortiz de Dominguez NAY: Tepic del Valle
Olaf Daniel Magos Hernández	CEH NL: Apodaca CEH
Cristóbal Álvarez Solares	Centro Educativo Monteverde QR: Cancún MIS
Sebastián Urrutia González	Centro Educativo Monteverde QR: Cancún MIS
Antonio Trejo Avila	Don Bosco QRO: Querétaro UAQ
Sofía Vanesa Cerda García	Apostólica SLP: San Luis Ciencias
Sarahí Brito Ozuna	Apostólica SLP: San Luis Ciencias
Alejandro Villagrán Martínez	Instituto Real de San Luis SLP: San Luis Ciencias
Nadia Marely Ávalos Alvarez	Cuauhtémoc TAM: Ocampo Cuauhtémoc
Juan Carlos Cuamatzi Cuamatzi	Benito Juárez TLA: Chiautempan Tec 4
Ana Guadalupe Báez Rovira	Álvaro Obregon VER: Xalapa MateClub

Categoría Walabi

Primer Lugar

José Sebastián Figueroa Páez	Colegio Pearson BC: Ensenada
Bastian Alejandro López Vázquez	Secundaria Técnica No. 1 OAX: Oaxaca OMMO
Daniel Ramirez Kuhn	Apostólica SLP: San Luis Ciencias

Segundo Lugar

Luis Enrique López Hernández	Instituto Educativo Marie Curie HGO: Mineral de la Reforma

Tercer Lugar

Rogelio Guerrero Reyes	Secundaria General 11 AGS: Aguascalientes UAA
Yessy Sophia Vidal Rosaldo	Técnica 9 TAB: Atenas Asesorías

Mención Honorífica

Emilio Moreno Pérez	Instituto Jean Piaget del Río SIN: Culiacán del Valle
Raúl Ernesto Flores Rentería	Colegio Cervantes de Torreón COA: Torreón Cervantes
Luis Lavariega Meneses	Jaime Torres Bodet OAX: Huajuapan de León IFM-UTM
Jorge Eduardo González Guevara	Colegio México Nuevo QRO: Querétaro UAQ
Juan Pablo Rodas Oliva	Colegio Presidente Kennedy SLP: San Luis Ciencias
Javier Mena Chávez	José Vasconcelos ZAC: Zacatecas Tec
Rolando Soto Carrizales	Instituto Jean Piaget del Río SIN: Culiacán del Valle
Carlos Eduardo Sech Tuoh Cabrera	Colegio Gauss HGO: Mineral de la Reforma
Patricio Rangel Oseguera	Colegio Carol Baur QRO: Querétaro UAQ
Antonio Ley Calderón	Instituto Chapultepec SIN: Culiacán del Valle
José Antonio Miramontes	Colegio del Valle SIN: Culiacán del Valle
Francisco Yanixan Torres de León	Técnica 5 SLP: Cedral Cobach 03
Maria Fernanda Tinajero Sanchez	Instituto Winston Churchill TAM: Tampico UNITAM
Daniel Elías Navarrete Flores	Secundaria Técnica 72 CHIH: Cobach SEA
José Emiliano Olvera Fraire	Colegio Cervantes de Torreón COA: Torreón Cervantes
Natalia García Esquivel	Colegio Cervantes de Torreón COA: Torreón Cervantes
Zaira Isabel Juárez Martínez	Técnica 5 SLP: Cedral Cobach 03
Ana Camila Cuevaz Gonzalez	Instituto Winston Churchill TAM: Tampico UNITAM
Paola Sthepania Delgado Solis	Secundaria Unitam TAM: Tampico UNITAM
Dayana Ximena Meza Arellano	J. Trinidad García de la Cadena ZAC: Zacatecas Tec
Andrés Humberto Panti Berlanda	Latin American School NL: Monterrey Latin
Habid Pablo de Jesús Santiago Chávez	Secundaria General 36 AGS: Aguascalientes UAA

Damaris Paola Castrellón Carrillo	Colegio Cervantes de Torreón COA: Torreón Cervantes
Daira Nájera Salinas	Secundaria del Estado No. 1 CHIS: San Cristóbal Poniente
Galileo López Loreto	CEPAC Jalisco JAL: Yahualica
Ever Juarez Quiñones	Jose Maria Lafragua TLA: Chiautempan Tec 4
Ana Paula González Cancino	Sor Juana Inés de la Cruz CHIH: Chihuahua CUU
Luis Antonio Hernández del Río	Colegio Cervantes de Torreón COA: Torreón Cervantes
Armando Garcia Vivas	Secundaria Tecnica 2 Camxtli TLA: Chiautempan Tec 4
Javier Noé Garibay Martínez	Colegio Bilingüe Anna Freud CHIH: Juárez UACJ IIT
José Ángel Reynaga Álvarez	CEPAC Jalisco JAL: Yahualica
Sofía Reyes Salas	Escuela Secundaria Técnica No. 1 AGS: Aguascalientes Sanford
Erick Alejandro Chávez Albertos	Secundaria Cedros AGS: Aguascalientes UAA
Héctor Manuel Reyes Torres	Técnica 60 CHIH: Juárez UACJ IIT
Sofía Catalina Roldán Medina	Lic. Oscar Pizarro CHIH: Juárez UACJ IIT
Elías Perianza Robles	Colegio la Paz CHIS: Tuxtla Gutiérrez
Hannah Sofía Zavala Cepeda	Colegio Cervantes de Torreón COA: Torreón Cervantes
Ángel Tadeo Sánchez Sánchez	Instituto Henry Walion HGO: Mineral de la Reforma
Axel Tristán Mociño Sánchez	Secundaria Técnica 66 HGO: Mineral de la Reforma
Stephanía Terrazas Trejo	Integra Matemáticas HGO: Tezontepec CA
Laura Villalobos Sámano	Roberto Ruiz Obregón QRO: Querétaro UAQ
Patricio Vallerino Guerrero	Cumbres Querétaro QRO: Querétaro UAQ
Gauden Ronaldo Villaseñor Rodríguez	Prisciliano Sánchez NAY: Tepic del Valle
Adahir Vladislav Cervantes González	Colegio Euro de Texcoco MEX: Preparatoria Agrícola
Oswaldo Hernández	Instituto Colinas BC: Ensenada
Tonathiu Bladimir Hernández González	Instituto Santa María BCS: Instituto Santa María
Alonso Baeza Quevedo	Secundaria Antonio Mijares BCS: San José del Cabo Mauricio Pino Orozco
Alyssa Yuliana Campos Alonso	Alfa Centro 3 NL: Monterrey Alfa
Isabela Loredo Carvajal	Colegio Nuevo Santander TAM: Victoria NS
Deborah Casandra Zamudio Sanchez	TLA: Chiautempan Tec 4
Joselyn Karina Moreno Quevedo	Colegio del Valle SIN: Culiacán del Valle

Categoría Canguro

Primer Lugar

Luis Eduardo Martínez Aguirre	Alfa Fundación NL: Monterrey Alfa

Segundo Lugar

Dariam S. Aguilar García	Instituto Metropolitano BC: Ensenada
Alier Sánchez y Sánchez	Colegio Kukulcán Cancún QR: Cancún MIS

Tercer Lugar

Pedro Antonio González Soto	Preparatoria 7 NL: Monterrey FCFM
David García Maldonado	Instituto Veritam OAX: Oaxaca OMMO

Mención Honorífica

Joaquín Vite Navarro	Escuela Preparatoria Número Uno HGO: Mineral de la Reforma
Saúl Villalobos Fajardo	Instituto San Felipe OAX: Oaxaca OMMO
Kevin Brian Rodríguez Sánchez	CETYS Universidad BC: Ensenada
Aylin Ximena Ocampo Vera	Colegio México de Chilpancingo GRO: COLMEX Chilpancingo
Cynthia Naely López Estrada	Escuela Secundaria Técnica 34 GTO: Guanajuato Valenciana
Diego Alfonso Villarreal Grimaldo	Prepa Tec Campus Cumbres NL: Monterrey ITESM
Emmanuel Alejandro Sánchez Silva	ITESM Campus Zacatecas ZAC: Zacatecas Tec
Axel Josue Gómez Robles	ITESM Campus Hidalgo HGO: Mineral de la Reforma
José Luis Sánchez Jiménez	Camilo Arriaga SLP: San Luis Ciencias
Emiliano Fernández Almazán	Oficial B VER: Xalapa MateClub
Natalia Montserrat Cruz	Liceo Federico Froebel OAX: Oaxaca OMMO
Megan Ixchel Monroy Rodríguez	CECyT 16 HGO: Mineral de la Reforma
Eric Ransom Treviño	Roger Pompa Pérez NL: Monterrey FCFM
Adriana García Arias	Prepa UVM CHIH: Cobach SEA
Víctor Hugo Martínez de León	CBTis 122 CHIH: Cobach SEA
Uriel de Jesús Hernández Guzmán	Prepa 2 NL: Monterrey Prepa 2 UANL
Oscar Jiménez Rodríguez	Universidad del Noroccidente de LatAm BC: Ensenada
Erick Francisco Rangel Sosa	Flavio G. Sifuentes SLP: Cedral Cobach 03
Valentina Acosta Bueno	Apostólica SLP: San Luis Ciencias
Marte Esteban Aparicio Godinez	CBTis 61 TLA: Chiautempan Tec 4
Juan José de Jesús Hernández Beltrán	Alberto Santos de Hoyos NL: Monterrey FCFM
Kevin Alberto Gomez Flores	Alfa Fundación NL: Monterrey Alfa
Ángel Eduardo Gatica Villanueva	Escuela Preparatoria de Matehuala SLP: Cedral Cobach 03
Francisco Javier Santiago Martínez	CIDEB NL: García
Claudia Itzel Pérez Lara	Colegio Gauss HGO: Mineral de la Reforma
Diego Alexander López Oranday	Alfa Fundación NL: Monterrey Alfa
Mariana Amy Martínez Nevárez	Colegio Isabel la Católica NL: Monterrey FCFM
Luis Alejandro Alcaraz Orozco	Secundaria Federal 2 CHIH: Chihuahua CUU
Eashley Brittney Martínez Vergara	CECyT 16 HGO: Mineral de la Reforma
Lina Itzel Martínez Hernández	Prepa 2 NL: Monterrey Prepa 2 UANL
Janet Zuleyda Vázquez Santiago	Universidad IEU TAB: Universidad IEU

Hannia Reyes Soto	Universidad IEU TAB: Universidad IEU
Javier Quintero Hernández	Federal 2 CHIH: Cobach SEA
Espartaco Alvarado González	Alfa Fundación NL: Monterrey Alfa
Jorge Sebastián Reyes Canul	Esc. Sec. Gral. No. 15 Zamna QR: FCP Leona Vicario

Categoría Uombat

Primer Lugar

Pablo Alhui Valeriano Quiroz	Prepa Tec campus Santa Catarina NL: Monterrey ITESM

Segundo Lugar

Elías Garza Valdés	Prepa Tec CEGC NL: Monterrey ITESM

Tercero Lugar

Katia García Orozco	Prepa Tec campus Ciudad Juárez CHIH: Juárez UACJ IIT

Mención Honorífica

Bryan Calderón Rivera	CBTis 128 CHIH: Juárez UACJ IIT
Mauricio Elías Navarrete Flores	CBTis 122 CHIH: Cobach SEA
Fabian Domínguez López	Cobach 11 CHIS: San Cristóbal Poniente
Alfredo Hernánez Estrada	Cobach 03 SLP: Cedral Cobach 03
Josué Alejandro Pérez Lara	Preparatoria No. 4 HGO: Mineral de la Reforma
Rogelio Esaú Aguirre González	Colegio Cervantes de Torreón COA: Torreón Cervantes
Rodrigo	Antonio Muñoz VER: Xalapa MateClub
Itzanami Berlanga Contreras	COBACH 28 SLP: San Luis Ciencias
David Antonio de la Rosa Hernández	CBTis 122 CHIH: Cobach SEA
Adrián Jesús Peña Reséndiz	CECyT 16 HGO: Mineral de la Reforma
Emmanuel Iván Montiel Parades	Instituto fray Pedro de Gante TLA: Chiautempan Tec 4
Eduardo Jaziel Juárez Martínez	Cobach 03 SLP: Cedral Cobach 03
Rigoberto Concepción Rodríguez Cruz	CETis 26 HGO: Mineral de la Reforma
Oziel Hernández García	Preparatoria 9 UANL NL: Monterrey Prepa 9 UANL
Alexis Jonathan Dorantes Vazquez	Cbtis 03 TLA: Chiautempan Tec 4
Danya Carolina Gómez Cantú	Prepa Tec CEGC NL: Monterrey ITESM
David Mireles Barrón	Colegio Cervantes de Torreón COA: Torreón Cervantes
Victoria Lucero Robles	Cobach 4 CHIH: Cobach SEA

Elida Lisset Rodríguez García	Preparatoria Alfa Fundación NL: Monterrey Alfa
Samantha Ruelas Valtierra	Colegio México Nuevo QRO: Querétaro UAQ
Ángel Jesús Sánchez Pérez	Cobach 03 SLP: Cedral Cobach 03
Jesús Bertani Ramírez	Hispano Mexicana VER: Xalapa MateClub

Categoría Ardilla

Primer Lugar

Maximiliano Sánchez Garza	UNAL NL: Monterrey UANL Prepa 2

Segundo Lugar

Isaías Fernando de la Fuente	Universidad de Guanajuato GTO: Guanajuato Valenciana

Tercero Lugar

Myriam Hernández Ketchul	Universidad de Guanajuato NL: Monterrey FCFM

Mención Honorífica

Iván Adrián Oropeza Pérez	UNAM CDMX: Axayacatl
Ángel Isaac Flores Acevedo	UACJ CHIH: Cobach SEA
Guillermo Sáenz Gonzales	ITESM Campus Monterrey NL: Monterrey ITESM
Javier Alejandro Miranda Vidales	ITESM Campus San Luis SLP: San Luis Potosino
Luis Enrique Zapata Arellano	ITESM Campus Monterrey NL: Monterrey ITESM
David Correa	ITESM Campus Monterrey NL: Monterrey ITESM
Oscar Alejandro Quintero Rodríguez	UDG JAL: Yahualica

Puedes consultar la lista completa de ganadores en undostresporcarma.com/ganadores-ix-olimpiada-de-otono-2019/

Enunciados de los Problemas

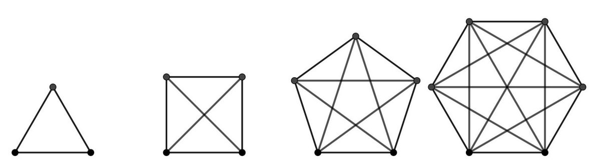
Cuyo

Problema 1. Daniela tiene 3 cajas de 20 mazapanes cada una. Yareli tiene 4 cajas de 14 mazapanes cada una. ¿Quién tiene más mazapanes?

