**Centro de Alto Rendimiento en Matemáticas**

# XI Olimpiada de Otoño: 2021

## Problemas y soluciones

# XI Olimpiada de Otoño 2021

Equipo CARMA

6 de enero de 2022

Noviembre 2021

Los problemas originales de este material son autoría del Equipo CARMA, a saber: Germán Puga, Cecilia Hernández, Armando Moreno, Luis Islas y Danielle Flores. Además: Yareli Navarro en el Concurso de Física y José Luis Carballo en el Concurso de Informática. Este material puede ser distribuido de manera libre porque nuestro compromiso es con la creación y divulgación de material para Olimpiada de Matemáticas; **por favor considera hacer un donativo, porque todxs tenemos que comer y pagar renta.** Por el amor de Emmy Noether, no subas este material a Scribd ni cobres por compartirlo.

Para cualquier correción, por favor comunícate con nosotros vía Facebook o a nuestro correo electrónico en matematicascarma@gmail.com.

La persona a cargo del material es Danielle Flores.

Primera edición: Noviembre 2021

Editorial Dinosaurio
San Luis Potosí, México
`carmatematicas (at) gmail (dot) com`

Si este material te ha sido útil, por favor considera apoyar nuestro proyecto editorial.
Puedes hacerlo en Patreon, comprometiendo un donativo mensual.

https://www.patreon.com/ugesaurio

También puedes hacer una donación ocasional vía PayPal.

https://www.paypal.com/paypalme/ugesaurio

O bien, mediante depósito o transferencia, a nombre de Eugenio Daniel Flores Alatorre en BBVA Bancomer, a través de su aplicación bancaria, deposito en practicaja o en cualquier Oxxo del país:

CLABE: 012700004649844474 número de tarjeta: 4152 3133 9055 2979

# Introducción

La XI Olimpiada de Otoño se celebró en septiembre y octubre de 2021. Esta edición contó con considerables cambios: se realizaron dos etapas y se incluyeron concursos de Informática, Física y Divulgación. De esta manera, la Olimpiada de Otoño tiene un mayor parecido al proceso que tenemos en la Olimpiada Femenil, con la diferencia de mantener el formato del examen para la primera y segunda etapa.

El concurso de Divulgación se celebró en categorías Peques (Primaria), Medianos (Secundaria) y Grandes (Preparatoria), y tuvo una participación de 5, 6 y 18, respectivamente, para un total de 26 participantes. El concurso de Informática se celebró en las mismas categorías de Peques (Primaria), Medianos (Secundaria) y Grandes (Preparatoria), y tuvo una participación de 11, 18 y 29, respectivamente, para un total de 58 participantes. El concurso de Física se celebró en dos categorías: Medianos (Secundaria) y Grandes (Preparatoria), y tuvo una participación de 68 y 84, respectivamente, para un total de 152 participantes. Finalmente, el concurso de Matemáticas se celebró en las cinco categorías clásicas de nuestros concursos:

**Cuyo:** 3ro de Primaria (3er año) y 4to de Primaria (4to año)
**Koala:** 5to de Primaria (5to año) y 6to de primaria (6to año)
**Walabi:** 1ro de Secundaria (7mo año) y 2do de Secundaria (8vo año)
**Canguro:** 3ro de Secundaria (9no) y 1ro de Bachillerato (10mo año)
**Uombat:** 2do de Bachillerato (11vo) y 3ro de Bachillerato (12vo año)

y tuvo una participación de 122, 190, 312, 260 y 159, para un total de 1043 participantes.

Como cada participante puede decidir si compite en más de un concurso, la suma de estos números supera la participación individual total. Además, contamos con participantes inscritos desde México, Perú, Bolivia, Estados Unidos, Honduras y Ecuador.

# Ganadores

Las y los ganadores se definen a partir de la segunda etapa. Procuramos mantener una proporción de 1 : 2 : 3 : 4 : 50 en cuanto a Primer Lugar : Segundo Lugar : Tercer Lugar : Mención Honorífica : Participación, considerando los números de la primera etapa. Es decir, por cada 60 participantes de cada concurso y cada categoría en la primera etapa, entregamos 1 Primer Lugar, 2 Segundos Lugares, 3 Terceros Lugares, 4 Menciones Honoríficas y el resto reciben constancia de participación.

## Física, Medianos

### Primer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| Perú | Camila Celeste Ochoa Huaman | Saco Oliveros |

### Segundo Lugar

| | | |
|---|---|---|
| Perú | Rosangel Alexandra Bullon Linares | Saco oliveros |
| México | Luis Lavariega Meneses | Olimpiada Oaxaca |

### Tercer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| Perú | Flavio Josue Sanjorge Llactas | Saco Oliveros |
| México | Isaac Tonatiuh Jacobo Rodríguez | Escuela Secundaria Técnica 43 Luis Enrique Erro |
| Perú | CALSIN CHURA FERNANDO RODRIGO | I.E.P. CRAMER |

### Mención Honorífica

| | | |
|---|---|---|
| México | Emmanuel Buenrostro Briseño | CEPAC Jalisco |
| México | Ruth Esmeralda Utrilla Verá | Secundaria 44 |
| México | Yessy Sophia Vidal Rosaldo | Técnica 9 |
| México | Julio Emmanuel Bautista Apolinar | SECUNDARIA GENERAL 69 EMILIANO ZAPATA. |
| México | Charly Giovany Vidal Rosaldo | Secundaria Técnica 9 |

## Física, Grandes

### Primer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | Santiago González Salud | Olimpiada Oaxaca / COBAO 04 ¨El Tule¨ |

## Segundo Lugar

| | | |
|---|---|---|
| Perú | Manuel Mario Nadir Gilvonio Saez | IE. Prolog |
| México | Alina Martínez Ramos | CBTis 103 |
| México | Jesús Gilberto Flores Rivas | Instituto de Estudios Superiores de Los Mochis |

## Tercer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | Sophie Anguiano Rosas | Bachillerato de la Universidad Autónoma de Aguascalientes |
| Perú | Yirian Melissa Aguilar Romero | Prolog |
| México | Camila González Luján | Colegio de Bachilleres del Estado de Chihuahua Plantel 5 |
| México | Dana Elizabeth Torres Estrada | PrepaTec Eugenio Garza Sada |
| México | Abed Josué Calderón Romero | CECyTE 02 Xicohtzinco |

## Mención Honorífica

| | | |
|---|---|---|
| México | Sarah Martínez García | Motolinía |
| Perú | Fatima Stefania Olaya Herrera | PROLOG |
| México | Dario Alberto Armas Martinez | Colegio de bachilleres del estado de queretaro Plantel 9 |
| Perú | Juan Mathius Tasayco Pachas | PROLOG |
| México | Lino Alexis Mata Hernández | Cobach 28 |

# Informática, Peques

## Primer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| Perú | Yeray Romero | Cramer |

## Segundo Lugar

| | | |
|---|---|---|
| Bolivia | FAVIAN ALESSANDRO VARGAS QUISBERT | SAGRADO CORAZON DE JESÚS |
| México | Mónica Sofía Rangel Castillo | Colegio Hispano Americano |

## Tercer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| Perú | HUACASI DURAND ANDRE VLADIMIR | I.E.P. CRAMER |
| México | Fátima Valeria Rangel Castillo | Colegio Hispano Americano |
| Perú | Samir Alexander Carrillo Casas | Prolog |

# Informática, Medianos

## Primer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| Perú | Rosangel Alexandra Bullon Linares | Saco oliveros |

## Segundo Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | Emmanuel Buenrostro Briseño | CEPAC Jalisco |
| Perú | HECTOR MANUEL TENORIO RODRIGUEZ | Saco Oliveros |
| Perú | Renato Gaitan Garcia | Prolog |

## Tercer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| Perú | PINEDA MIRANDA ALEJANDRO DAVID | I.E.P. CRAMER |
| Perú | VILCANQUI APAZA JHOJHAN KAROL | I.E.P. CRAMER |
| Perú | oscar junior quispe mendoza | Prolog |

## Mención Honorífica

| | | |
|---|---|---|
| Perú | Alejandra Enríquez Aranda | Saco Oliveros |

# Informática, Grandes

## Primer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | Hector Franco Torres Manzano | Escuela Preparatoria No. 5 (U de G) |

## Segundo Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | Juan De Dios Moreno Rivera | COBAEV 20 |
| México | Karen Sosa Jácome | Colegio de Bachilleres del Estado de Veracruz Plantel 20 |

## Tercer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | Francisco Jesús Hernández Hernández | Cobach 28 |
| México | Daniel Ramírez Kühn | ITESM SLP |
| México | Adrián Arturo García López | Escuela Preparatoria No. 5 (U de G) |

## Mención Honorífica

| | | |
|---|---|---|
| México | Cristopher David Hernández Rodríguez | Tecnológico de Monterrey |
| Perú | GOMEZ FLORES XIMENA BEATRIZ | I.E.P. CRAMER |
| México | Uma Salcedo Reyes | Instituto Sanford |
| México | Abed Josué Calderón Romero | CECyTE 02 Xicohtzinco |