Problema 2. Para cada uno de los siguientes números: 946, 253, 187, se cambió de lugar el dígito de las unidades con el de las centenas. ¿Cuál es el número más grande después del cambio?

Problema 3. Totoro inventó una operación matemática con el símbolo $\heartsuit$. Estos son algunos de los resultados que ha calculado: $13\heartsuit 45 = 3154, 72\heartsuit 91 = 2719, 65\heartsuit 42 = 5624$. A partir de esta información, ¿cuánto vale $19\heartsuit 20$?

Problema 4. De la siguiente sucesión de imágenes se obtiene la sucesión numérica $3, 6, 10, 15, \ldots$

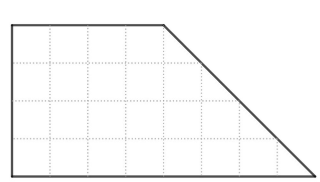


¿Qué número continúa la sucesión?

Problema 5. ¿Cuál de los siguientes números es mayor?
$A = 101 \times 103 \times 105 \times 107 \times 109$
$B = 100 \times 102 \times 104 \times 106 \times 108$

Problema 6. Daniela tiene un dado mágico que cuando lo lanza 4 veces, la suma de los números siempre es un múltiplo de 5. Las primeras tres veces que lo lanzó salió 4, 4 y 4. ¿Qué número va a salir si lo lanza una vez más?

Problema 7. Divide la siguiente figura en cuatro figuras iguales entre sí, con la misma forma que la figura original.



Problema 8. En un juego de baraja, cada carta tiene un valor. Las cartas J,Q y K valen 10, la A vale 20 y las demás cartas valen el número que tienen indicado. Al finalizar el juego pierde la persona que tiene mayor número de puntos. Si al final de una partida quedaron:

Daniela: 4, J, A, 2, 2, 2

Yareli: 8, 8, 7, K, 10

¿Quién perdió?

Problema 9. Ana, Baduel, Carlos y Daniela llevaba cada quien su paraguas a una fiesta. Se confundieron y cada quien se llevó un paraguas que no era el suyo. Sabemos que Ana se llevó el de Daniela y que Baduel no se llevó el de Carlos. ¿Cuál paraguas se llevó Daniela?

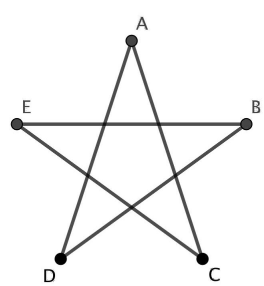
Problema 10. ¿Cuál es el número que mejor completa la sucesión 2, 3, 6, 10, 17, 28, ...?

Problema 11. El libro favorito de Andrea tiene 265 páginas. ¿Cuántos dígitos se imprimieron en total para enumerar todas las páginas?

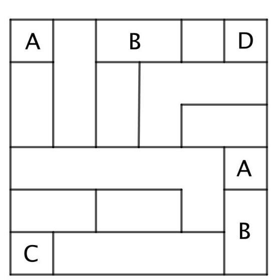
Problema 12. ¿Cuál es la letra que aparece más veces en los nombres de los números del 1 al 10?

Problema 13. Mónica tiene 1 enchufe en la pared y 7 multicontactos con 5 enchufes cada uno. Si los usa todos, ¿cuál es la mayor cantidad de conexiones disponibles que tendrá?

Problema 14. Para dibujar una estrella como la de la imagen, Daniela empieza en D, luego va a A, C, E, B y finalmente regresa a D. Si Daniela trazó 2019 segmentos en total, empezando en D, ¿en qué punto terminó?



Problema 15. El siguiente es el mapa de Totorolandia, dividido en distintos reinos. Escribe en cada reino una de las letras A, B, C, D, de manera que dos reinos que sean vecinos tengan letras distintas.



Koala

Problema 1. ¿Cuál de los siguientes números es mayor?
$A = 2011 \times 2013 \times 2015 \times 2017 \times 2019$
$B = 2010 \times 2012 \times 2014 \times 2016 \times 2018$

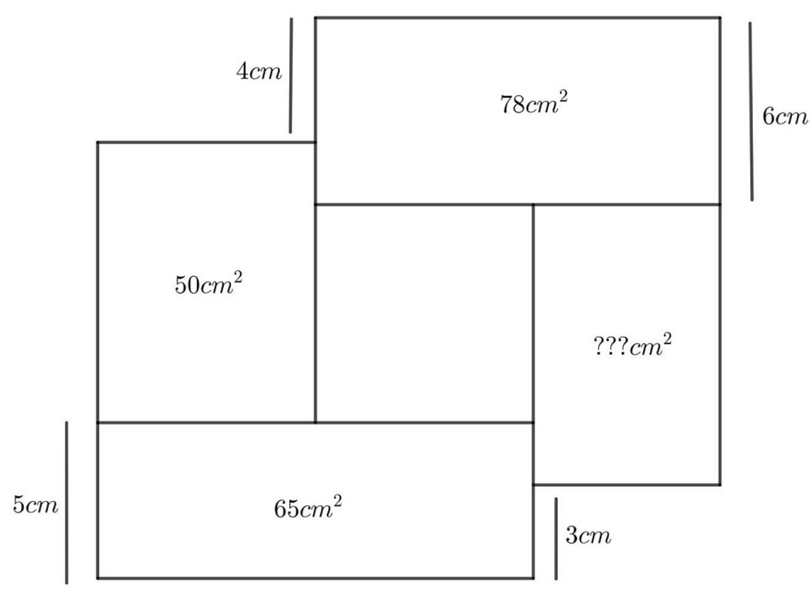
Problema 2. Totoro tiene un candado que se abre con un número de 3 dígitos. Se acuerda de lo siguiente:

- 682 tiene un número correcto, en el lugar correcto
- 614 tiene un número correcto, en el lugar equivocado
- 206 tiene dos números correctos, en los lugares equivocados
- 738 no tiene nada correcto
- 780 tiene un número correcto, en el lugar equivocado

¿Cuál es el número que abre el candado?

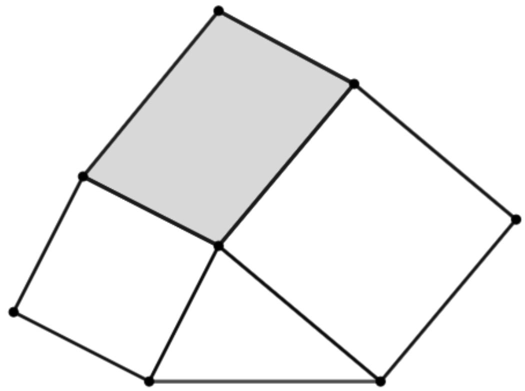
Problema 3. Yareli y Daniela llevan cada quien una cubeta con 10 litros de agua. Yareli tira 9ml cada 40cm que camina, mientras que Daniela tira 28ml cada 1.25m. Si caminaron en total 5 metros, ¿quién de las dos llegó con menos agua?

Problema 4. Basándote en las medidas de la figura, encuentra el valor del área faltante. La figura del centro es un cuadrado pero el resto de la figura no está a escala.



Problema 5. Yareli y Daniela van a recibir su medalla de Olimpiada. El listón de ambas mide lo mismo. Yareli mide 1.52 cm y la medalla queda a 1.38 cm del piso. Si Daniela mide 1.71 cm, ¿a qué altura del piso queda su medalla?

Problema 6. La siguiente figura muestra dos cuadrados que se han construido sobre los lados de un triángulo de área 6 cm^2. ¿Cuál es el área del paralelogramo sombreado?



Problema 7. Daniela escribió un número de cuatro dígitos distintos $ABCD$, donde cada una de las letras A, B, C, D representa un dígito distinto. Luego, hizo la siguiente suma:

$$ABCD + ABCD + ABCD + ABCD = DCBA.$$

¿Cuál es el valor de $DCBA$?

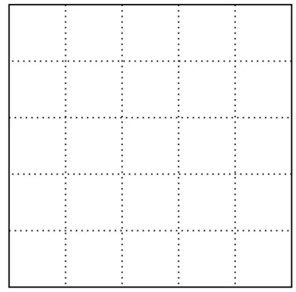
Problema 8. El Club Deportivo Totoros jugó 6 juegos y recibió la misma cantidad de goles de los que anotó. Además, en ningún partido recibió más de 3 goles. Si cada partido ganado vale 3 puntos, un empate 1 punto y una derrota 0 puntos, ¿cuál es la máxima cantidad posible de puntos que han hecho los Totoros luego de 6 partidos?

Problema 9. Daniela tiene 4 pares de tenis, calcetines de 3 colores distintos, 9 blusas y 6 pantalones. Va a ir de compras por más blusas. ¿Cuál es la menor cantidad que tiene que comprar para poder vestirse de manera distinta por al menos 2019 días?

Problema 10. ¿Cuántas palabras distintas, aunque no tengan sentido, pueden escribirse con todas las letras de la palabra "Totoro"?

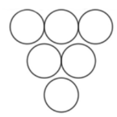
Problema 11. En el siguiente tablero dibuja un único corral por las aristas de la cuadrícula de manera que todos los números estén dentro del corral. Además, cada número te dice cuántos cuadritos alcanzarías a ver si estuvieras parado en ese número (contando el cuadrito en el que estás parado).

4					
		2		3	
	7		8		
					5



Problema 12. Divide el siguiente pastel cuadrado en 5 rebanadas, cada una de 1/5 del pastel, con 5 cortes rectos desde el centro.

Problema 13. Acomoda los números del 1 al 6, uno en cada círculo, de manera que cada número sea igual a la diferencia positiva de los dos números arriba de él.



Problema 14. Un número n es equitativo si cumple las siguientes condiciones:

- $100 \leq n \leq 999$
- El dígito de las decenas es igual a la suma de los otros dos dígitos de n.
- No repite dígitos.

Calcula la suma de todos los dígitos de todos los números equitativos que hay.

Problema 15. Totoro tiene una maleta roja y una maleta azul. Además, todas sus posesiones terrenales son siete objetos que pesan 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 kilos, respectivamente. Si a cada maleta le caben exactamente 14 kilos, ¿de cuántas maneras distintas podría empacar todos sus objetos?

Walabi

Sección 1

Problema 1. Luis tiene 3 hermanos y 5 hermanas. Su hermana Ceci tiene x hermanos y y hermanas. ¿Cuánto vale $x \times y$?

Problema 2. Se tiene un trapecio isósceles que tiene las medidas de AB, BC y CD iguales. Considera que el mínimo de trapecios así que se necesitan para formar un hexágono regular es 2. ¿Cuál es la siguiente cantidad más pequeña de trapecios requerida para formar un hexágono regular?

Problema 3. Andrea tiene el triple de cuyos que Gabriel y el doble de cuyos que Lulú. Si entre los tres tiene 44 cuyos, ¿cuántos cuyos tiene Lulú?

Problema 4. Un examen tiene 12 preguntas que se responden con "verdadero" o "falso". Si respondes cualquiera 6 preguntas con "verdadero" y las restantes con "falso", es seguro que al menos 5 de las respuestas son correctas. ¿Cuántas configuraciones de exámenes de este tipo pueden tener esta propiedad?

Problema 5. Totoro tiene un candado que se abre con una contraseña de 3 dígitos. Sabemos las siguientes cosas:

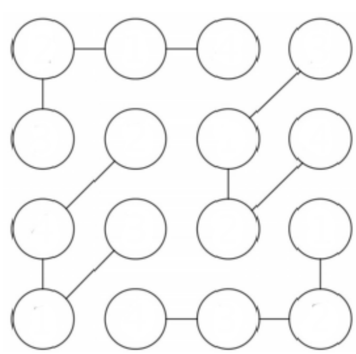
- 419 tiene un número correcto, en la posición correcta.
- 738 tiene un número correcto, pero en la posición incorrecta.
- 053 tiene un número correcto, pero en la posición incorrecta.
- 547 no tiene nada correcto
- 981 tiene dos números correctos, pero en posiciones incorrectas.

¿Cuál es el número que abre el candado de Totoro?