# Matemáticas, Cuyo

## Primer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| Perú | Caleb Mateo Ochoa Huamán | SACO OLIVEROS |
| Perú | CHURA CABRERA AARON NICOLAS | I.E.P. CRAMER |
| México | Esmeralda Guadalupe González Octaviano | Primaria Mariano Azuela |

## Segundo Lugar

| | | |
|---|---|---|
| | Sergio Álvaro Espinoza Jiménez | Olimpiada Inicial |
| Perú | HUAYCANI TICONA ADRIAN RODRIGO | I.E.P. CRAMER |
| México | Ximena Cruz García | Aprendo con Alex |
| México | PAULINA MARTÍNEZ BENÍTEZ | INSTITUTO SANFORD |

## Tercer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | ANDRÉ LEONARDO CHÁVEZ RAMOS | INSTITUTO SANFORD |
| | Mathias Sebastian Cahuana Gonzales | Olimpiada Inicial |
| Perú | ANGELES GODOY JOSE MATHEUS | I.E.P. CRAMER |
| México | JUAN PABLO DE LA TORRE LÓPEZ | INSTITUTO SANFORD |

## Mención Honorífica

| | | |
|---|---|---|
| Perú | CESPEDES HANCCO EDWIN ALDAIR | I.E.P. CRAMER |
| Perú | Yeray Romeros | Cramer |
| México | Demian Angelus Patricio Medina González | CEPAC |
| México | Fernanda Ximena Villanueva Infante | Colegio Bilingüe Maria Fernanda |
| México | Ana Paula Ponce Juárez | Saint Augustine School |
| México | Mateo Hernandez Castillo | Colegio Americano de Xalapa |
| Perú | CHARAJA QUISPE JOAQUIN MAX | I.E.P. CRAMER |
| Perú | ZAMBRANO CACERES CAMILA VALENTINA | I.E.P. CRAMER |
| México | Sophia Sandoval Montiel | Colegio Cervantes de Torreón |
| México | Iker Kaleb Hernández Lobato | Colegio Americano de Xalapa |
| México | Diego Yáñez Gatica | Colegio Euro Texcoco |
| México | ISÚA BIGVAÍ OTERO VELAZQUEZ | INSTITUTO ARNAIZ |

# Matemáticas, Koala

## Primer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| Bolivia | FAVIAN ALESSANDRO VARGAS QUISBERT | SAGRADO CORAZON DE JESÚS |
| Perú | Fabrizio Osores Gongora Nicolas | Prolog |
| México | Zariffe Yamel Céspedes Pelayo | Bartolomé de Medina |

## Segundo Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | Andrea María Torres Martínez | Instituto Lomas del Real |
| Perú | Joaquin Alonso Saravia Almeyda | Colegio PROLOG |
| Perú | Erick Alexander Sanchez Ninanya | Prolog |
| Bolivia | Jhustin Alex Flores Rodriguez | Alemán |

## Tercer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | Emmanuel López Terrones | Colegio Cervantes Torreón Campus Vigatá |
| México | MARIA FERNANDA DE LA TORRE LÓPEZ | Instituto Sanford |
| Perú | Samir Ochoa Since | PROLOG |
| Perú | Ángel Manuel Cuya Fierro | Prolog |
| Bolivia | Alan Gabriel Audivert Serrudo | Aprendo con Alex |
| Perú | Delia Faviana Esteban Vilchez | PROLOG |
| México | Derek Elías Ortíz | 23 De Junio |
| México | Pablo Antonio Osuna Jasso | Colegio Cidea |

## Mención Honorífica

| | | |
|---|---|---|
| Perú | LEONEL JOAQUIN MICHAEL GUTIERREZ PUMA | I.E.P TRINOMIO |
| Perú | Luana Raisa Alcántara Orellana | Prolog |
| México | Angélica Montserrat Ortiz Aguilar | Colegio Euro Texcoco |
| México | Paola Arleth Chairez Chavarría | INSTITUTO BRITÁNICO DE TORREÓN |
| México | Rommel Issac Requena López | Urbana No. 35 Ofelia Sánchez Plascencia |
| Perú | ADRIANA MARIA FLORES FLORES | INSTITUCIÒN TRINOMIO DE JULIACA |
| Perú | JHOEL ANDERSON JAROL MAMANI MAMANI | INSTITUCION TRINOMIO DE JULIACA |
| Perú | VALER HANCCO CAMILA BALEZKA | I.E.P. CRAMER |
| Perú | SALCEDO PAQUITA GUSTAVO SEBASTIAN | I.E.P. CRAMER |
| Perú | Ariana Marilyn Trujillo Gallegos | Prolog |
| México | ISAAC AZAEL JUÁREZ MARTÍNEZ | Ignacio M Altamirano |
| México | KEYLANI RENATA RUST ESCAMILLA | Adriaen Hanneman School |
| México | Gabriel Zaragoza Zaldívar | Saint Augustine School |
| México | Gerardo Sánchez Jiménez | Colegio Educativo Potosino |
| México | Andrés Cedillo Vázquez | Colegio Nueva Era Álamo |

# Matemáticas, Walabi

## Primer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| Perú | Camila Celeste Ochoa Huaman | Saco Oliveros |
| Perú | Renato Gaitan Garcia | Prolog |
| Perú | Angélica Luciana Enríquez Aranda | Saco Oliveros |
| Perú | Alejandra Enríquez Aranda | Saco Oliveros |

| | | |
|---|---|---|
| México | Andrea Sarahí Cascante Duarte | Colegio Hamilton Junior High |

## Segundo Lugar

| | | |
|---|---|---|
| Perú | JESÚS MARTIN TASAYCO PACHAS | PROLOG LIMA |
| Perú | CALSIN CHURA FERNANDO RODRIGO | I.E.P. CRAMER |
| Perú | Roy Eduardo Yaranga Almeida | Saco Oliveros |
| Perú | Jorge Luis Camacho Manay | Jorge Basadre de Chiclayo |
| Perú | Rosangel Alexandra Bullon Linares | Saco oliveros |
| México | Rodrigo Saldívar Mauricio | colegio fresnillo |
| Perú | PINEDA MIRANDA ALEJANDRO DAVID | I.E.P. CRAMER |
| México | Luis Israel Pool Cupul | Escuela secundaria particular No.71 SIGLO XXI |
| México | Antonio Gutiérrez Meléndez | Colegio Cervantes de Torreón |
| Perú | CONDORI CATACORA ANNEL DE LA CRUZ | I.E.P. CRAMER |

## Tercer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| Perú | Valeria Fernanda Acosta Peña | PROLOG-Lima |
| Bolivia | Gustavo Santiago Torrico López | Alemán |
| México | Enrique Jackson Ajuria | Madison International School |
| México | Olaf Daniel Magos Hernández | ESCUELITA 101 |
| Bolivia | Lucia Valentina Cuentas Esteban | Saint Andrew's School |
| Perú | ZAMBRANO CACERES ARISA GABRIELA | I.E.P. CRAMER |
| Perú | Alisson Ahilynn Moron Delgado | Colegio Prolog |
| Perú | Jordan Juárez Barreto | Prolog Lima |
| México | Daniel Alonso Marquez Corons | UNDL |
| México | Rodrigo Alonso Benitez Martínez | Instituto Winston Churchill |
| México | Dana Karen Medina González | Colegio Libanés Peninsular |
| México | Alejandra Mireles Barron | Colegio Cervantes de Torreón |
| Perú | Luana Camila Vega Sandoval | Saco Oliveros |
| Perú | MONROY MONTES ANIA MARITA | I.E.P. CRAMER |
| Perú | VILCANQUI APAZA JHOJHAN KAROL | I.E.P. CRAMER |
| México | Yazmin Carmona Gómez | Secundaria Técnica No.1 Xicohtencatl Axayacatzin |

## Mención Honorífica

| | | |
|---|---|---|
| Perú | Adel Zaid Rivas Loayza | Prolog |
| Perú | Ruby Saravia Meza | Prolog Chincha |
| Perú | Angel Matthias Vargas Tarazona | Saco Oliveros |
| Perú | Diana Huacasi | CRAMER |
| Perú | WILSON MAX CHURA CONODORI | INSTITUCIÓN TRINOMIO DE JULIACA |
| México | Mariana Lemarroy Mendoza | Colegio Carol Baur |
| México | Erick Woodhouse Santos | Madison International School |
| México | Camila Muñoz Cortés | Escuela Secundaria Técnica No.1 |
| México | Ángel de la Cruz Martínez Almeida | Primaria 23 de Junio |

| | | |
|---|---|---|
| México | Sebastian Ponce Carmona | Colegio Guadalupe Victoria |
| México | Rafael Argumedo Solís | Instituto Educativo Ammadeus |
| México | Mónica Yatzary Fernández Atonal | Colegio Esperanza |
| México | Nicolas Ponce Carmona | Colegio Guadalupe Victoria |
| México | Isaías Rafael López Terrones | Colegio Cervantes Torreón Campus Vigatá |
| México | Cruz Pérez Eugenia María | Olimpiada Oaxaca |
| Perú | Anthony Smith Suárez Chávez | PROLOG |
| México | Luciano Eraña Vázquez | Instituto Potosino Marista |
| México | Mildred Ximena Lemus Barrientos | Instituto Sanford |
| México | David Martínez Cortes | Benito Juárez |
| México | Jorge Uriel Itzincab Puch | Miguel Barrera Palmero |
| Perú | MONROY ARAGÓN CRISTIAN ABEL | I.E.P. CRAMER |
| México | Juan Carlos Flores Aranda | Olimpiadas Básicas de Matemáticas |

# Matemáticas, Canguro

## Primer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| Perú | Juan Mathius Tasayco Pachas | PROLOG |
| Perú | LUIS FABIAN SANCHEZ ROMERO | IEP PROLOG |
| Perú | Deivis Julian Ccancce Zapana | INSTITUCIÓN TRINOMIO DE JULIACA |
| México | Isaac Montaño Manríquez | Instituto Mar de Cortés |
| México | Daniel Ramírez Kühn | ITESM SLP |

## Segundo Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | Sofia Velázquez Velázquez | Prepa Tec |
| México | Héctor Juan Villarreal Corona | |
| México | José Ángel Reynaga Álvarez | CEPAC Jalisco |
| México | Emmanuel Buenrostro Briseño | CEPAC Jalisco |
| México | Camila Campos Juárez | instituto jean piaget |
| Perú | Manuel Mario Nadir Gilvonio Saez | IE. Prolog |
| México | Emilio Estrada Pérez | Prepa Tec Metepec |

## Tercer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | JUAN PABLO ESPINOSA MARTINEZ | Colegio Idaltu |
| Perú | María Rebeca Antezana De la cruz | SACO OLIVEROS |
| Perú | Flavio Josue Sanjorge Llactas | Saco Oliveros |
| Perú | MUÑUICO ORTIZ DANIEL ENMANUEL | I.E.P. CRAMER |
| México | Edgar Alejandro Ayala Solís | Secundaria No 3 Moisés Sáenz Garza |
| Perú | Gabriel Andre Ibañez Venegas | Cramer |
| Perú | Paolo Vinchensso Mamani Apaza | I.E.P. CRAMER |
| Bolivia | Carlos Fabian Maldonado Mariño | Saint Andrew's School |
| México | Uma Salcedo Reyes | Instituto Sanford |

| | | |
|---|---|---|
| Perú | jheremy cardenas rodas | prolog |
| México | Sergio Barragán Arroyo | Olimpiada Oaxaca |
| México | Angela Maria Flores Ruiz | jesusita neda |

## Mención Honorífica

| | | |
|---|---|---|
| México | Trinidad Alfredo Segovia López | San Roberto International School |
| Perú | Dessyret Juleysi Razabal Ramos | Saco Oliveros |
| México | Bastian Alejandro López Vásquez | Olimpiada Oaxaca |
| México | Logan Guerrero Díaz | CBTis No. 168 Francisco I. Madero |
| México | Luis Lavariega Meneses | Olimpiada Oaxaca |
| México | Samuel Bustamante | Instituto Británico de Torreón |
| México | DIEGO HERNANDEZ PEREZ | Instituto Tepatitlán |
| Perú | oscar junior quispe mendoza | Prolog |
| México | Axel Fernandez Soto | Instituto Jean Piaget del Rio |
| México | Marco Antonio Fernández Atonal | Colegio Esperanza |
| México | Ruth Esmeralda Utrilla Verá | Secundaria 44 |
| México | Galileo Lopez Loreto | CEPAC Jalisco |
| Perú | Gianella Alejandra Cruz Lozano | Prolog |
| México | GAUDEN RONALDO VILLASEÑOR RODRIGUEZ | Secundaria general 55 Prisciliano Sánchez |
| México | César Daniel González Bernal | Instituto Mar de Cortes |
| México | Alejandra Ayme Anzures Castillo | Colegio Cervantes de Torreón Campus Bosque |
| Perú | Juan Cardenas | PROLOG |
| México | Brianet Mireya Pajarito Guzmán | Centro de Enseñanza Técnica Industrial |

# Matemáticas, Uombat

## Primer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | José Luis Sánchez Jiménez | COBACH 01 |
| México | Joaquin Vite Navarro | Escuela Preparatoria Número Uno |
| México | Diana Laura Garza De la Riva | Colegio Cervantes campus Vigata |

## Segundo Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | Andrés Emiliano De la Garza Rosales | Liceo Freinet |
| México | Nina Alejandra Poot Esteban | Colegio de Bachilleres Plantel Bacalar Serapio Flota Maas |
| México | Adrián Arturo García López | Escuela Preparatoria No. 5 (U de G) |
| México | Saúl Villalobos | Instituto San Felipe |
| México | Hector Franco Torres Manzano | Escuela Preparatoria No. 5 (U de G) |

## Tercer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | Cristopher David Hernández Rodríguez | Tecnológico de Monterrey |

| | | |
|---|---|---|
| México | Aldo Barragán Aguilera | Escuela Preparatoria No. 15 |
| México | Abed Josué Calderón Romero | CECyTE 02 Xicohtzinco |
| México | Natalia Montserrat Cruz Pérez | Olimpiadas Oaxaca |
| México | Maria Fernanda Montoya Lopez | Colegio Enrique Arreguín |
| Perú | Venus Carmín Lévano Fernández | PROLOG |
| México | Juan Jose de Jesus Hernández Beltrán | Preparatoria 9 UANL |
| México | Alexis Alberto Victoria García | Olimpiada Oaxaca / CBTis 123 |

## Mención Honorífica

| | | |
|---|---|---|
| México | Arantza Torres Báez | CBTis 03 |
| México | Josué Tapia Hernández | Escuela de la Ciudad de Aguascalientes |
| México | Aaron Mireles Barrón | Colegio Cervantes de Torreon |
| México | Pamela Janeth Martin del Campo Hernández | INSTITUTO BRITÁNICO DE TORREÓN |
| México | Sarah Martínez García | Motolinía |
| México | Emilio Emanuel Arellano Machuca | Escuela Preparatoria No. 5 (U de G) |
| Perú | Dylan Bailon Minaya | Prolog |
| México | Dario Alberto Armas Martinez | Colegio de bachilleres del estado de queretaro Plantel 9 |
| Perú | Josué Rodrigo Arcana Miranda | INSTITUCIÓN TRINOMIO DE JULIACA |
| Estados Unidos | Caio Mateo Batista | Watkinson highschool |
| México | Melissa Isabel González Ordaz | Olimpiada Oaxaca |

# Divulgación, Peques

## Primer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | Angélica Montserrat Ortiz Aguilars | Colegio Euro Texcoco, .Aves y xq amarlas" |

## Segundo Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | Naomi Ramírez Sevillas | Saint Augustine School, "La fuente de Erón" |
| México | Italia Deleyza Aguilars | Colegio Real del Fraile, "Litros de litros" |

## Tercer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | Isaac Flores Tepatzis | Saint Augustine School, .El número de Dios" |
| México | Nicole Ramírez Sevillas | Saint Augustine School, .El submarino" |

# Divulgación, Medianos

## Primer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | Ingrid Reynoso Gutiérrezs | Secundaria Cedros, .El Átomo" |

## Segundo Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | Yessy Sophia Vidal Rosaldos | Técnica 9, "¿Cuánto pesas?" |
| México | Mía Ycied de la Cruz Barrientoss | Instituto Unitam, "La aurora boreal" |

## Tercer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | Dana Karen Medina Gonzálezs | Colegio Libanés Peninsular, "No le gustan. . . " |
| México | Julián Peza Hernándezs | Secundaria del Valle, "Propiedades de la Materia" |
| México | Andrés Caleb Cardiel Garcías | Moisés Saénz, .Energia Potencial" |

# Divulgación, Grandes

## Primer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | Carlos Arturo Quintana Románs | Instituto Unitam, "Los agujeros blancos" |

## Segundo Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | Atziri Elizabeth Becerra Zavalas | Preparatoria del Valle, "Las proteínas" |
| México | Camila González Lujáns | Cobach Chihuahua 5, .Amamos asustarnos" |
| México | Adela Martínez Galváns | Cobach 28, "Viajes en el tiempo" |

## Tercer Lugar

| | | |
|---|---|---|
| México | Andrea Betzabe Pozos Vargass | Instituto Unitam, .Agua la boca" |
| México | César Aréchigas | Preparatoria del Valle, .El pH" |
| México | Sarah Martínez Garcías | Motolinía, .Efecto Doppler" |