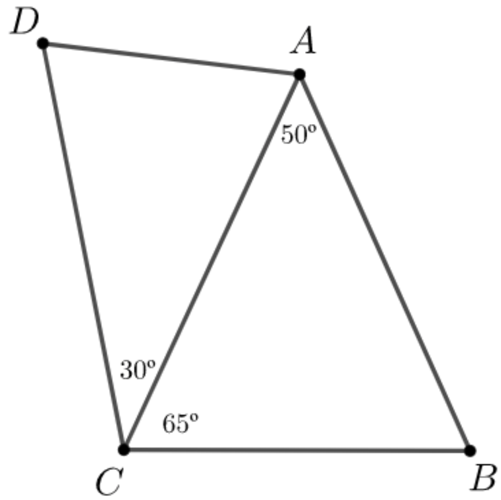
Problema 6. Sea ABC un triángulo rectángulo en A que es isósceles y tiene área 1. Sea $WXYZ$ un cuadrado con sus vértices sobre los lados del triángulo con YZ son BC. Determina el área del triángulo AWX.

Problema 7. El patrón de seguridad del celular de Yareli pasa por 4 números distintos. Su patrón empieza en 1 y termina en 9. (El patrón une números con líneas rectas y no puede *atravesar* un número que no forme parte del patrón.) ¿Cuántos patrones podrían ser el de Yareli?

Problema 8. Acomoda números 1, 2, 3, 4 de manera que cada fila, cada columna y cada cadena tengan uno de cada uno.



Problema 9. En la siguiente figura $AB = DC$, $\angle ACB = 65°$, $\angle BAC = 50°$ y $\angle ACD = 30°$. ¿Cuál es la medida del ángulo $\angle ADC$?



Problema 10. ¿Cuántos números de hasta 36 dígitos terminan en 36 y son múltiplos de 36?

Problema 11. ¿Cuántos múltiplos de 5 de cuatro cifras tienen exactamente 3 dígitos impares?

Problema 12. Un número casi-capicúa es un número tal que, si le quitaras algún dígito, el número resultante sería un capicúa. Por ejemplo: 123251 y 7898 son ambos casi-capicúas. ¿Cuántos casi-capicúas de 6 dígitos hay?

Sección 2

Problema 13. ¿Qué número tiene más maneras de ser escrito como suma de tres enteros positivos menores a 5, el 6 o el 8? El orden de los sumandos importa.

Problema 14. ¿De cuántas maneras distintas podemos triangular un octágono regular con diagonales?

Problema 15. Sea $ABCD$ un cuadrilátero tal que la diagonal AC es bisectriz de $\angle DAB$ y $DC = CB$. ¿Es $ABCD$ un deltoide? **Nota.** Un deltoide es un cuadrilátero con dos pares de lados iguales adyacentes.

Canguro

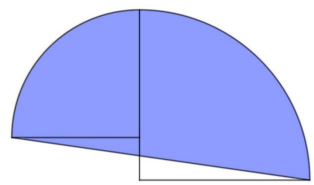
Sección 1

Problema 1. En la ruta de camión de la Alhóndiga a Valencina hay 25 paradas en total, cada una a la misma distancia de la anterior. De la primera a la quinta son en total 6 kilómetros. ¿Cuál es la distancia total de la primera a la última parada?

Problema 2. El residuo de dividir 407 por el entero positivo n es 4. ¿Cuál es el residuo de dividir 2019 entre n?

Problema 3. ¿Cuántos números de dos dígitos ninguno de ellos cero, son divisibles por cada uno de sus dígitos?

Problema 4. Un cuarto de círculo de radio 3 se ha pegado a un cuarto de círculo de radio 4. Calcula el área de la región sombreada.



Problema 5. Hay una hormiga en cada vértice de un triángulo equilátero. Cada hormiga elige uno de los dos lados al azar y empieza a caminar. ¿Cuál es la probabilidad de que no se encontrarán de frente?

Problema 6. Totoro pensó en un número. Cincuenta personas distintas le preguntaron si era divisible entre $1, 2, 3, ..., 50$. Totoro contestó que sí a todas, pero mintió dos veces seguidas. ¿Cuáles son los números en los que mintió?

Problema 7. Sean a, b, c tres reales tales $2a+b=c$, $2b+c=a$ y $2c+a=b$. Encuentra el valor de la suma de a, b, c.

Problema 8. Al sumar los números de dos cifras ab, bc, cd y da se obtiene 187. ¿Cuál es el valor de $a+b+c+d$?

Problema 9. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia sus diagonales se intersectan en Q y los lados AD y BC en P. Si $\angle DQC = 105$ grados y $\angle DPC = 15$ grados. El arco menor $\overset{\frown}{DC}$ mide 2πcm. ¿Cuál el área de la circunferencia en la que está inscrito el cuadrilátero?

Problema 10. ¿Cuántos números de hasta 5 dígitos cumplen que terminan en 56 y son múltiplos de 56?

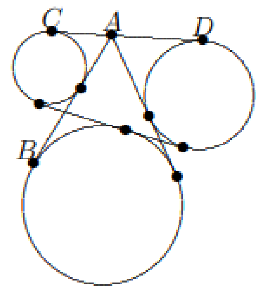
Problema 11. Sea ABC un triángulo cuya circunferencia que pasa por sus tres vértices tiene centro O. Si AC es paralela a BO y $\angle CAB = 100$ grados. Determina $\angle ACB$.

Problema 12. Se tiene un hexágono regular y usando cada uno de sus lados se construye otro hexágono regular hacia fuera del primero. Formando así un *panal* de 7 hexágonos regulares. En cada una de estas celdas del panal hay una abeja. Cada una se va a mover a otra celda con la que comparta un lado. Todas se van a mover. ¿De cuántas maneras pueden emigrar de una celda a otra las abejas de manera que no quede una celda vacía?

Sección 2

Problema 13. Un número n es saltamontes si un saltamontes que está parado en el 1 de la recta numérica puede llegar a n dando saltos de la siguiente manera: Dando n saltos; el primero de longitud 1 hacia atrás o adelante; el segundo de longitud 2 hacia atrás o adelante de donde esté; el tercero de longitud 3 hacia adelante o hacia atrás de donde esté; y así sucesivamente hasta que el n-ésimo es de longitud n hacia adelante o hacia atrás de donde esté. Por ejemplo el 2 es un número saltamontes porque puede dar un salto hacia atrás luego el segundo salto de longitud 2 hacia adelante y llega al 2 pues $1-1+2=2$. ¿Cuántos números entre 1 y 20 son saltamontes?

Problema 14. En la figura las rectas son tangentes a las circunferencias en los puntos indicados. Calcula CD si se sabe que $AB = 10$.



Problema 15. Considera los polinomios

$$A(x) = (1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2019}}{2019})$$

y

$$B(x) = (x^{2019} + \frac{x^{2018}}{2} + \frac{x^{2017}}{3} + \cdots + \frac{x^2}{2018} + \frac{x}{2019} + \frac{1}{2020})$$

Determina el coeficiente de x^{2019} en $A(x) \cdot B(x)$.

Uombat

Sección 1

Problema 1. Tres números enteros cumplen que su producto es el doble de su suma. ¿Cuáles son esos tres números?

Problema 2. La Salsa se baila en parejas de un hombre y una mujer. En una fiesta se han reunido menos de 50 personas para bailar y en un momento $3/4$ de los hombres están bailando Salsa con $4/5$ de las mujeres. ¿Cuántas personas se encuentran bailando en ese momento?

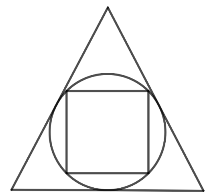
Problema 3. La operación $*$ se define con la siguiente tabla:

$*$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Por ejemplo, $2 * 3 = 1$. ¿Cuánto vale $(2 * 4) * (1 * 3)$?

Problema 4. ¿Cuántos pares de números reales (a, b) con $a + b = 1$ satisfacen la expresión $(a^2 + b^2)(a^3 + b^3) = a^4 + b^4$?

Problema 5. En la figura siguiente, los lados del triángulo equilátero son tangentes al círculo, y los vértices del cuadrado se encuentran sobre la circunferencia. Determina el área del triángulo equilátero si el área del cuadrado 18.



Problema 6. ¿De cuántas maneras distintas podemos triangular un octágono regular con diagonales?

Problema 7. Se tiene una circunferencia y un triángulo ABC tal que BC es diámetro y A un punto sobre la circunferencia. Se traza la altura desde A, que toca a BC en H, y se extiende hasta tocar la circunferencia en otro punto llamado E. Si se sabe que la medida de BH es cuatro veces más chica que la medida de BC y que el área del ABC es $120u^2$, encuentra el área del BAE.

Problema 8. Determina cuántas ternas diferentes (a, b, c) existen tales que $100 \leq a \leq b \leq c \leq 999$ y $a + b + c = 2019$.

Problema 9. Un torneo de tenis tiene 128 jugadores que jugarán eliminación directa (la primera ronda tiene 64 partidos). Sabemos que el mejor jugador le gana a todos los demás y que el segundo mejor jugador le gana a todos menos al mejor jugador. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo mejor jugador quede en segundo lugar del torneo?

Problema 10. La maestra Yareli tiene una caja con 12 gises, 3 de cada uno de 4 colores distintos. Cada vez que saca un gis, lo usa hasta que se termine. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer y último gis sean del mismo color?

Problema 11. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia sus diagonales se intersectan en Q y los lados AD y BC en P. Si $\angle DQC = 105$ grados y $\angle DPC = 15$ grados. El arco menor $\overset{\frown}{DC}$ mide $2\pi cm$. ¿Cuál el área de la circunferencia en la que está inscrito el cuadrilátero?

Problema 12. Coloca 5 piedras en cuadritos de una cuadrícula de 8×8 de manera que cualquier subcuadrícula de 3×3 tenga exactamente una piedra.

Sección 2

Problema 13. Sea $ABCD$ un cuadrado de lado 4. Sean M el punto medio de BC y N el punto medio de CD. Se construye un cuadrado $MNLK$ de manera que L y K queden fuera del cuadrado. Encuentra el área del círculo en cuyo perímetro se encuentran B, L y K.

Problema 14. Un número n es saltamontes si un saltamontes que está parado en el 1 de la recta numérica puede llegar a n dando saltos de la siguiente manera: Dando n saltos; el primero de longitud 1 hacia atrás o adelante; el segundo de longitud 2 hacia atrás o adelante de donde esté; el tercero de longitud 3 hacia adelante o hacia atrás de donde esté; y así sucesivamente hasta que el n-ésimo es de longitud n hacia adelante o hacia atrás de donde esté. Por ejemplo el 2 es un número saltamontes por que puede dar un salto hacia atrás luego el segundo salto de longitud 2 hacia adelante y llega al 2 pues $1-1+2=2$. ¿Cuántos números entre 1 y 20 son saltamontes?

Problema 15. Para cada entero z considera la siguientes dos expresiones

$$A = (z-1)(z+2)\dots(z-2019)$$
$$B = (z+1)(z-2)\dots(z+2019).$$

- Demuestra que si $0 < a < b < z$ entonces $(z-a)(z+b) > (z+a)(z-b)$.
- ¿Para cuántos enteros z no necesariamente positivos se cumple que $A \geq B \geq 0$?

Ardilla

Sección 1

Problema 1. Lulú tiene una bolsa con 3 pelotas verdes, 2 rojas y 3 azules. Si toma 5 pelotas de la bolsa, una después de la otra, ¿cuál es la probabilidad de que sea 1 roja, 2 verdes y 2 azules?

Problema 2. Determina todas las parejas (a, b) de enteros positivos tales que $a^b + b^a = 2019$.

Problema 3. Se tienen dos circunferencias de radios 3 y 4.5 una de sus tangentes común mide 10 e intersecta al segmento que une los centros de las circunferencias. ¿Cuánto mide el segmento que une los centros de las circunferencias?

Problema 4. Determina cuántas ternas diferentes (a, b, c) existen tales que $100 \leq a \leq b \leq c \leq 999$ y $a + b + c = 2019$.

Problema 5. Se tiene una circunferencia y un triángulo ABC tal que BC es diámetro y A un punto sobre la circunferencia. Se traza la altura desde A, que toca a BC en H, y se extiende hasta tocar la circunferencia en otro punto llamado E. Si se sabe que la medida de BH es cuatro veces más chica que la medida de BC y que el área del ABC es $120u^2$, encuentra el área del BAE.

Problema 6. La maestra Yareli tiene una caja con 12 gises, 3 de cada uno de 4 colores distintos. Cada vez que saca un gis, lo usa hasta que se termine. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer y último gis sean del mismo color?

Problema 7. En una empresa, todas las hojas llevan un folio de 5 dígitos (puede empezar con 0). Cuando el folio tiene sus 5 dígitos iguales, la hoja debe ser color carmín. Calcula la suma de todos los folios escritos en hojas color carmín.

Problema 8. Hay una fila con 20 asientos. Daniela llega y se sienta en el primer asiento. Cada siguiente persona puede elegir si dejar uno o dos espacios con la persona que se sentó antes. Por ejemplo, la segunda persona puede sentarse en 3 o 4. Yareli quiere sentarse en el último asiento. ¿Cuál es la probabilidad de que esté disponible, si llegaron 10 personas antes que ella?

Problema 9. ¿De cuántas maneras distintas podemos triangular un octágono regular con diagonales?

Problema 10. Un torneo de tenis tiene 128 jugadores que jugarán eliminación directa (la primera ronda tiene 64 partidos). Sabemos que el mejor jugador le gana a todos los demás y que el segundo mejor jugador le gana a todos menos al mejor jugador. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo mejor jugador quede en segundo lugar del torneo.

Problema 11. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia sus diagonales se intersectan en Q y los lados AD y BC en P. Si $\angle DQC = 105$ grados y $\angle DPC = 15$ grados. El arco menor $\overset{\frown}{DC}$ mide $2\pi cm$. ¿Cuál el área de la circunferencia en la que está inscrito el cuadrilátero?

Problema 12. Un número n es saltamontes si un saltamontes que está parado en el 1 de la recta numérica puede llegar a n dando saltos de la siguiente manera: Dando n saltos; el primero de longitud 1 hacia atrás o adelante; el segundo de longitud 2 hacia atrás o adelante de donde esté; el tercero de longitud 3 hacia adelante o hacia atrás de donde esté; y así sucesivamente hasta que el n-ésimo es de longitud n hacia adelante o hacia atrás de donde esté. Por ejemplo el 2 es un número saltamontes por que puede dar un salto hacia atrás luego el segundo salto de longitud 2 hacia adelante y llega al 2 pues $1 - 1 + 2 = 2$. ¿Cuántos números entre 1 y 20 son saltamontes?

Sección 2

Problema 13. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Considera dos subespacios W y U de V tales que ninguno de ellos contiene por completo al otro. Demuestra que $W \cup U$ no es un subespacio de V.

Problema 14. Sean N un entero mayor que 1 y x el menor entero positivo con la siguiente propiedad: Existe un entero positivo k estrictamente menor que $x - 1$ tal que $N + k$ es múltiplo de x. Prueba que x es de la forma p^n o $2p$ para algún p primo y n natural.

Problema 15. Se lanza sucesivamente un dado de seis caras, cada una con las misma probabilidad de caer. Cada lanzamiento es independiente de lo que haya caído antes. Sea a_n la suma de los resultados de los primeros n lanzamientos. Por ejemplo si todos los resultados fueran 1, entonces $a_n = n$. Sea P_n la probabilidad de que 13 divida a a_n. Determina $lim_{n\to\infty} P_n$.

Soluciones a los Problemas

Cuyo

Solución Problema 1. Daniela tiene más mazapanes. Se realiza la multiplicación de la cantidad de cajas por la cantidad de mazapanes que contiene cada una, de tal manera que Daniela tienes $3 \times 20 = 60$ y Yareli tiene $4 \times 14 = 56$ mazapanes.

Solución Problema 2. El número mayor es 781. Se tienen los números 946, 253, 187 una vez que se efectúa el cambio de las unidades con las centenas se obtiene los números 649, 352, 781.

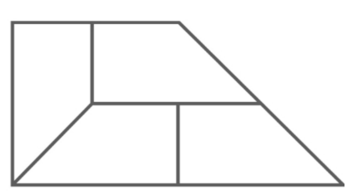
Solución Problema 3. El resultado de la operación es 9102. La operación $\heartsuit$ consiste en voltear el orden de los dígitos en cada número y después unirlos para formar otro de cuatro dígitos. El número 19 se vuele 91 y 20 se vuelve 02, de tal manera que $19\heartsuit 20 = 9102$.

Solución Problema 4. El siguiente número en la sucesión es 21. Veamos que la sucesión representa la cantidad de líneas que hay en las figuras una vez que se trazan todas sus diagonales. La siguiente figura sería un heptágono regular, que tiene 7 lados y 14 diagonales: un total de 21 líneas en la figura.

Solución Problema 5. El mayor de los números es A. Veamos que 101 es mayor que 100, 103 es mayor que 102, 105 es mayor que 104, 107 es mayor que 106 y 109 es mayor que 108 entonces se obtiene que $101 \times 103 \times 105 \times 107 \times 109$ es mayor que $100 \times 102 \times 104 \times 106 \times 108$.

Solución Problema 6. Saldrá el número 3. Veamos que $4 + 4 + 4 = 12$ de donde los dos próximos múltiplos de 5 mayores que 12 son 15 y 20. Véase que $15 - 12 = 3$ y $20 - 12 = 8$ y como la cara más alta en un dado es 6, no puede salir 8. La única opción es 3.

Solución Problema 7. La forma de dividir la figura es la siguiente.



Solución Problema 8. Ha perdido Yareli. Los puntos que suma Daniela son $4 + (J = 10) + (A = 20) + 2 + 2 + 2 = 40$ puntos, y Yareli tiene: $8 + 8 + 7 + (K = 10) + 10 = 43$ puntos.

Solución Problema 9. Daniela se llevó el paraguas de Carlos. Baduel no se llevó el paraguas de Carlos, tampoco pudo llevarse su propio paraguas y el de Daniela ya había sido tomado, por lo que él debió tomar el paraguas de Ana. Como los paraguas de Daniela y Ana ya fueron tomados, y Carlos no se llevó el suyo, entonces solo se pudo llevar el paraguas de Beduel. Como los paraguas de Beduel, Ana y Daniela ya fueron tomados solo le deja a Daniela haberse llevado el paraguas de Carlos.

Solución Problema 10. El siguiente número en la sucesión es 46. Puede observarse que $3 = 2+0+1$, $6 = 3+2+1$, $10 = 6+3+1$, $17 = 10+6+1$ y $28 = 17+10+1$, por lo que la serie se construye bajo la regla $N_{k+2} = N_{k+1} + N_k + 1$, dónde N_k es el número que ocupa la posición k. Por lo tanto el siguiente número será $28 + 17 + 1 = 46$.

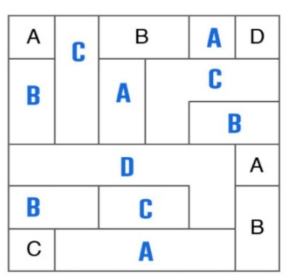
Solución Problema 11. Se imprimieron 687 dígitos. Para los números menores a 10 sólo se necesita un dígito. Los números mayores o iguales a 10 y menores que 100 necesitan dos dígitos y los números mayores o iguales que 100 y menores que 1000 necesitan tres dígitos para ser anotados. Como el libro contiene 265 páginas, se usaron 9 número menores que 10, 90 números entre 10 y 100, y 166 entre 100 y 1000, por lo que hay $1(9) + 2(90) + 3(166) = 9 + 180 + 498 = 687$ dígitos.

Solución Problema 12. La letra que más aparece es la e, con un total de 8 veces. En segundo lugar, la letra c que se utiliza 7 veces en estas palabras.

Solución Problema 13. Hay 29 enchufes disponibles. Cada multicontacto tiene 7 enchufes. En total se tienen $1 + 7(5) = 36$ de ellos y se necesitan 7 para conectar todos los multicontactos a la energía, por lo que solo restan $36 - 7 = 29$.

Solución Problema 14. Terminó en el punto B. Los recorridos en orden son: DA, AC, CE, EB, BD, DA, AC, $\cdots$ y así sucesivamente. Este se repite cada 5 elementos: DA, AC, CE, EB, BD, por lo que podemos restar tantas veces 5 a 2019 sin cambiar el punto final. Siendo $2015 = 5(403)$, tenemos que $2019 - 2015 = 4$. Por lo que el último tramo del recorrido fue el 4to movimiento del ciclo, que es EB.

Solución Problema 15. El único acomodo de letras en los reinos es el siguiente.



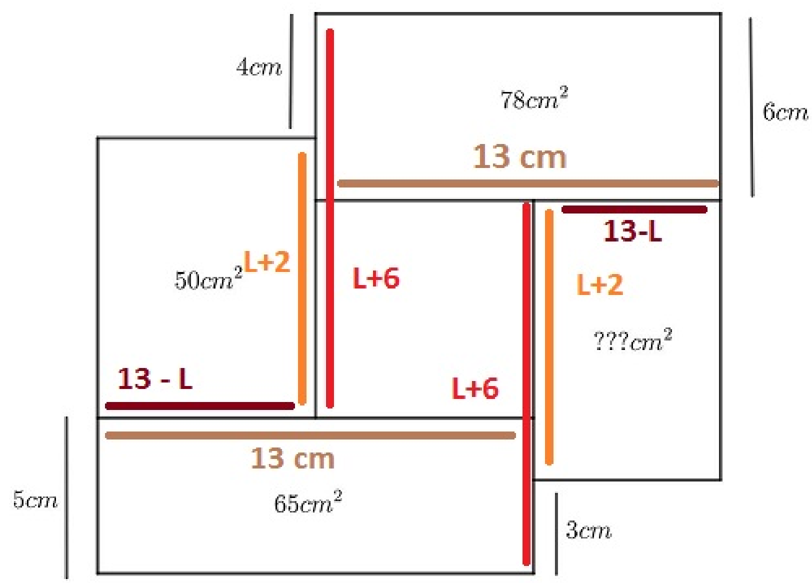
Koala

Solución Problema 1. El número A es el mayor de ellos. Observa que 2011 es mayor a 2010, 2013 es mayor a 2012, 2015 es mayor a 2014, 2017 es mayor a 2016 y 2019 es mayor a 2019. Por lo que $2011 \times 2013 \times 2015 \times 2017 \times 2019$ es mayor a $2010 \times 2012 \times 2014 \times 2016 \times 2018$.

Solución Problema 2. La clave es el número 042. Nombremos las afirmaciones con incisos del a) al e) de la primera a la última. Veamos que 6 no es un número de la clave, pues si lo fuera los incisos a) y b) dirían que está en un lugar correcto y en un lugar equivocado a la vez. El inciso c) nos dice que dos de los números de la clave son 2 y 0. Del inciso a) el número debe terminar en 2. Luego c) y e) indican que la posición del 0 es el principio (pues no es el número de las decenas ni de las unidades). Ahora, si el número restante es 1, sólo podría ir en medio y b) sería falso, y el número faltante es 4 en la posición de las decenas.

Solución Problema 3. Yareli llegó con menos agua pues fue la que derramó más durante su recorrido. Daniela tiro agua 4 veces pues hay 4 tramos de 1.25 m en su trayecto, mientras que Yareli tiró 12.5 veces agua pues este es el número de tramos de 40 m que recorrió. De modo que Daniela derramó $28 \times 4 = 112$ ml y Yareli $9 \times 12{,}5 = 112{,}5$ ml.

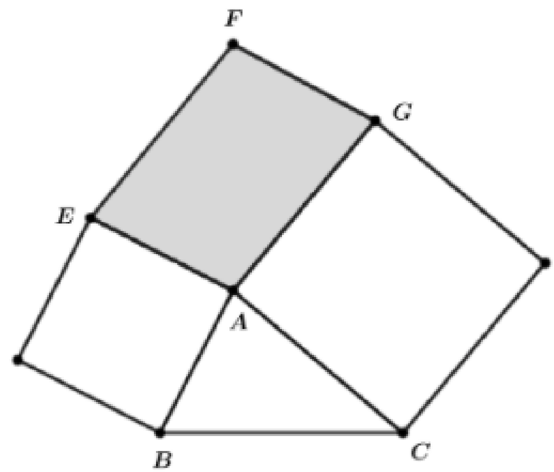
Solución Problema 4. El área es de 50 cm^2. Sea L el lado del cuadrado del centro. La siguiente figura es esclarecedora



Entonces el rectángulo de área 50 cm^2 tiene lados $13 - L$ y $L + 2$, al igual que el rectángulo al cual deseamos calcular su área.

Solución Problema 5. La medalla de Daniela quedará a 1.57 cm del suelo. Como Yareli mide 1.52 y la medalla queda a 1.38 cm del suelo, la medida del listón colgando es de 1.52-1.38=0.14. Luego, la altura de Daniela es de 1.71 así que la medalla quedará a 1.71-0.14 = 1.57 cm del suelo.

Solución Problema 6. El área del paralelogramo es de 12 cm^2. Nombremos a los puntos como sigue. Aquí $AB = EA$ y $AC = AG = EF$ por lo cuadrados y al ser



$EFGA$ paralelogramo (sus lados opuestos son iguales). Además $\angle BAC + \angle EAG = 180$ grados, es decir $\angle BAC$ y $\angle EAG$ son suplementarios. Pero, de nuevo por ser $EFGA$ un paralelogramo los ángulos $\angle FEA$ y $\angle EAG$ son suplementarios. Con lo que se concluye que $\angle FEA = \angle BAC$. Finalmente, se tiene que por criterio LAL de congruencia los triángulos ΔFEA y ΔABC son iguales. Como el área del paralelogramo $FEAG$ es dos veces el área del triángulo FEA, ésta es de 2×6 $\text{cm}^2 = 12$ cm^2.

Solución Problema 7. $DCBA$ vale 8712. Tenemos que $4 \cdot ABCD = DCBA < 10^5$, de donde $ABCD \leq 2500$. Como $DCBA = 4 \cdot ABCD$ es par, sabemos que $A = 2$. Luego $4 \cdot ABCD \geq 8000$, de este modo el valor de D es 8 o 9, pero ya que $4 \cdot ABCD$ termina en 2, concluimos que $D = 8$. Además

$$ABCD \equiv A + B + C + D \equiv BCDA \pmod 3$$

y

$$ABCD \equiv -A + B - C + D \equiv -(-D + C - B + A) \equiv DCBA \pmod{11}.$$

De modo que $DCBA$ y $ABCD$ son ambos múltiplos de 33 y de la igualdad obtenemos que $DCBA$ es múltiplo de $33 \times 4 = 132$. Ya que $DBCA$ está entre ocho mil y nueve mil, los posibles valores son 8052, 8184, 8316, 8448, 8580, 8712, 8844 y 8976. De los cuales solo funciona el 8712.

Solución Problema 8. Los Totoros a lo más han sumado 12 puntos. Sea D la diferencia de goles anotados y goles recibidos en los seis partidos. Notemos que no pueden hacer 15 puntos o más, pues esto implicaría que ganaron cinco partidos, la D para esos cinco partidos es $D \geq 5$ pues cada partido la ganaron por al menos un gol. Para que $D = 0$ el sexto partido lo tuvieron que perder por más de cinco goles, lo cual no es posible. Si obtuvieron 14 puntos debieron ganar por lo menos cuatro de los partidos y empatar los otros dos por lo que en esos seis partidos $D \geq 4$. Si obtuvieron 13 puntos debieron ganar cuatro partidos, empatar uno y perder el otro. En los primeros cuatro partidos $D \geq 4$ el empate no afecta la D y el sexto partido debieron perderlo para 4 goles o más para que $D = 0$ lo cual no es posible. Sí es posible obtener 12 puntos, ganando cuatro partidos 2-1 y perdiendo los otros dos 0-2.