## Mención Honorífica

| | | |
|---|---|---|
| México | Paula Catalina Fuentes Gonzálezs | Escuela Preparatoria 15, "Barney te enseña" |
| México | Lennon Kal-El Palacios Garcías | Preparatoria del Valle, .Energía Nuclear" |
| México | Enya Marlene Flores Álvarezs | Escuela Preparatoria 15, "Velocidad de la luz" |
| México | Natalí Rubí Aguilar Barrientoss | Escuela Preparatoria 15, "Zombies" |
| México | Natalia Gissel Lomeli Alegrias | Preparatoria del Valle, "Ácidos Nucleicos" |
| México | Luz Padrón Aguirres | Preparatoria del Valle, "pH" |

# Enunciados de los Problemas

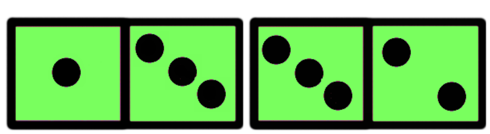
El Concurso de Matemáticas se realizó por primera vez en dos etapas, en las cinco categorías usuales para nuestros concursos: Cuyo, Koala, Walabi, Canguro y Uombat. Estos son los grados a los que corresponde cada categoría:

- Cuyo: 3ro y 4to de Primaria
- Koala: 5to y 6to de Primaria
- Walabi: 1ro y 2do de Secundaria
- Canguro: 3ro de Secundaria y 1ro de Preparatoria
- Uombat: 2do y 3ro de Preparatoria

Cada examen consiste de 15 problemas para resolver en 2 horas (primera etapa) o 3 horas (segunda etapa). En la primera etapa, los exámenes de Cuyo y Koala son completamente de opción múltiple, mientras que las demás categorías son completamente de respuesta cerrada; en ambos casos, se califican únicamente como correcto o incorrecto. En la segunda etapa, los exámenes de Cuyo y Koala son completamente de respuesta cerrada; mientras que las demás categorías se dividen en dos partes: las primeras 12 de respuesta cerrada y las últimas 3 de respuesta abierta. Una vez más, las preguntas de respuesta cerrada se califican únicamente como correcto o incorrecto, mientras que las preguntas de respuesta abierta tienen puntos parciales.

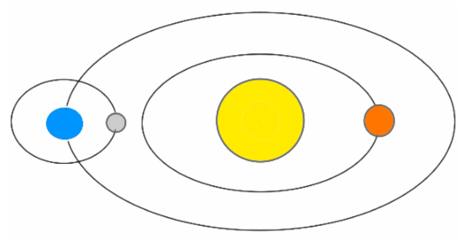
## Cuyo, primera etapa

**Problema 1.** En la figura se muestra dos fichas de dominó unidas. Se pueden unir pues comparten el tres. Cada ficha de dominó tiene dos números representados con puntos. Y cada número va de cero a seis. Dos fichas de dominó se pueden unir si comparten uno de sus números, y se unen por sus lados iguales.
Ceci puso los dominós de la figura y piensa que pueden representar el número 1332. ¿Cuál de los siguientes números **no** se puede representar al unir dos fichas de dominó?



(a) 1226 (b) 4005 (c) 1660 (d) 7226 (e) 4113

**Problema 2.** La siguiente figura muestra a La Tierra (azul), Mercurio (anaranjado), y sus órbitas al rededor del Sol. También aparece La Luna y su órbita al rededor de La Tierra. Tanto Mercurio, La Tierra y la Luna pueden estar en cualquier punto de su órbita. En este momento, La Luna se encuentra entre La Tierra y Mercurio. ¿Cuál de los siguientes hechos **no** puede suceder?



(a) La Luna entre El Sol y La Tierra.
(b) Mercurio entre La Tierra y La Luna.
(c) El Sol entre Mercurio y La Tierra.
(d) La Tierra entre La Luna y Mercurio.
(e) El Sol entre Mercurio y La Luna.

**Problema 3.** La tienda *Comunidad* vende cinco objetos, que se pueden pagar a crédito (pagos semanales más pequeños) o de contado (pagar todo de una vez). Esta es la mercancía y las opciones de pago:

(a) **Gorra.** 200 pesos a contado. A crédito, 10 pagos semanales de 25 pesos.

(b) **Mesa de Tenis.** 2500 pesos a contado. A crédito, 20 pagos semanales de 130 pesos.

(c) **Almohada.** 175 pesos a contado. A crédito, 15 pagos semanales de 12 pesos.

(d) **Taza.** 100 pesos a contado. A crédito, 12 pagos semanales de 10 pesos.

(e) **Pizarrón.** 300 pesos a contado. A crédito, 17 pagos semanales de 25 pesos.

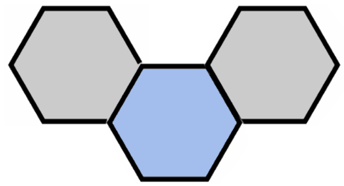
¿Qué opción tiene el artículo que más aumenta su precio en pesos, cuando se paga a crédito?

**Problema 4.** En la radio del pueblo cada estación tiene designada un número de la forma: 85.6, es decir, un número entero seguido de un decimal. Las primeras estaciones tienen los siguientes números:

50.4 50.9 51.3 51.8 52.4 52.9 53.3 53.8

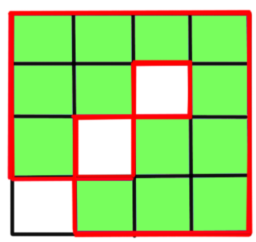
Y así sucesivamente. ¿Cuál de las siguientes opciones **no** es una estación de la radio del pueblo?
(a) 72.9 (b) 87.8 (c) 104.8 (d) 97.8 (e) 53.8

**Problema 5.** En una fiesta hay muchas mesas hexagonales. Para estar más cerca, los invitados deciden juntar las mesas como muestra la figura, uniéndolo los hexágonos por uno de sus lados. Cada uno se sienta en alguno de los lados libres de la mesa. En el siguiente ejemplo, se han pegado tres mesas y se pueden sentar 14 personas. ¿Cuál es el máximo número de personas que se pueden sentar si se unen 10 mesas?



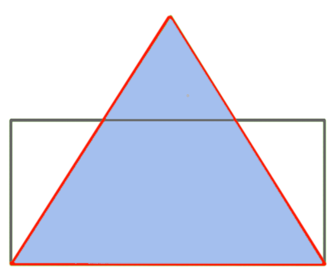
(a) 32 (b) 36 (c) 40 (d) 42 (e) 45

**Problema 6.** En la siguiente figura, cada cuadradito mide 1 *cm* por lado. ¿Cuál es la longitud del contorno rojo, que corresponde al perímetro de la figura en *verde*?



(a) 20 cm (b) 22 cm (c) 24 cm (d) 26 cm (e) 28 cm

**Problema 7.** Se tiene un rectángulo de lados 3 y 1 cm cada uno. ¿De cuántas maneras distintas se puede construir un triángulo equilátero que tenga por lado un lado completo del rectángulo, ya sea hacia afuera o hacia dentro? Te mostramos un ejemplo.



(a) 6 (b) 8 (c) 10 (d) 12 (e) 14

**Problema 8.** Choco pensó en un número. Luego le sumó 4 y al resultado lo multiplicó por 3. Obtuvo 21. Chiqui hizo lo mismo, pero obtuvo el doble que Choco. ¿Qué número pensó Chiqui?

(a) 8 (b) 10 (c) 12 (d) 14 (e) 16

**Problema 9.** La suma de tres números es 100. Ceci resta un número secreto a cada uno de estos tres números, la misma cantidad a los tres, y obtiene como resultado: 17, 38 y 33. ¿Cuál de los siguientes es uno de los tres números originales?

(a) 20 (b) 42 (c) 38 (d) 41 (e) 49

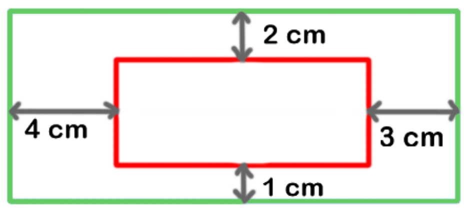
**Problema 10.** Yareli organizó una gran fiesta de cumpleaños. Encargó suficientes taquitos como para que cada persona comiera exactamente 5. Sin embargo, como es tan popular llegaron 20 personas más, y a cada persona le tocaron exactamente 4 taquitos. ¿Cuántas personas asistieron en total?

(a) 40 (b) 75 (c) 100 (d) 120 (e) 125

**Problema 11.** Ámber y Tikis juegan carreras. Se dieron cuenta que de cada 5 carreras seguidas, Tikis siempre ganaba 3. Si las primeras cuatro carreras las ganaron Tikis, Tikis, Ámber, Tikis, ¿cuántas de las primeras quince carreras ganó Tikis ?