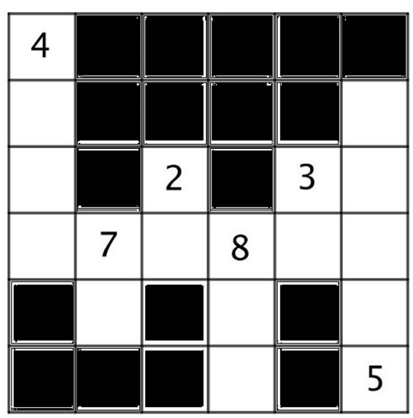
Solución Problema 9. Daniela necesita comprar 20 blusas. Si Daniela tuviera n blusas podría vestirse de $6 \times 4 \times 3 \times n$ maneras (por principio multiplicativo) queremos $72n \geq 2019$ i.e $n \geq \frac{2019}{72}$. Como n es un valor entero y lo queremos lo menor posible obtenemos que $n = 29$. Pero ella ya tiene 9 blusas, por lo que sólo necesita comprar 20 más.

Solución Problema 10. Hay 60 forma de ordenar las letras en la palabra Totoro. La cantidad de formas de ordenar 6 letras distintas es $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$. Sin embargo, Totoro tiene letras repetidas por lo que esta cuenta repetirá varias veces acomodos iguales.

En cada palabra podemos intercambiar las letras t's y la palabra se preserva, así mismo con las letras o's. La letra t está dos veces, por lo que al acomodarlas estamos contando dos veces cada palabra siendo en realidad la misma. Además, como tenemos tres veces la letra o, y éstas se ordenan de $3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$ formas distintas, también estamos contando 6 veces cada una de dichos acomodos. En total estaremos contando $2 \cdot 3!$ veces la misma palabra. De modo que la palabra se puede acomodar solo de

$$\frac{6!}{2 \cdot 6} = \frac{6 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 3 \times 2 \times 1} = 5 \times 4 \times 3 \times 3 = 60 \text{ formas distintas.}$$

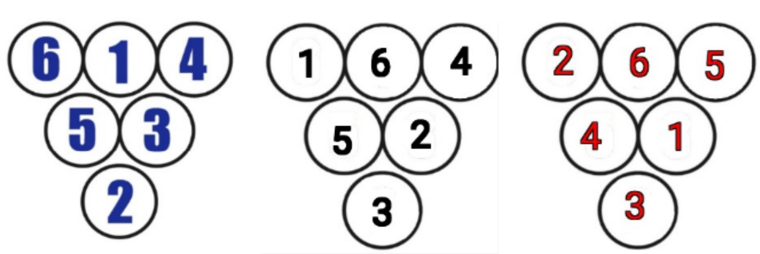
Solución Problema 11. Una posible división es la siguiente, hemos dejado el interior del corral en blanco.

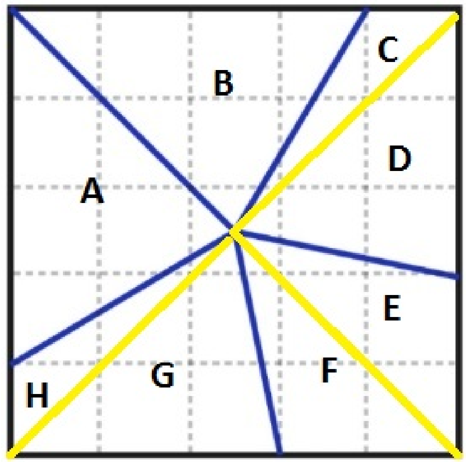


Solución Problema 12. Los cinco cortes están marcados en azul. Para demostrar que los cinco pedazos, en efecto tiene la misma área , hemos marcado los cortes en amarillo. Con los cuales el pastel ha quedado separado en 8 triángulos, todos de la misma altura, $\frac{5}{2}$. Denotemos esta altura por h. De la figura, las áreas quedan como sigue: $A = 2h, B = 2h, C = \frac{h}{2}, D = \frac{3h}{2}, E = h, F = h, G = \frac{3h}{2}, \frac{h}{2}$. De este modo

$$A = B = C + D = E + F = H + G = 2h.$$

Solución Problema 13. Los siguientes son tres posibles acomodos.





Solución Problema 14. La suma de los dígitos en los números equitativos es 440. Un buen problema de combinatoria es listar todos los números equitativos. Con un poco de orden puedes llegar a que son:

132	253	374	495
143	264	385	
154	275	396	
165	286		
176	297		
187			
198			

Y los que se obtienen de voltear los dígitos de los listados anteriormente. Haciendo la suma de sus dígitos obtenemos que son 220 y los que no listamos tienen la misma suma de dígitos. Por lo que la suma de dígitos de los números equitativos es $220 \times 2 = 440$. Una posible manera de hacer la suma de dígitos de los listados es por columnas; los que comienzan con 1 tiene suma de dígitos 84; los de 2 tienen 70; los de 3 tienen 48 y los de 4 tienen 18. Así que la suma de dígitos de los listados es $84 + 70 + 48 + 18 = 220$.

Solución Problema 15. Totoro puede empacar sus pertenencias de 8 formas distintas. Sus pertenencias pesan $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ kilos por lo que cada maleta pesará al final exactamente 14 kilos. Pensemos que el objeto de 7 kilos de Totoro es su nuevo estéreo que le han regalado de navidad. El estéreo tiene dos posibilidades de maleta, fijemos por el momento que irá en la azul. Los objetos que van acompañar al estéreo deben pesar juntos 7 kilos. No puede ser sólo un objetos más (no pesarían lo suficiente) deben ser dos o tres objetos los que acompañen al estéreo (con cuatro extras pesa mucho). Si sólo dos objetos acompañan al estéreo pueden ser los de 1 y 6 o los de 2 y 5 o los de 3 y 4. Si son tres objetos los que lo acompañan, sólo pueden ser los de 1, 2 y 4 kilos. Por lo que al estéreo lo pueden empacar junto a otros objetos de 4 maneras. El estéreo tenía dos posibles maletas, de manera que Totoro puede empacar sus pertenencias de $2 \times 4 = 8$ maneras.

Walabi

Solución Problema 1. El resultado de $x \times y$ es 16. Luis tiene 3 hermanos y 5 hermanas. Su hermana Ceci tiene un hermano más, Luis, y una hermana menos, ella misma; es decir, Ceci tiene 4 hermanos y 4 hermanas.

Solución Problema 2. Puede formarse con 8 trapecios. Con dos de ellos se forma un hexágono regular y con otros seis se puede poner uno en cada uno del hexágono recién formado.

Solución Problema 3. Lulú tiene 12 cuyos. Si Andrea tiene $6x$, entonces Gabriel tiene $2x$ y Lulú tiene $3x$ cuyos. Entre los tres tienen $6x + 2x + 3x = 11x = 44$ en total, es decir, $x = 4$ y $3x = 12$ cuyos.

Solución Problema 4. Hay 26 configuraciones posibles del examen. Pensemos en la clave, es decir, en la distribución de las respuestas correctas. Si las respuestas correctas son todas “verdadero” (o todas “falso”) entonces no importa cómo lo contestemos, siempre sacaremos 6 correctas (y 6 incorrectas). Si las respuestas correctas son 11 “verdadero” y 1 “falso” (o bien, 11 “falso” y 1 “verdadero”), entonces podíamos sacar 6 correctas o 5 correctas, pero no menos. Ahora, si el examen tuviera 10 “verdadero” y 2 “falso” (o 10 “falso” y 2 “verdadero”), podría pasar lo siguiente:

V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F
F	F	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Es decir, hay manera de contestarlo sin obtener 5 correctas. Lo mismo pasará si hay 9, 8, 7, 6, 5, 4 o 3 “verdadero” en el examen. Luego, solo nos preocupan estos casos:

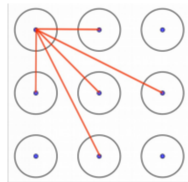
- 12 “verdadero”: 1 examen.
- 11 “verdadero”: la diferencia es cuál pregunta es “falso”; son 12 exámenes.
- 1 “verdadero”: la diferencia es cuál pregunta es “verdadero”; son 12 exámenes.
- 0 “verdadero”: 1 examen.

En total son $1 + 12 + 12 + 1 = 26$ configuraciones.

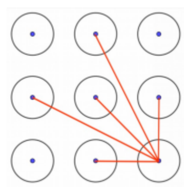
Solución Problema 5. Hay dos números que abren el candado de Totoro. Como 547 no tiene nada correcto, sabemos que de 419 no puede ser 4 el correcto. Como 981 tiene dos números correctos, pero en posiciones incorrectas, uno de los números es 8, el otro es 9 o 1. Como 738 también tiene 8 en posición incorrecta, entonces el número empieza con 8. Como ni 5 ni 3 son correctos, el tercer dígito es 0. Los dos números que funcionan son 809 y 810.

Solución Problema 6. El área de $\triangle AWX = \frac{1}{9}$. Sea O la intersección de las diagonales del cuadrado; T la perpendicular desde Y a BW y S la perpendicular desde Z a XC. Estos trazos dividen al triángulo en nueve triángulos congruentes, pues son rectángulos isósceles de hipotenusa el lado del cuadrado. Entonces todos tiene área igual a $\frac{1}{9}$.

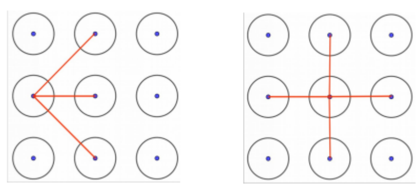
Solución Problema 7. Hay 16 posibles configuraciones para el patrón de Yareli. Empezando en la tecla con el 1, Yareli puede moverse a 5 teclas distintas sin atravesar otra tecla distinta:



Esto mismo ocurre con las teclas que pueden llevarte al final a la tecla 9 sin atravesar ninguna otra:

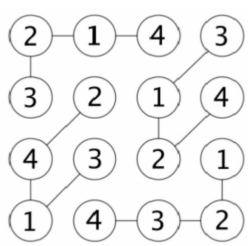


De modo que, en el paso intermedio, debemos movernos de una de esas 5 teclas a otra, sin atravesar otra. Desde la tecla del centro podemos movernos a cualquiera de las otras 4; desde cualquiera de las otras 4 podemos movernos a 3 distintas:



Por lo tanto, hay $4 + 3 + 3 + 3 + 3 = 16$ patrones distintos posibles.

Solución Problema 8. Este es el acomodo correcto



Solución Problema 9. El ángulo mide $75°$. En el triángulo ABC conocemos ya un ángulo de $65°$ y otro de $50°$; el ángulo que nos falta por conocer, ABC , debe medir $180 - 65 - 50 = 65°$ grados. Luego, este triángulo tiene dos ángulos iguales, es decir, es un triángulo isósceles. Sabemos entonces que $AC = AB$. Pero por hipótesis de problema tenemos $AB = DC$, es decir, sabemos ahora que $DC = AC$, por lo que el triángulo ADC es también isósceles. Los ángulos iguales son los que corresponden a los lados DC, AC, es decir

$$\angle DAC = \angle ADC = \frac{180 - 30}{2} = 75°.$$

Solución Problema 10. 1111111111111111111111111111111111 (treinta y cuatro 1s). Para que un número sea múltiplo de 36 debe ser múltiplo de 4 y de 9. El criterio de divisibilidad de 4 nos dice que un número es múltiplo de 4 si los últimos dos dígitos forman un múltiplo de 4; como el número termina en 36, esta condición está cubierta. Como los dos últimos dígitos suman 3+6=9 , solo nos preocupa que el número formado por los demás dígitos sea múltiplo de 9, es decir, queremos contar cuántos números desde 0 hasta 9999999999999999999999999999999999 (treinta y cuatro 9s) son múltiplos de 9 y "pegarlo" al frente de 36. Haciendo la división, obtenemos el resultado.

Solución Problema 11. Hay 475 números que cumplen. Separamos en los siguientes casos:

- El par es el primer dígito. En ese caso tiene las opciones 2, 4, 6, 8 y el dígito de las unidades debe ser 5. Hay $4 \times 5 \times 5 \times 1 = 100$ números.
- El par es el segundo dígito. En este caso sí puede ser 0, las unidades siguen siendo 5. Hay $5 \times 5 \times 5 \times 1 = 125$.
- El par es el tercer dígito. Es idéntico al anterior, hay $5 \times 5 \times 5 \times 1 = 125$.
- El par es el último dígito, por lo que debe ser 0. Hay también $5 \times 5 \times 5 \times 1 = 125$.

En total hay $100 + 125 + 125 + 125 = 475$ números.

Solución Problema 12. Hay 48600 números casi-capicúas. Diremos que el número que quitas para que se vuelva capicúa es *el parásito* y lo denotaremos por d. Cada casi capicúa viene de un capicúa de cinco dígitos, contaremos cuántos casi-capicúas genera un capicúa de 5 dígitos.

Caso 1: El capicúa no tiene al cero como uno de sus dígitos.