(a) 5 (b) 7 (c) 9 (d) 10 (e) 12

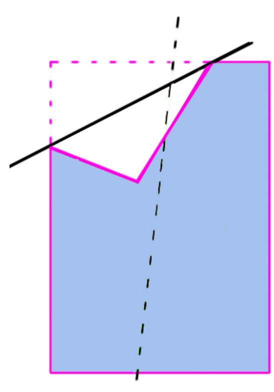
**Problema 12.** En la siguiente figura hay dos rectángulos y algunas medidas. ¿Cuánto más grande es el perímetro del rectángulo verde, con respecto al perímetro del rectángulo rojo?




(a) 10 cm (b) 20 cm (c) 21 cm (d) 22 cm (e) 25 cm

**Problema 13.** En la figura se muestra una hoja rectangular, la cual tiene cuatro lados y una de sus caras pintada de azul. Se le ha hecho un doblez por la línea negra más corta. A continuación se le hace un corte a la hoja doblada por la línea negra punteada más larga. Esto nos deja dos pedazos de hoja separados. El pedazo de hoja de la derecha, se desdobla. ¿Cuántos lados tendrá?

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 8



**Problema 14.** A Miguel solo le gustan los números que resultan de sumar tres números consecutivos. Por ejemplo, $2+3+4=9$ y $6+7+8=21$, son números que le gustan a Miguel. A Tadeo solo le gustan los números que resultan de sumar cuatro números consecutivos. Por ejemplo, $2+3+4+5=14$ es un número que le gusta a Tadeo. ¿Cuál de los siguientes es un número que le gusta a ambos?

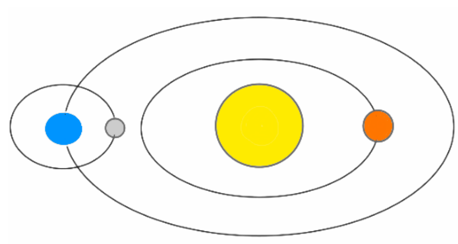
(a) 6 (b) 10 (c) 12 (d) 18 (e) 24

**Problema 15.** Yareli escribe todos los días la fecha en su libreta, pero ha estado tan distraída que ha escrito 2020 en lugar de 2021 en todas las fechas desde el 1 de enero hasta el 23 de septiembre, pero el día y el mes lo escribió correcto. Le toma 3 segundos corregir cada fecha, ¿cuántos segundos le tomará corregir toda su libreta?

(a) 690 s (b) 798 s (c) 810 s (d) 900 s (e) 990 s

# Koala, primera etapa

**Problema 1.** La siguiente figura muestra a La Tierra (azul), Mercurio (anaranjado), y sus órbitas al rededor del Sol. También aparece La Luna y su órbita al rededor de La Tierra. Tanto Mercurio, La Tierra y la Luna pueden estar en cualquier punto de su órbita. En este momento, La Luna se encuentra entre La Tierra y Mercurio. ¿Cuál de los siguientes hechos **no** puede suceder?



(a) La Luna entre El Sol y La Tierra.
(b) Mercurio entre La Tierra y La Luna.
(c) El Sol entre Mercurio y La Tierra.
(d) La Tierra entre La Luna y Mercurio.
(e) El Sol entre Mercurio y La Luna.

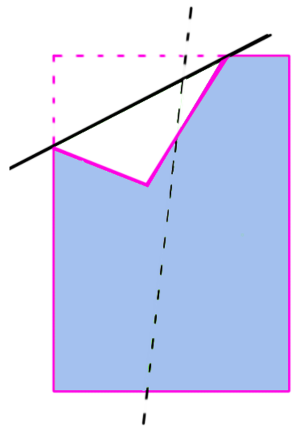
**Problema 2.** Ámber y Tikis juegan carreras. Se dieron cuenta que de cada 5 carreras seguidas, Tikis siempre ganaba 3. Si las primeras cuatro carreras las ganaron Tikis, Tikis, Ámber, Tikis, ¿cuántas, de las primeras quince carreras, ganó Tikis ?

(a) 5 (b) 7 (c) 9 (d) 10 (e) 12

**Problema 3.** Yareli organizó una gran fiesta de cumpleaños. Encargó suficientes taquitos como para que cada persona comiera exactamente 5. Sin embargo, como es tan popular llegaron 20 personas más, y a cada persona le tocaron exactamente 4 taquitos. ¿Cuántas personas asistieron en total?

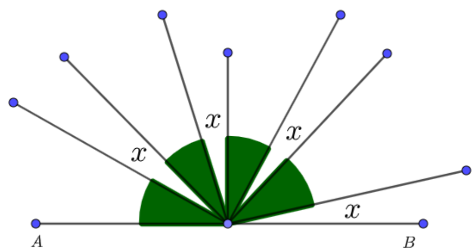
(a) 40 (b) 75 (c) 100 (d) 120 (e) 125

**Problema 4.** En la figura se muestra una hoja rectangular, la cual tiene cuatro lados y una de sus caras pintada de azul. Se le ha hecho un doblez por la línea negra más corta. A continuación se le hace un corte a la hoja doblada por la línea negra punteada más larga. Esto nos deja dos pedazos de hoja separados. El pedazo de hoja de la derecha, se desdobla. ¿Cuántos lados tendrá?



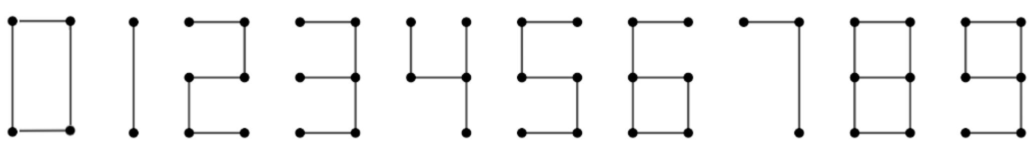
(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 8

**Problema 5.** En la figura se muestra la recta $AB$ y 8 ángulos. Los cuatro sombreados (en verde) miden $25°$. Los cuatro restantes en el diagrama son todos iguales a $x°$. ¿Cuál es el valor de $x°$?




(a) 20 (b) 25 (c) 30 (d) 45 (e) 50

**Problema 6.** Tikis revisó la hora en su celular. Un segundo después, volvió a revisar la hora, pero no se dio cuenta que agarró el celular al revés. Sin embargo, vio la misma hora (sin considerar los dos puntos). Si eran entre las 6 : 30 y las 7 : 00, ¿qué hora era cuando Tikis revisó su reloj? **Nota:** Así se ven los números en el reloj de Tikis:



(a) 6:19 (b) 6:15 (c) 6:52 (d) 6:39 (e) 6:59

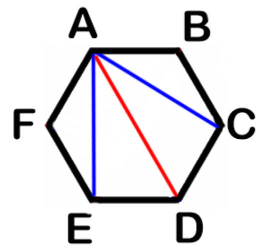
**Problema 7.** Un tablero cuadrado se cubre con azulejos cuadrados iguales más pequeños. Se usan un total de 25 azulejos para formar las dos diagonales. ¿Cuántos azulejos se usan para llenar el tablero completo?

(a) 25 (b) 100 (c) 121 (d) 144 (e) 169

**Problema 8.** La suma de tres números es 100. Ceci resta un número secreto a cada uno de estos tres números, la misma cantidad a los tres, y obtiene como resultado: 17, 38 y 33. ¿Cuál de los siguientes es uno de los tres números originales?

(a) 20 (b) 42 (c) 38 (d) 41 (e) 49

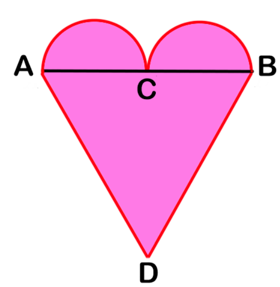
**Problema 9.** Carmalandia tiene seis reinos cuyas capitales forman un hexágono regular. No se permiten los vuelos directos entre capitales que se encuentran consecutivas en el hexágono, pero se pueden tomar vuelos cortos (del tipo azul) y vuelos largos (del tipo rojo) para viajar directo al resto de reinos. Por ejemplo, desde la capital A, no se puede viajar directamente a F, pero sí se puede tomar un vuelo largo hacia D y luego un vuelo corto de D a F. Yareli quiere hacer un tour por Carmalandia, y diseña un recorrido para visitar todas las ciudades una vez. Si en cualquier aerolínea, un vuelo corto cuesta 5 carmapesos, y un vuelo largo cuesta 7 carmapesos, ¿cuál es el mínimo costo en carmapesos que puede pagar Yareli por su viaje? **Nota:** No es necesario que Yareli regrese al punto de partida.