- **Utiliza sólo un dígito.** El capicúa es de la forma $aaaaa$. Si el parásito es a sólo hay un casi-capicúa asociado, a decir, el $aaaaaa$. Si el parásito no es a este lo puedes poner en cualquiera de los seis espacios y d puede tomar nueve valores (no es a y puede ser cero por que a no es cero) de este modo hay $9 \times 6 - 1$ casi-capicúas asociados, pues estamos quitando cuando el parásito va al principio. Por lo que para $aaaaa$ hay 54 casi-capicúas asociados.
- **Utiliza dos dígitos distintos.** Hay tres sub casos:

  - *Es de la forma aabaa.* Si $d \neq a, b$ este tiene ocho posibilidades y puede ir en seis lugares, salvo cuando el parásito está al principio y es cero, aquí hay 47 casi-capicúas. Si el parásito es a o b los casi-capicúas asociados son: $aaabaa, baabaa,$
    $aabaaa, ababaa, aabbaa, aababa, aabaab$. Para cada capicúa de esta forma hay 54 casi-capicúas asociados.

- *Es de la forma abba.* Aquí también hay 54 casi-capicúas asociados.
- *Es de la forma ababa.* Aquí también hay 54 casi-capicúas asociados.

- **Utiliza tres dígitos distintos.** El capicúa es de la forma *abcba*. Si $d \neq a, b, c$ tiene 7 posibilidades y puede ir en seis lugares. Si d es a, b o c los casi-capicúas asociados son *aabcba*, *abacba*, *abcaba*, *abcbaa*, *babcba*, abbcba,abcbba,abcbab, *cabcba*, *acbcba*, *abccba*, *abcbca*, *abcbac*. Por lo que para *abcba* ahy 54 capicúas asociados.

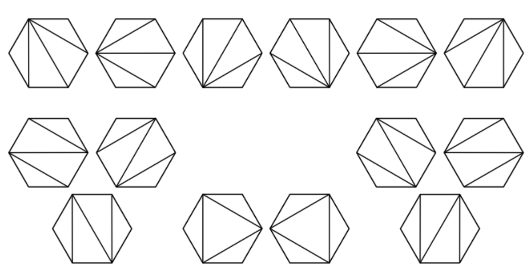
Caso 2: El capicúa tiene al 0 como dígito y $ab \neq 0$.

- **Es de la forma a0b0a.** De nuevo distinguimos dos casos: Si $d \neq 0, a, b$ tiene 7 posibilidades y seis lugares. Si d es a, b o 0 hay 12 capicúas asociados que se pueden enlistar con cuidado. Aquí hay 54 capicúas asociados.
- **Es de la forma ab0ba.** Aquí también hay 54 capicúas asociados.
- **Es de la forma a000a.** También hay 54 capicúas asociados.

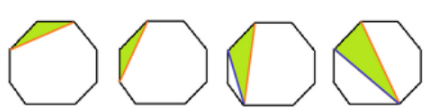
Cada capicúa genera 54 casi-capicúas y hay 900 capicúas de 5 dígitos, un total de $900 \times 54 = 48600$ números casi-capicúas.

Solución Problema 13. El 8 tiene más posibilidades. Las ternas para seis son $(1, 2, 3)$ y sus seis permutaciones; $(1, 1, 4)$ y sus tres permutaciones; y $(2, 2, 2)$. En total hay 10 ternas para 6. Ahora para ocho, haremos los casos de acuerdo al menor número que pertenece a la terna.
Caso 1: Si el menor es el 1, la terna es (1,3,4) y sus seis permutaciones.'
Caso 2: Si el menos es el 2 tenemos 3 permutaciones de (2,2,4) y las tres permutaciones de (2,2,3).
Caso 3: Si es mayor o igual a tres, no hay ninguna, pues $3 \cdot 3 > 8$.
En total se tienen 12 posibilidades para el 8.

Solución Problema 14. El octágono tiene 132 triangulaciones distintas. Sea C_n las maneras de triangular un n-ágono regular. Sin mayor problemas calculamos $C_4 = 2$ y $C_5 = 5$. Para C_6 tenemos la siguiente imagen



De esta manera $C_6 = 14$. Ahora $C_7 = 42$ para ver esto, hagamos el caso del octágono. Como encontraremos C_8 serán las mismas técnicas para encontrar C_7.



Hemos distinguido un vértice que es el que no pertenece al segmento naranja del triángulo verde en el primer octágono. Y los casos que haremos sobre este vértice son de acuerdo a donde va la primer diagonal que sale de este vértice (de izquierda a derecha). El primer caso es que no salgan diagonales de él. Las maneras de triangular el primer caso es C_7 pues sólo hay que triangular lo que hay debajo del triángulo verde. En los casos que sigue si la diagonal marcada en naranja es la primer diagonal que sale del vértice distinguible entonces la diagonal azul debe ir marcada, para que la naranja sea en efecto la primera. El segundo caso se triangula de C_6 maneras. El tercer caso se triangula de C_6 maneras por los polígonos que quedan a cada lado del triángulo verde. El cuarto caso se triangula de $C_4 \cdot C_5$ maneras. Los demás casos son simétricos. Así que $C_8 = 36_7 + 2C_6 + 2C_4 \cdot C_5$. Y como ya tenemos C_4, C_5, C_6 se obtiene que $C_8 = 132$.

Solución Problema 15. La respuesta es no. Consideremos un triángulo acutángulo ABD con todos sus lados desiguales y Γ la circunferencia que pasa por sus tres vértices, además de C el punto medio del arco menor BD. El contraejemplo es el cuadrilátero $ABCD$. Es bien conocido que $BC = CD$ y además $\angle DAC = \angle CAB$ por ser C punto medio. Y sin embargo $AD \neq AB$ por lo que $ABCD$ no es rombo. Nota: *Esta es la única manera de construir el contraejemplo.*

Canguro

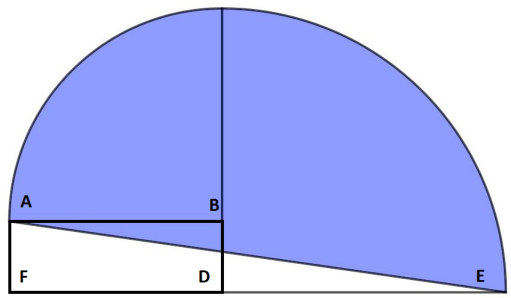
Solución Problema 1. La distancia es de 36 km. Supongamos que la distancia entre estaciones es de x kilómetros. Observemos que entre la estación 1 y la 5 hay cuatro tramos de longitud x, por lo que $4x = 6$ y la distancia entre estaciones es de $x = \frac{6}{4}$. De esto tenemos que la distancia entre la estación 1 y la 25 es de $24x = 24 \cdot \frac{6}{4} = 36$ km.

Solución Problema 2. El número 2019 deja residuo de 4 al dividirse entre n. Por las condiciones del problema, n divide a $407 - 4 = 403$, por lo que n también divide a $403 \times 5 = 2015$, es decir $n \,|\, 2019 - 4$.

Solución Problema 3. Hay 14 números. Como a divide a $10a + b$ tenemos que a divide a b. Haciendo casos, si $a = 1$ las posibilidades son 11,12,13,...,19 pero sólo 11,12 y 15 cumplen. Si $a = 2$ obtenemos 22 y 24, para $a = 3$ tenemos 33 y 36. Con $a = 4$ las soluciones son 44 y 48, si $a = 5$ sólo 55. Si $a \geq 6$ el único dígito que puede ser múltiplo de a es el mismo a solamente por lo que para sólo restan las soluciones 66, 77, 88 y 99. En conclusión los números son 11, 12, 15, 22, 24, 33, 36, 44, 48, 55, 66, 77, 88 y 99.

Solución Problema 4. El área es $\frac{25\pi - 2}{4}$. Sea F un punto de manera que $ABDF$ sea rectángulo. El área sombreada es el área de los dos cuartos de círculo y el rectángulo menos el área del triángulo AFE. Las áreas de los cuartos de círculo son $9\pi/4$ y $16\pi/4$, el área del rectángulo es 3 y el área del triángulo es 3,5, de donde obtenemos el resultado.

Solución Problema 5. La probabilidad es de $\frac{1}{4}$. Una vez que una hormiga elige un sentido, las otras hormigas ya sólo pueden tomar un sentido para no encontrarse de frente. Cada una escoge un sentido con probabilidad $\frac{1}{2}$ por lo que una vez que alguna escoge sentido no se encuentran con probabilidad $(\frac{1}{2})^3$ pero la primer hormiga tiene dos sentidos por escoger, por lo que la probabilidad es $2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.



Solución Problema 6. Totoro mintió en los números 31 y 32. Si un número entero no es divisible por un cierto número n entonces tampoco lo es entre ninguno de los múltiplo de n, por lo que si Totoro mintió en n también debió mentir en todos los múltiplos de n. Como Totoro solamente mintió dos veces seguidas entonces mintió en n y $n+1$ para los cuales sus múltiplos no se encuentran en la lista de enteros entre el 1 y el 50. De modo que deben ser mayores a 25. Notemos demás que los números deben ser primos o bien potencias de un sólo número primo ya que de lo contrario, el numero que pensó Totoro tampoco sería divisible por algún otro número menor y habría mentido en más ocasiones. No hallaremos bien, dos números primos consecutivos entre 25 y 50, ya que estos únicamente son 29,31, 37, 41, 43 y 47. Y los únicos números que son potencia de un número primo son $3^3 = 27$ y $2^5 = 32$. Por lo que la única opción es que Totoro haya mentido en 31 y 32.

Solución Problema 7. La suma es 0. Al sumar las tres ecuaciones tenemos que

$$a + b + c = (2b + c) + (2c + a) + (2a + b) = 3a + 3b + 3c.$$

De donde $a + b + c = 3(a + b + c)$ y $a + b + c = 0$. Una manera de lograr esta suma es haciendo todos los números cero.

Solución Problema 8. El resultado es 17. Al sumar los números ab, bc, cd y da de manera convencional nos damos cuenta que $a + b + c + d$ es un número con 7 en las unidades. Podría ser $17, 27, \ldots$ etc., pero contrastando esta información con las decenas tenemos que $a + b + c + d = 17$, de modo que este termine en 7 y *lleve* 1.

Solución Problema 9. 9π o 16π. El área puede ser 9π o 16π. Sea $\angle ADB = \alpha$ y $\angle DAC = \beta$. Entonces $\alpha + \beta = 105$ y dependiendo de la orientación del cuadrilátero $\alpha - \beta = 15$ o $\beta - \alpha = 15$. Así $\alpha = 60$ o 45. Entonces el arco menor representa un tercio o un cuarto de perímetro. Por lo que el radio de la circunferencia es 3 o 4. Se sigue que el área es 9π o 16π.

Solución Problema 10. Hay 71 números que cumplen esto. Escribamos como $A56$ un número de los que queremos. Como $A56$ es múltiplo de 56, lo es de 8 y por lo tanto A es par. También tenemos que $A56 = 100A + 56$ es múltiplo de 7, como 100 y 7 son coprimos se tiene que A es un múltiplo de 7. Así que A es múltiplo de 14. Análogamente se prueba que si A es un múltiplo de 14 entonces $A56$ es un múltiplo de 56. Por lo que sólo hay que contar cuántos A de a lo más tres cifras son múltiplos de 14. Sabemos que este número es la parte entera de $\frac{1000}{14}$, que es 71.

Solución Problema 11. El ángulo mide $10°$. Por ángulos entre paralelas tenemos que $\angle OBA = 80°$. En el triángulo isósceles BOA se cumple que $\angle BOA = 20°$ por lo que $\angle BCA = 10°$.

Solución Problema 12. Hay 36 maneras. Diremos que un ciclo de k abejas es la emigración de estas k abejas, donde cada abeja emigra a algún panal donde estaba alguna otra de las $k-1$ abejas. En un ciclo participan al menos 2 abejas, por lo que en la emigración de 7 abejas no puede haber más de 3 ciclos. Haremos los casos sobre el número de ciclos. Si hay un ciclo, la abeja del centro tiene 6 posibilidades a donde ir y la abeja que está a donde se movió la central tiene dos direcciones para tomar, una vez que ambas abejas eligen las demás quedan determinadas, pues sólo se formará un ciclo, con un ciclo hay $6 \times 2 = 12$ maneras. Si hay dos ciclos uno de ellos debe ser de 2 abejas y el otro de 5 abejas. El ciclo de 2 abejas lo podemos escoger de 6 maneras (no puede usar el centro) y el ciclo de las cinco abejas lo podemos hacer de 2 maneras, con dos ciclos también tenemos 12 maneras. Finalmente si hay tres ciclos deben ser dos de 2 abejas y otro de 3 abejas. Donde se hará el ciclo de 3 abejas lo podemos escoger de 6 maneras (debe usar el centro) y este ciclo se puede hacer de 2 maneras. Los otros dos ciclos quedan determinados y se pueden hacer de una sola manera, aquí también hay 12 maneras. En resumen, hay 12+12+12=36 maneras de emigrar para las abejas.

Solución Problema 13. Hay 10 números saltamontes entre 1 y 20. Buscamos los n tales que exista una elección de signos de manera que

$$1 \pm 1 \pm 2 \pm \cdots \pm n = n.$$

Como $1 \pm 1 \pm 2 \pm \cdots \pm n$ y $1 + 2 + \cdots + n$ tienen la misma paridad, una condición necesaria es que

$$1 + \frac{n(n+1)}{2} \equiv n \pmod 2,$$

la cual es resuelta por $n \equiv 2, 3 \pmod 4$. Veremos que esta última condición también es suficiente para ser saltamontes. Como $1 - 1 + 2 = 2$ y $1 + 1 - 2 + 3 = 3$ tenemos que 2 y 3 son saltamontes. Usando que

$$-k - (k+1) + (k+2) + (k+3) = 4,$$

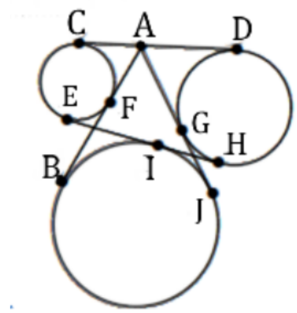
llegamos a que los números $\{2, 6, 10, 14, 18\}$ y $\{3, 7, 10, 13, 16\}$ son saltamontes.