(a) 15 (b) 21 (c) 22 (d) 27 (e) 30

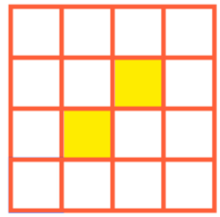
**Problema 10.** En el fútbol americano hay varias maneras de anotar puntos. En cierta liga, solo se permiten goles de campo, que valen 3 puntos, y touchdowns, que valen 7 puntos. ¿Cuál es el mayor marcador imposible (en cantidad de puntos anotados) para ambos jugadores, de un partido que no termina en empate? Por ejemplo, con estas reglas, es imposible un marcador de 2 a 1. **Nota:** Si es posible obtener el puntaje de uno de los jugadores, no se considera que el marcador es imposible.
(a) 7-10 (b) 13-17 (c) 6-8 (d) 11-5 (e) 8-11

**Problema 11.** Daniela dibujó un corazón con su juego geométrico. Inició marcando la línea $AB$ de 2 cm de largo. Luego marcó el punto medio $C$ y pintó dos medios círculos de diámetros $AC$ y $CB$. Al final dibujó el triángulo equilátero $ABD$. ¿Cuál es el perímetro de la figura? Aproxima a dos decimales.
**Nota.** El perímetro de un círculo de diámetro $T$ es aproximadamente $3.14 \times T$.




(a) 7.14 cm (b) 6.14 cm (c) 6.28 cm (d) 7.28 cm (e) 10.14 cm

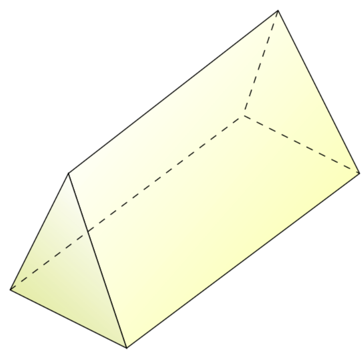
**Problema 12.** En el siguiente cuadrado de $4 \times 4$ queremos colocar una pieza de dominó que ocupa un rectángulo de $2 \times 1$ o de $1 \times 2$. ¿De cuántas maneras podemos hacer esto, si no queremos que la ficha de dominó caiga en un cuadradito amarillo?
(a) 13 (b) 14 (c) 15 (d) 16 (e) 17



**Problema 13.** Valentina lanza un dado de seis caras, dos veces y con el orden en el que obtuvo sus resultados forma un número de dos dígitos. Por ejemplo si le salió 4 y luego 6, obtiene el número 46. ¿Cuántos múltiplos de tres, de dos dígitos, puede obtener Valentina?

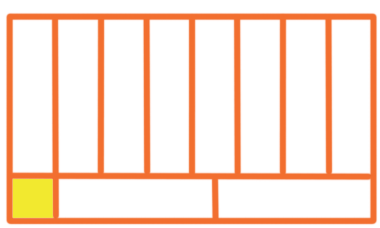
(a) 4 (b) 8 (c) 10 (d) 12 (e) 14

**Problema 14.** En la figura se muestra un prisma triangular que tiene 5 caras. Con un solo corte recto, se divide el prisma en dos pedazos y se cuentan nuevamente el total de caras entre las dos figuras. ¿Cuál es el menor número de caras que se puede obtener al hacer esto?



(a) 6 (b) 8 (c) 9 (d) 10 (e) 12

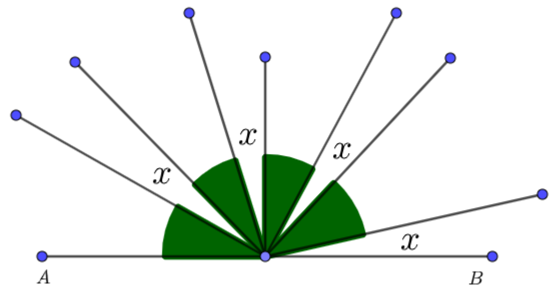
**Problema 15.** La puerta de la casa de Arantza tiene este diseño, donde los barrotes verticales son paralelos y están a la misma distancia. Todos los rectángulos de la figura son iguales.



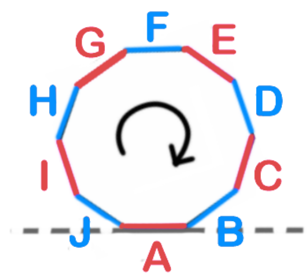
Si toda la puerta tiene un área de 5184 cm$^2$, ¿cuál es el perímetro del cuadrado amarillo? (a) 40 (b) 48 (c) 60 (d) 100 (e) 144

## Walabi, primera etapa

**Problema 1.** En la figura se muestra la recta $AB$ y 8 ángulos. Los cuatro sombreados (en verde) miden 25°. Los cuatro restantes en el diagrama son todos iguales a $x°$. ¿Cuál es el valor de $x°$?




**Problema 2.** Luis tiene un sacapuntas bicolor de 10 lados. Lo pone sobre uno de su lado rosado $A$, y lo hace rodar hacia la derecha, como se ilustra en la figura. En el siguiente movimiento, el sacapuntas estará sobre el lado $B$. ¿Qué etiqueta tiene el lado sobre el que caerá después de 1007 movimientos?




**Problema 3.** Un tablero cuadrado se cubre con azulejos cuadrados iguales más pequeños. Se usan un total de 25 azulejos para formar las dos diagonales. ¿Cuántos azulejos se usan en el tablero en total?

**Problema 4.** En el siguiente acertijo el número $x$ es mayor que cero:

$$\text{El } x\,\% \text{ de } x^2 \text{ es } x.$$

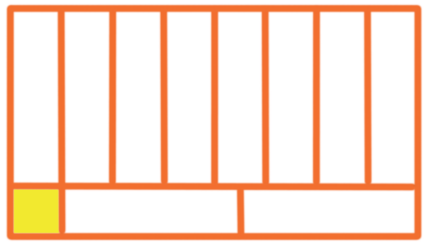
¿Cuál es el valor de $x$?

**Problema 5.** Valentina lanza un dado de seis caras dos veces, y con el orden en el que obtuvo sus resultados hace un número de dos dígitos. Por ejemplo, si le salió 4 y luego 6, forma el número 46. ¿Cuántos múltiplos de tres, de dos dígitos, puede obtener Valentina?

**Problema 6.** Un código de barras se forma con barras iguales de área 1 $cm^2$, que pueden ser negras o blancas. Podemos encontrar una, dos o hasta tres barras negras juntas e inmediatamente después dos barras blancas. El lector de código de barras sólo lee las franjas formadas por barras negras. En este ejemplo, el código tiene 5 franjas negras y 4 franjas blancas y área 16.

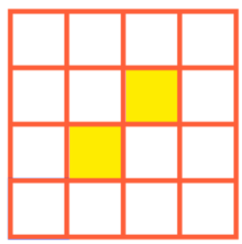
En un cierto código de barras, el área negra es igual al área blanca y su área total es de 36 $cm^2$. ¿Cuántas franjas en blanco tiene?

**Problema 7.** La puerta de la casa de Arantza tiene este diseño, donde los barrotes verticales son paralelos y están a la misma distancia. Todos los rectángulos de la figura son iguales.

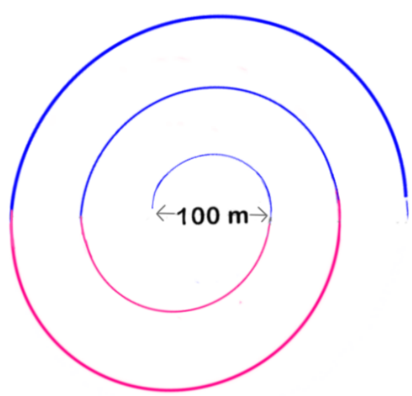


Si toda la puerta tiene un área de 5184 $cm^2$, ¿cuál es el perímetro del cuadrado amarillo?

**Problema 8.** En el siguiente cuadrado de $4 \times 4$ queremos colocar una pieza de dominó que ocupa un rectángulo de $2 \times 1$ o de $1 \times 2$. ¿De cuántas maneras podemos hacer esto, si no queremos que la ficha de dominó caiga en un cuadradito amarillo?



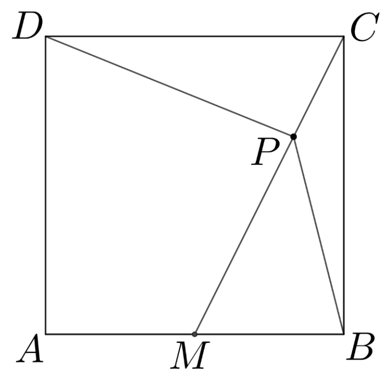
**Problema 9.** Daniela inicia a correr en el centro de una pista en forma de espiral, formada por medias circunferencias. El diámetro de la primera semi circunferencia es 100 $m$ y el diámetro de cada semicircunferencia siguiente aumenta en 100 $m$. Desde el centro de la pista, Yareli veía a Daniela correr a su alrededor y se mareó después de girar 900 grados. ¿Qué distancia había recorrido Daniela para este momento? Usa el valor de $\pi = 3{,}14$. Escribe tu respuesta sin decimales, redondeando hacia abajo.




**Problema 10.** ¿Cuántos números del 10 al 99, quitando los que acaben en cero, son tales que el primer dígito divide al cuadrado del segundo?

**Problema 11.** Yareli quería multiplicar dos números primos de dos dígitos, pero anda tan distraída que escribió los dígitos al revés, en ambos números. El resultado que obtuvo fue 2516. ¿Cuál es el resultado que quería obtener?

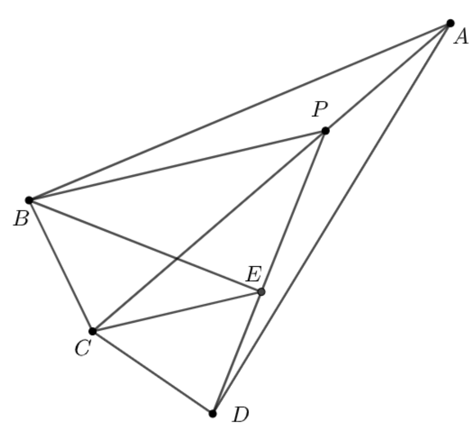
**Problema 12.** Sea $ABCD$ un cuadrado y sea $M$ el punto medio del lado $AB$. Un punto $P$ en el segmento $CM$ es tal que las área de los triángulos $\triangle MBP$ y $\triangle DPC$ son iguales. Calcula $\frac{MC}{PC}$.




**Problema 13.** Paty repartió 1200 ml de agua de jamaica en dos vasos y le dio uno a su hermana. Ceci está molesta porque dice que su vaso tiempo muy poquito. Para arreglarlo, su mamá vació un tercio del vaso de Paty en el vaso de Ceci, y luego vació un tercio del vaso de Ceci en el vaso de Paty. Ahora ellas tienen la misma cantidad. ¿Cúantos mililitros menos que Ceci tenía Paty al inicio?

**Problema 14.** Yareli pensó en dos números enteros $p$ y $q$. Con ellos formó la fracción $\frac{p}{q}$, y vio que su valor estaba entre $\frac{4}{5}$ y $\frac{5}{6}$. Si $q$ es lo más pequeño posible ¿cuánto vale $p$?

**Problema 15.** Sea $ABCD$ un cuadrilátero (AC es diagonal) $AB = AD$ y $CB = CD$. Se toma un punto $P$ en el segmento $AC$ y un punto $E$ en el segmento $DP$ de tal manera que $CE$ y $BP$ son paralelas. Si $BP = 250$ cm y $CE = 177$ cm. ¿Cuál es la medida del segmento $DE$, en cm?



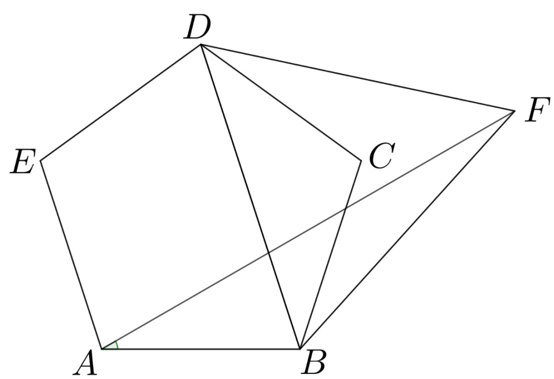
# Canguro, primera etapa

**Problema 1.** ¿Cuál es el mayor primo que divide al resultado de la siguiente operación?

$$2^{10} + 2^{11} + \cdots + 2^{20}$$

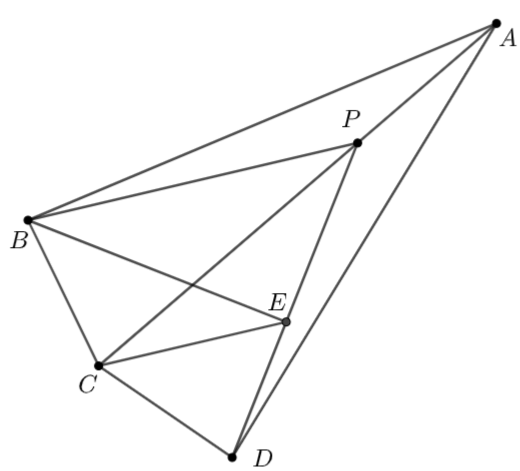
**Problema 2.** Paty repartió 1200 ml de agua de jamaica en dos vasos y le dio uno a su hermana. Ceci está molesta porque dice que su vaso tiempo muy poquito. Para arreglarlo, su mamá vació un tercio del vaso de Paty en el vaso de Ceci, y luego vació un tercio del vaso de Ceci en el vaso de Paty. Ahora ellas tienen la misma cantidad. ¿Cúantos mililitros menos que Ceci tenía Paty al inicio?

**Problema 3.** Sea $ABCDE$ un pentágono regular. Con el segmento $BD$ se traza un triángulo equilátero $DBF$ de forma que $C$ queda contenido dentro de él. ¿Cuál es la medida de $\angle FAB$?




**Problema 4.** Luis y Mane midieron sus sombras a las tres de la tarde. La sombra de Luis midió 4.15 $m$, mientras que la sombra de Mane midió 5.11 $m$. Sabiendo que Mane mide 6 $cm$ más que Luis, quieren calcular la sombra de Jacsan, quién mide 10 $cm$ menos que Luis. ¿Cuánto mide la sombra de Jacsan, en centímetros?

**Problema 5.** Sea $ABCD$ un cuadrilátero (AC es diagonal) con $AB = AD$ y $CB = CD$. Se toma un punto $P$ en el segmento $AC$ y un punto $E$ en el segmento $DP$ de tal manera que $CE$ y $BP$ son paralelas. Si $BP = 250$ cm y $CE = CE = 177$ cm. ¿Cuál es la medida del segmento $DE$, en cm?

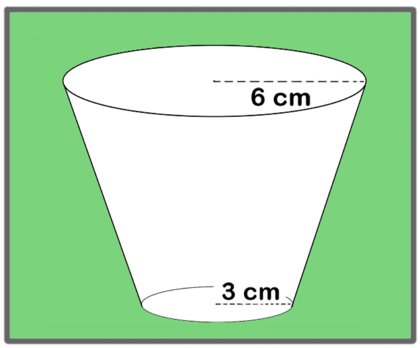


**Problema 6.** Un número cuadrilibre es aquel que no es divisible por el cuadrado de ningún primo. ¿Cuántos números del 1 al 100 son cuadrilibres pero no son primos?
**Nota:** No consideres al 1 en tu lista.

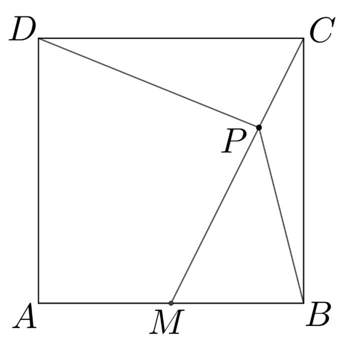
**Problema 7.** Sea $n$ un entero positivo. Se sabe que en cualquier conjunto de $n$ enteros, hay dos de ellos cuya resta es un múltiplo de 11, o hay algunos de ellos cuya suma es un múltiplo de 11. ¿Cuál es el menor valor de $n$ que cumple esto?

**Problema 8.** Nájera va a llenar una quiniela de la NFL, que consiste de 6 partidos donde puede elegir si gana el local o gana el visitante (sin empates). Cierta semana, Nájera llenó todas las combinaciones posibles. ¿Cuántos aciertos obtuvo en promedio?

**Problema 9.** La fórmula del volumen de un cono es $\dfrac{\pi r^2 h}{3}$, donde $r$ es el radio de la base y $h$ la altura. La figura muestra un vaso que cuando está lleno tiene un volumen de $150\pi$ cm$^3$. La base tiene radio de 3 $cm$ y el radio de borde es de 6 $cm$. Si el vaso se llena de agua hasta la mitad de la altura, ¿cuál es el volumen de agua,, en cm$^3$? Utiliza $\pi = 3{,}14$ y da tu respuesta como un número entero, redondeado hacia abajo.




**Problema 10.** Sea $ABCD$ un cuadrado y sea $M$ el punto medio del lado $AB$. Un punto $P$ en el segmento $CM$ es tal que las área de los triángulos $\triangle MBP$ y $\triangle DPC$ son iguales. Calcula $\frac{MC}{PC}$.

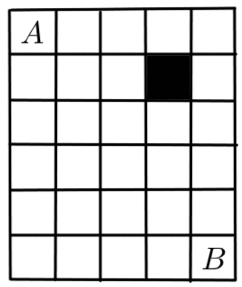



**Problema 11.** Yareli pensó en dos números enteros $p$ y $q$. Con ellos formó la fracción $\frac{p}{q}$, y vio que su valor estaba entre $\frac{4}{5}$ y $\frac{5}{6}$. Si $q$ es lo más pequeño posible ¿cuánto vale $p$?

**Problema 12.** ¿Cuántos números del 10 al 99, quitando los que acaben en cero, son tales que el primer dígito divide al cuadrado del segundo?