Solución Problema 14. El segmento CD mide 10. Para dos circunferencias se tiene que sus tangentes internas comunes miden lo mismo, al igual que sus tangentes comunes externas.

Utilizando esto y de acuerdo al dibujo tenemos que:

$$\begin{aligned} DC = EH &= EI + IH \\ &= BF + GJ \\ &= AB + AJ - (AF + AG) \\ &= 2AB - CD. \end{aligned}$$

Lo anterior implica que $DC = 10$.



Solución Problema 15. El coeficiente de x^{2019} en $A(x) \cdot B(x)$ es $2 - \frac{1}{2020}$. En $A(x)$ el coeficiente de x^m es $\frac{1}{m}$ para $m = 1, \ldots, 2019$. Y en $B(x)$ el coeficiente de x^m es $\frac{1}{2020-m}$ para $m = 0, \ldots, 2019$.
Entonces si tenemos x^m (que tiene coeficiente $\frac{1}{m}$) en $A(x)$ para conseguir x^{2019} debemos multiplicarlo por x^{2019-m} en $B(x)$ (que tiene coeficiente $\frac{1}{2020-(2019-m)} = \frac{1}{m+1}$). Esto funciona para $m = 1, \ldots, 2019$ y aporta $\frac{1}{m(m+1)}$ al coeficiente de x^{2019} en $A(x) \cdot B(x)$. Falta agregar un 1 por la multiplicación del 1 en $A(x)$ y el coeficiente 1 de x^{2019}. Por lo que el coeficiente de x^{2019} es

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{m=0}^{2019} \frac{1}{m(m+1)} &= 1 + (1 - \frac{1}{2020}) \\ &= 2 - \frac{1}{2020}. \end{aligned}$$

Por la bien conocida suma telescópica.

Uombat

Solución Problema 1. Son $(1, 1, -4)$; $(-1, -1, 4)$; $(1, 3, 8)$; $(-1, -3, -8)$; $(1, 4, 5)$; $(-1, -4, -5)$; $(2, 2, 4)$; $(-2, -2, -4)$ y $(0, k, -k)$ con $k \in \mathbb{Z}$ y sus permutaciones. Sean x, y, z números que cumplen

$$xyz = 2(x + y + z). \quad (*)$$

Si alguno de x, y, z es cero obtenemos las soluciones $(0, k, -k)$ con $k \in \mathbb{Z}$. La ecuación $(*)$ implica que

$$\begin{aligned} 2(|x| + |y| + |z|) &\geq 2|x + y + z| \\ &= 2|xyz| \\ &= 2|x| \cdot |y| \cdot |z|. \end{aligned}$$

Sea $|x| = a$, $|y| = b$ y $|z| = c$. Por lo que a, b, c deben cumplir que, de acuerdo a la desigualdad anterior y dividiendo entre abc que

$$\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} \geq \frac{1}{2}, \quad (**)$$

y esta ecuación exhibe que a, b, c no pueden ser muy grandes al mismo tiempo. Sin pérdida de generalidad $a \geq b \geq c$. Si $c = 1$ entonces $b \leq 4$ y si $c = 2$ entonces $b = 2$. Si $c \geq 3$ entonces $(**)$ es menor a $\frac{1}{9}$. Una vez que escogemos valores b, c estos sólo pueden venir de finitos valores de y, z y una vez que escogemos los valores de y, z a x le queda un sólo valor para cumplir $(*)$. Ilustraremos un sólo caso que es cuando $c = 1$ y $b = 3$. En este caso $(y, z) = (1, 3), (-1, -3), (1, -3), (-1, 3)$. Usando que (x, y, z) es solución si y sólo si $(-x, -y, -z)$ lo es, sólo revisaremos los siguientes dos casos:

- $(y, z) = (1, 3)$. En este caso $(*)$ se convierte en $3x = 8 + 2x$ por lo que $x = 8$.
- $(y, z) = (1, -3)$. En este caso $(*)$ se convierte en $-3z = -4 + 2z$ en este caso no hay soluciones enteras.

Los demás casos se resuelven de forma análoga.

Solución Problema 2. Son 24 personas. Si en la fiesta se encuentran x hombres y y mujeres, habrían $\frac{3}{4}x$ hombres bailando con $\frac{4}{5}y$ mujeres en parejas. Como cada pareja es de un hombre con una mujer entonces

$$\frac{3}{4}x = \frac{4}{5}y,$$

por lo que $x = \frac{16y}{15}$. Ya que 15 y 16 no tienen divisores en común mayores a 1, y debe ser un múltiplo de 15, dígase 15, 30 o 45. Observemos que si el número de mujeres fuera igual a 30 o 45, el número total de personas en la fiesta sería mayor a 50, por lo que en la fiesta hay sólo $y = 15$ mujeres y $x = 16$ hombres. Luego, en la pista se encuentran $\frac{3}{4} \cdot 16 = 12$ parejas, y un total de 24 personas bailando.

Solución Problema 3. El valor es 3. El valor de la operación $n*m$ en la tabla se ubica en la n-ésima fila y $m-$ésima columna. De donde tenemos que $(2 * 4) = 3$, $(1 * 3) = 3$ y $(3 * 3) = 3$. Por lo que

$$(2 * 4) * (1 * 3) = 3 * 3 = 3.$$

Solución Problema 4. Son tres pares. Factorizando la suma de cubos en la expresión, obtenemos que

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)(a^3 + b^3) &= (a^2 + b^2)(a + b)(a^2 - ab + b^2) \\ &= (a^2 + b^2)(a^2 - ab + b^2) \\ &= a^4 - a^3b - ab^3 + 2a^2b^2 + b^4. \end{aligned} \tag{1}$$

Ya que $a^4 + b^4 = a^4 - a^3b - ab^3 + 2a^2b^2 + b^4$, podemos simplificar la expresión de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a^3b + ba^3 - 2a^2b^2 &= 0 \\ ab(a^2 - 2ab + b^2) &= 0 \\ ab(a - b)^2 &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

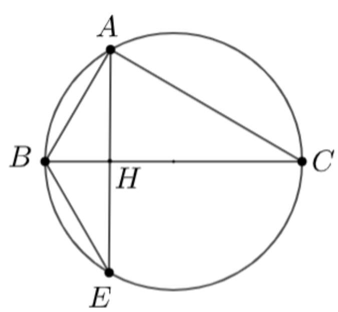
La ecuación $ab(a - b)^2 = 0$ la cumplen aquellas parejas (a, b) tales que $a = 0$, $b = 0$ o bien $a = b$, de modo que las parejas que cumplen esta ecuación y además $a + b = 1$, son únicamente tres: $(0, 1)$, $(1, 0)$ y $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Solución Problema 5. El área es $27\sqrt{3}$. Dado que el área del cuadrado es 18, sabemos que cada lado del cuadrado mide $3\sqrt{2}$. Ya que cuadrado está inscrito en el círculo, su diagonal corresponde al diámetro del círculo el cual es de $3\sqrt{2}\sqrt{2} = 6$. Al trazar la mediana del triángulo equilátero, recordemos que el centro de la circunferencia parte a la mediana en proporción 2:1, por lo que ésta mide $\frac{3}{2}$ del diámetro de la circunferencia. De modo que la altura del triángulo es de 9 y al ser equilátero su lado mide $(\frac{2}{\sqrt{3}})9 = \frac{18}{\sqrt{3}}$. De donde el área del triángulo es

$$\frac{\frac{18}{\sqrt{3}}1 \times 9}{2} = \frac{81}{\sqrt{3}} = 27\sqrt{3}.$$

Solución Problema 6. El octágono tiene 132 triangulaciones distintas. Ver solución de Walabi 14.

Solución Problema 7. El área es 60 u^2. Al ser AE perpendicular al diámetro de la circunferencia, los triángulos BAH y BEH son congruentes. Por otro lado, tenemos que la medida del segmento BH es $1/4$ de la medida del diámetro BC, por lo que el área del triángulo BAH es una cuarta parte de la de ABC. De esto tenemos que $(\triangle BAH) = (\triangle BEH) = 30$, por lo que el área del triángulo es $(\triangle BAE) = (\triangle BAH) + (\triangle BEH) = 60$.



Solución Problema 8. El resultado es 50062. Veamos que si $a = 673$ hay una única terna posible, si $a = 672$ hay dos ternas y (672,672,675) (672,673,674), si $a = 671$ hay cuatro ternas (671, 671, 677), (671, 672,676), (671,673,675) y (671,674, 674). El patrón se sigue de la siguiente manera:

Valor de a	Número de ternas (a, b, c)
673	1
672	2
671	4
670	5
669	7
$\vdots$	$\vdots$
511	244
510	245
509	245
508	244
507	244
$\vdots$	$\vdots$
22	1
21	1

Observa que se tiene la suma de 1 a 244 sin los múltiplos de 3 y dos veces la suma de 1 a 245. El número de ternas (a, b, c) es:

$$\frac{(244)(245)}{2} - 3 * \frac{(81)(82)}{2} + \frac{(245)(246)}{2} = 50062.$$

Solución Problema 9. La probabilidad es $\frac{64}{127}$. Para hacer la eliminación se jugarán en el torneo 7 rondas en total, ya que en cada ronda se eliminan la mitad de los participantes. Digamos que A es el mejor jugador y B el segundo mejor. Para que B quede en segundo lugar del torneo tiene que participar en las 7 rondas, hasta llegar a jugar con A en la séptima. Para lograr esto, debe ser en emparejado en cada una de las primeras 6 rondas con cualquier participante distinto A. Hagamos primero el cálculo de la probabilidad de que B pase cada una de las rondas:

- 1er ronda: En esta ronda participan los 128 jugadores. B gana esta ronda si es emparejado con alguno de los 126 que no son mejores a él. Ya que es hay 127 jugadores para emparejar con B, la probabilidad de éxito es $\frac{126}{127}$.
- 2da ronda: Sólo participan 64 jugadores. B gana si es emparejado con cualquiera de los 62 jugadores que son peores que él, la probabilidad de éxito es $\frac{62}{63}$.
- 3ra ronda: Participan 32 jugadores. B puede ser emparejado con cualquiera de los 31 distintos a él y gana al jugar con 30 de ellos, la probabilidad de éxito es $\frac{30}{31}$.

Así sucesivamente vemos que las probabilidades para cada ronda son:

Ronda	Participan	Éxitos	Probabilidad de B de pasar
1	128	126	$\frac{126}{127}$
2	64	62	$\frac{62}{63}$
3	32	30	$\frac{30}{31}$
4	16	14	$\frac{14}{15}$
5	8	6	$\frac{6}{7}$
6	4	2	$\frac{2}{3}$

La probabilidad de que B llegue a la ronda final es igual a la multiplicación de las probabilidades de que B pase cada una de las rondas. Ésta es:

$$\left(\frac{126}{127}\right)\left(\frac{62}{63}\right)\left(\frac{30}{31}\right)\left(\frac{14}{15}\right)\left(\frac{6}{7}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2^6}{127}=\frac{64}{127}.$$

Solución Problema 10. La probabilidad es $\frac{1}{11}$. Contemos primero el número de casos distintos en las que Yareli puede usar los 12 gises. Si hubieran 12 gises de distintos colores podríamos ordenarlos de 12! formas, pero al haber 4 elementos que se repiten 3 veces cada uno, éstos pueden utilizarse únicamente en $\frac{12!}{3!3!3!3!}$ órdenes distintos. Ahora contemos los casos en los que Yareli comienza y termina usando un gis del mismo color. Si comienza con cualquier de los cuatro colores, imaginemos que guarda un gis de ese mismo color para usarlo al final, mientras que el resto de los 10 gises los utiliza en cualquier orden que prefiera. Escoger el primer gis lo hace de 4 formas distintas (una por cada color disponible) y el orden para los demás 10 gises, corresponde a ordenar 10 elemento con repetición. Entre estos 10 gises hay 2 de un mismo color, y 3 de cada uno de los otros 3 colores, entonces hay $\cdot\frac{10!}{2!3!3!3!}$ formas distintas de ordenarlos. Por lo que la probabilidad buscada es:

$$\frac{\#\text{casos favorables}}{\#\text{casos totales}}=\frac{4\cdot\frac{10!}{2!\cdot3!\cdot3!\cdot3!}}{\frac{12!}{3!\cdot3!\cdot3!\cdot3!}}=\frac{4\cdot10!\cdot3!\cdot3!\cdot3!\cdot3!}{12!\cdot2!\cdot3!\cdot3!\cdot3!}=\frac{4\cdot3}{12\cdot11}=\frac{1}{11}.$$

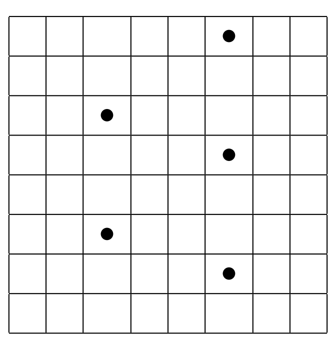
Solución Problema 11. El área es 9π. Denotemos por O al centro de la circunferencia. Al ser $\angle APB=15^\circ$ ángulo externo y $\angle DQC=105^\circ$ interno, tenemos las siguiente medidas:

$$\angle COD-\angle AOB=30^\circ,$$

$$\angle COD+\angle AOB=210^\circ.$$

Sumando las ecuaciones se tiene que $2\angle COD=240^\circ$ y $\angle COD=120^\circ$. Ya que el arco menor CD tiene un ángulo central de 120°, este corresponde a un tercio de circunferencia y el perímetro de la circunferencia es de 6π. Siendo su diámetro de 6 y radio de 3, el área del círculo es igual a $3^2\pi=9\pi$.

Solución Problema 12. El siguiente tablero muestra un posible acomodo de las 5 piedras. Las posiciones en el tablero son: (3,3), (6,1), (6,4), (3,6), (6,7)



Solución Problema 13. El área es 10π. Es fácil darse cuenta que C debe ser centro del cuadrado más pequeño por lo que NC es la diagonal del cuadrado y esto hace que L esté en NC. De manera análoga K está en MC.
La recta AC es la mediatriz de NM por simetría y por tanto también es mediatriz de LK.
Sea T el punto medio de BK y digamos que la mediatriz de BK intersecta a AC en S. Entonces S es circuncentro de BLK (3).
Tenemos que $ST = 1$ por teorema de tales y $BT = 3$ por lo que $BS = \sqrt{10}$ (4). Así el área del circuncírculo de BLK es 10π.

Solución Problema 14. Son 10 saltamontes. Ver solución de Canguro 13.

Solución Problema 15. Para **(a)** La desigualdad es equivalente a $z(b-a) > z(a-b)$ la cual es cierta pues $0 < a < b < z$.

Para **(b)** analizaremos dos casos.
Caso 1: $|z|$ >**2019.**
Si $z < 2019$ todos los paréntesis en A y en B son negativos y tendríamos el producto de 2019 números negativos, que es negativo. Este caso no nos aporta soluciones. Si $z > 2019$,por inciso (a) tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} z+1 &> z-1 \\ (z-2)(z+3) &> (z+2)(z-3) \\ (z-4)(z+5) &> (z+4)(z-5) \\ &\vdots \\ (z-2018)(z+2019) &> (z+2018)(z-2019). \end{aligned}$$

Multiplicando todos los términos de la izquierda obtenemos B y si multiplicamos los de la derecha obtenemos A. Por lo que $B > A$ si $z > 2019$.
Caso 2: $|z| \leq 2019$**.** En este caso alguno de A o B se hará cero. Como no se hacen cero simultáneamente, de tener soluciones deberíamos estar en el caso que $A > B = 0$. Es decir $z \in \{-2019, -2017, \ldots, -1, 0, 2, \ldots, 2018\}$. Haremos los siguientes sub caso s para determinar cuando $A(z) > 0$.

Sub caso 2.1: $z \geq 0$**.** Sea $A(z) = A$. En el producto $A(z)$ los términos $(z + k)$ los podemos eliminar pues no cambian el signo de $A(z)$.Los números {0,2,...,2018} los podemos emparejar en 505 parejas de la forma $(4m, 4m + 2)$ con $0 \leq m \leq 504$ por lo que hay 505 parejas. Fijando un $0 \leq m \leq 504$ tenemos que $A(z)$ luce así

$$A(z) = I(z) \cdot (z - 4m - 1) \cdot D(z). \quad (*)$$

Notemos que $I(4m)$ y $I(4m + 2)$ tienen el mismo signo. De la misma manera $D(4m)$ y $D(4m + 2)$ tienen el mismo signo. Pero $(z - 4m - 1)$ sí cambia de signo en $4m$ y $4m + 2$ por lo que $A(4m) \cdot A(4m + 2)$ es negativo. Entonces uno es negativo y el otro positivo. Por lo que por cada pareja alguno hace a A negativo y el otro positivo. Este caso aporta 505 soluciones.

Sub caso 2.2: $z < 0$**.** Sea $A(z) = A$. Los números {-1,-3,...,-2019} los podemos emparejar en 505 parejas de la forma $(-4m - 1, -4m - 3)$ con $0 \leq m \leq 504$. En el producto podemos eliminar todos los términos $(z-k)$ pues cada uno es negativo y son 1010 de estos términos entonces su producto es positivo y no afecta el signo de $A(z)$. Fijando un $0 \leq m \leq 504$ tenemos que $A(z)$ luce así:

$$A(z) = I(z) \cdot (z + 4m + 2) \cdot D(z).$$

Notemos que $I(-4m-1)$y $I(-4m-3)$ tienen el mismo signo. De la misma manera $D(-4m-1)$ y $D(-4m-3)$ tienen el mismo signo. Pero $(z+4m+2)$ sí cambia de signo en $-4m-1$ y en $-4m-3$ por lo que $A(-4m-1) \cdot A(-4m-3)$ es negativo. Entonces uno es negativo y el otro positivo. Por lo que en cada pareja alguno hace a A negativo y el otro positivo. Este caso también aporta 505 soluciones. En total hay 1010 soluciones.

Ardilla

Solución Problema 1. La probabilidad es $\frac{9}{28}$. Lulú puede sacar 5 pelotas de la bolas de $\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!3!} = 56$ formas distintas, siendo este el número de casos totales. Ahora bien, los casos favorables en los que Lulú obtiene 1 roja, 2 verdes y 2 azules son $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ ya que hay 2 formas de que seleccione una pelota roja, $\binom{3}{2} = 3$ formas de escoger las verdes y $\binom{3}{2} = 3$ de escoger las azules. La probabilidad buscada es

$$\frac{\#\text{casos favorables}}{\#\text{casos totales}} = \frac{18}{56} = \frac{9}{28}.$$

Solución Problema 2. Las parejas son $(1, 2018)$ y $(2018, 1)$. Si $a, b \geq 5$ entonces $a^b \geq 3215$. Por lo que sin pérdida de generalidad $a \leq 4$. Si $a = 1$ obtenemos las solución (1,2018). Si $a = 2$ tenemos que $2^b + b^2 = 2019$ analizando módulo 4, el lado izquierdo es congruente a b^2 y el derecho a 3, pero 3 no es residuo cuadrático. Si $a = 3$ obtenemos $3^b + b^3 = 2019$ y esto implica que b es múltiplo de 3 y por tanto el lado izquierdo es múltiplo de 9 pero el derecho no. Si $a = 4$ se resuelve igual que en el caso $a = 2$. Por lo que las soluciones son $(1, 2018)$ y $(2018, 1)$.

Solución Problema 3. Mide 12.5 unidades. Sean A y B los puntos de tangencia de la tangente común, A está en la circunferencia pequeña. Sean Oy P los centros de las circunferencias, O es el centro de la pequeña. La tangente común intersecta a a unión de centros en C. Los triángulos OAC y PBC son semejantes en razón $2/3$ por lo que $AC = 4$ y $BC = 6$ usando Pitágoras se concluye que $OP = 12{,}5$.

Solución Problema 4. El resultado es 50062. Ver solución de Uombat 8.

Solución Problema 5. El área es 60 u^2. Ver solución de Uombat 7.

Solución Problema 6. La probabilidad es $\frac{1}{11}$. Contemos primero el número de casos distintos en las que Yareli puede usar los 12 gises. Si hubieran 12 gises de distintos colores podríamos ordenarlos de 12! formas, pero al haber 4 elementos que se repiten 3 veces cada uno, éstos pueden utilizarse únicamente en $\frac{12!}{3!3!3!3!}$ órdenes distintos. Ahora contemos los casos en los que Yareli comienza y termina usando un gis del mismo color. Si comienza con cualquier de los cuatro colores, imaginemos que guarda un gis de ese mismo color para usarlo al final, mientras que el resto de los 10 gises los utiliza en cualquier orden que prefiera. Escoger el primer gis lo hace de 4 formas distintas (una por cada color disponible) y el orden para los demás 10 gises, corresponde a ordenar 10 elemento con repetición. Entre estos 10 gises hay 2 de un mismo color, y 3 de cada uno de los otros 3 colores, entonces hay $\cdot\frac{10!}{2!3!3!3!}$ formas distintas de ordenarlos. Por lo que la probabilidad buscada es:

$$\frac{\#\text{casos favorables}}{\#\text{casos totales}} = \frac{4\cdot\frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 3!}}{\frac{12!}{3!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 3!}} = \frac{4\cdot 10!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 3!}{12!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 3!} = \frac{4\cdot 3}{12\cdot 11} = \frac{1}{11}.$$

Solución Problema 7. La suma de las hojas es 499995. La suma de los números del 1 al 9 es 45. Si sumamos de manera convencional los nueve números que necesitamos, siempre suma 45 y llevamos 4. La respuesta es 499995.

Solución Problema 8. La probabilidad es $\frac{1}{11}$. Si Daniela se sienta en el primer asiento y las siguientes 10 personas intentan sentarse lo más juntas posible (dejando sólo un espacio entre ellos), observemos que los asientos a ocupar por las 11 personas son 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 y 19. En este caso, el asiento número 20 se queda vacío (disponible).

D	•	3	•	5	•	7	•	9	•
11	•	13	•	15	•	17	•	19	•

En caso de que los asistentes no decidan hacer esto, otra posibilidad es que alguno de ellos (solo uno) decida dejar dos asientos de distancia entre la personas anterior. Esto podría decidir hacerlo cualquiera de las 10 personas, por lo cual hay 10 acomodos nuevos, dando un total de 11 formas distintas para sentarse. No más de una persona puede dejar un espacio de dos asientos, ya que de lo contrario no cabrían todas las personas sentadas en los 20 asientos. Notemos que en estos acomodos el asiento número 20 es ocupado, por lo que no queda vacío al llegar Yareli. Por lo que la probabilidad de que el último asiento se encuentre disponible es

$$\frac{\#\text{casos favorables}}{\#\text{casos totales}} = \frac{1}{11}.$$

Solución Problema 9. El octágono tiene 132 triangulaciones distintas. Ver solución de Walabi 14.

Solución Problema 10. La probabilidad es $\frac{64}{127}$. Ver solución de Uombat 9.

Solución Problema 11. El área es 9π. Ver solución de Uombat 11.

Solución Problema 12. 10 saltamontes. Ver solución de Canguro 13.

Solución Problema 13. Procederemos por contradicción. Si $W \cup U$ es un subespacio vectorial entonces $\text{span}(W \cup U) = W \cup U$. Como ninguno de ellos contiene al otro tenemos que existen $w \in W - U$ y $u \in U - W$. Ahora $u + w \in \text{span}(W \cup U) = W \cup U$ por lo que $u + w \in W$ o $u + w \in U$ sin pérdida de generalidad $u + w \in W$ entonces por ser W espacio vectorial $u \in W$ lo cual es una contradicción.

Solución Problema 14. Para cada $m \in \mathbb{N}$ sea N_m el residuo de N en módulo m. Notemos que si $k < x$ entonces N_k =0 o 1. Entonces cada número entre $2 \leq T \leq x - 1$ divide a N o a $N - 1$. Por lo que x es el menor entero positivo tal que no divide a N ni a $N - 1$. Sea a el menor divisor de N mayor que 1 y b respectivamente para $N - 1$. El número ab no divide a N ni a $N-1$ entonces $x \leq ab$. Si $x = uv$ con $(u,v) = 1$ entonces $u, v \in T$ y sin perder generalidad u divide a N y v a $N-1$. Y por definición $a \leq u$ y $b \leq v$ entonces $x = uv = ab$ pero es fácil ver que ab es la forma $2p$ para algún p primo. De otra forma $x = p^\alpha$.

Solución Problema 15. La probabilidad es $\frac{1}{13}$. Sea X_n el residuo de a_n en módulo 13. (a_n) es una cadena de Markov y por lo tanto (X_n) también lo es con espacio de estados $\{0, \ldots, 12\}$. Construyamos la matriz p_{ij} en cuya entrada ij tiene la probabilidad de que la cadena pase del estado i al j. Vamos a tener que para i fijo, $p_{ij} = 1/6$ si $j = i+1, \ldots, i+6$ módulo 13. Y cero en otros casos. La matriz construida satisface que la suma de cada columna es 1 y la suma de cada fila también es 1 entonces es una matriz doblemente estocástica. Por lo que la distribución límite de la cadena es sólo la uniforme i.e en el límite la fracción del tiempo que la cadena pasa en cada estado es la misma, por lo que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[X_n = 0] = \frac{1}{13}$.

El Centro de Alto Rendimiento en Matemáticas fue fundado en 2011 en San Luis Potosí, México. Desde entonces, nos hemos dedicado a la preparación de estudiantes, profesores y familias para distintos concursos de matemáticas, principalmente aquellos que caen bajo el paragüas de Olimpiada de Matemáticas. Hemos tenido la oportunidad de trabajar con cientos de estudiantes muy talentosos, dentro y fuera de la Olimpiada, en todo México y partes de América Latina.

En CARMA estamos comprometidos con la educación matemática, con proporcionar un espacio accesible y seguro donde todos, todas y todes puedan continuar su preparación olímpica permanente, dar sus primeros y segundos pasos en concursos, o acercarse a las matemáticas desde una perspectiva lúdica y un aprendizaje basado en problemas. Para más información sobre CARMA: Centro de Alto Rendimiento en Matemáticas, te presentamos los siguientes enlaces:

- Cursos en https://cursos.carmaenlinea.com/
- Concursos en https://concursos.carmaenlinea.com/.
  Anualmente organizamos Olimpiada Femenil (febrero-marzo), Olimpiada Virtual de Matemáticas (agosto) y Olimpiada de Otoño (septiembre-octubre).
- Nuestra página de Facebook en http://fb.com/carmatematicas
- Nuestro canal de YouTube en https://youtube.com/carma2011
- El canal de YouTube de ugesaurio en https://www.youtube.com/ugesaurio

CENTRO DE ALTO RENDIMIENTO EN MATEMATICAS

CARMA

·2011·

CENTRO DE ALTO RENDIMIENTO EN MATEMATICAS

CARMA

·2011·