**Problema 13.** Chiqui separó su huerto en tres parcelas para sembrar maíz, zanahoria y lechuga. Desde que las planta hasta que cosecha, el maíz tarda 13 semanas, la zanahoria 8 semanas y las lechugas 3 semanas. Entre cosecha y siembra deja la tierra descansar 2 semanas. La primera semana del año sembró sus tres cultivos. ¿Cuántas semanas del año no tenía nada que cosechar? Considera 52 semanas en el año.

**Problema 14.** Una moneda se encuentra en la casilla $A$ y va a recorrer el siguiente tablero hasta la casilla $B$, con la condición de que solo puede moverse una casilla hacia abajo o una casilla a la derecha de la actual. ¿En cuántos recorridos, la moneda visita la casilla negra en algún momento?




**Problema 15.** ¿Cuántos enteros positivos $n$ menores que 1000 son tales que $n^2 + n$ y $4^n$ tienen el mismo dígito de las unidades?

# Uombat, primera etapa

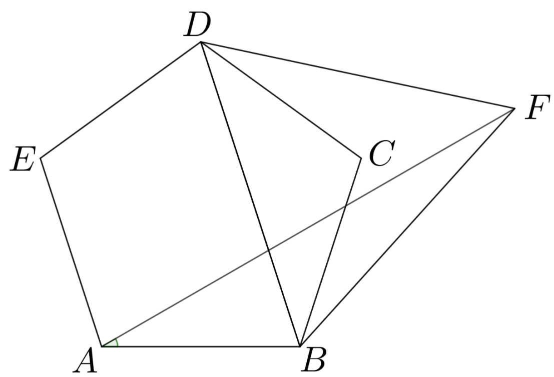
**Problema 1.** Yareli tiene un jardín de cuadrado de $4 \times 4$ metros dividido en 16 regiones de $1 \times 1$; cada árbol ocupa una de estas regiones. Quiere plantar 3 árboles de limones, 3 árboles de limas y 1 árbol especial que da limones y limas. Los quiere sembrar de manera que los árboles del mismo fruto queden alineados. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?

**Problema 2.** ¿Cuál es el mayor divisor primo que divide al resultado de la siguiente operación?

$$2^{10} + 2^{11} + \cdots + 2^{20}$$

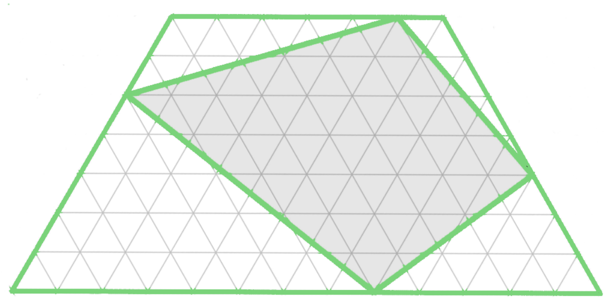
**Problema 3.** ¿Cuántas parejas de números enteros positivos son tales que uno de ellos es de dos dígitos (mayor o igual que 10 y menor o igual que 100) y la mitad de su suma es 100?

**Problema 4.** Sea $ABCDE$ un pentágono regular. Con el segmento $BD$ se traza un triángulo equilátero $DBF$ de forma que $C$ queda contenido dentro de él. ¿Cuál es la medida de $\angle FAB$?

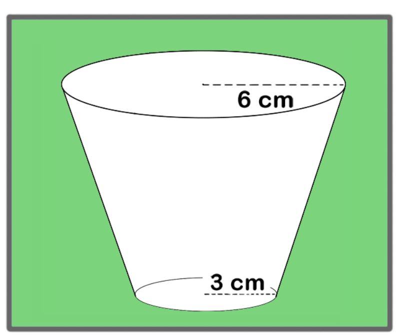



**Problema 5.** Luis y Mane midieron sus sombras a las tres de la tarde. La sombra de Luis midió 4.15 $m$, mientras que la sombra de Mane midió 5.11 $m$. Sabiendo que Mane mide 6 $cm$ más que Luis, quieren calcular la sombra de Jacsan, quién mide 10 $cm$ menos que Luis. ¿Cuánto mide la sombra de Jacsan, en centímetros?

**Problema 6.** La siguiente figura muestra un cuadrilátero dentro de un trapecio. Si cada triángulo equilátero tiene área 1, ¿cuál es el área del cuadrilátero sombreado?



**Problema 7.** La fórmula del volumen de un cono es $\dfrac{\pi r^2 h}{3}$, donde $r$ es el radio de la base y $h$ la altura. La figura muestra un vaso que cuando está lleno tiene un volumen de $150\pi$ $cm^3$. La base tiene radio de 3 $cm$ y el radio de borde es de 6 $cm$. Si el vaso se llena de agua hasta la mitad de la altura, ¿cuál es el volumen de agua,, en cm$^3$? Utiliza $\pi = 3{,}14$ y da tu respuesta como un número entero, redondeado hacia abajo.




**Problema 8.** Nájera va a llenar una quiniela de la NFL, que consiste de 6 partidos donde puede elegir si gana el local o gana el visitante (sin empates). Cierta semana, Nájera llenó todas las combinaciones posibles. ¿Cuántos aciertos obtuvo en promedio?

**Problema 9.** En *planolandia* las matrículas de los carros llevan dos símbolos: una letra que puede ser una vocal $A, B, C, D, E$ o una de estas consonante $V, W, X, Y, Z$, acompañada de algún número que puede ser 3,4,5,6,7,8 o 9. Para formar una placa solo se tienen dos reglas: si lleva una consonante, el número que acompaña es primo y si lleva un número impar entonces debe ir acompañado de una letra consonante. Por ejemplo: 3W, 5Y y 7Z, son matrículas válidas. ¿Cuántas de las siguientes combinaciones son una matrícula válida en *planolandia*?

A3 E2 I9 O5 U8 3A 2E 9I 5O 8U.

**Problema 10.** Los lados de dos triángulos se intersectan en a lo más 6 puntos. ¿En a lo más cuántos puntos, se intersectan los lados de tres triángulos?

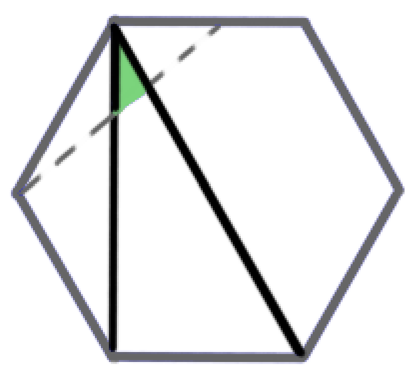
**Problema 11.** Sea $ABCD$ un trapecio de área 72 cm$^2$, con base mayor $AB = 18$ y base menor $CD = 6$. Considera un punto $P$ dentro del trapecio. Calcula la probabilidad de que el $\triangle ABP$ tenga área mayor que 27, como una fracción irreducible $\frac{a}{b}$. ¿Cuál es la suma de $a + b$?

**Problema 12.** Yareli va a decir cada uno de los números del 1 al 100. Cada que Yareli dice un número, Ana, Bere, Coco y Dana dicen, en orden, uno a uno, siempre empezando con Ana, los divisores positivos del número que dijo Yareli. Por ejemplo, si Yareli dice 12, entonces Ana dice 1, Bere dice 2, Coco dice 3, Dana dice 4, Ana dice 6 y Bere dice 12. Como Bere dijo el último divisor, Bere ganó esa ronda. De las 100 rondas que jugaron, ¿cuántas las ganó Coco?

**Problema 13.** Determina cuántas parejas de enteros positivos $(a, b)$ cumplen la siguientes características: Hay exactamente 4 múltiplos positivos de $a$ que son menores que $b$, y hay exactamente 4 cuadrados positivos menores que $b$.

**Problema 14.** En un tablero cuadrado de $14 \times 14$ se han pintado de negro dos, de los $14^2 = 196$ cuadraditos. Sin importar cuales sean los cuadraditos que se pintaron, ¿cuál es el máximo entero positivo $k$ del que puedes asegurar, existe un rectángulo con $k$ cuadraditos blancos dentro de él y ninguno negro?

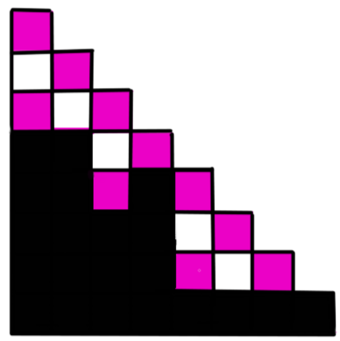
**Problema 15.** El siguiente es un hexágono regular de área 1 $cm^2$. Hay dos segmentos negros que unen vértices del hexágono y un segmento punteado que une un vértice con el punto medio del segmento al que llega. El área del triángulo en verde se puede expresar como $X$ cm$^2$. ¿Cuál es el valor de $\dfrac{1}{x}$ ?



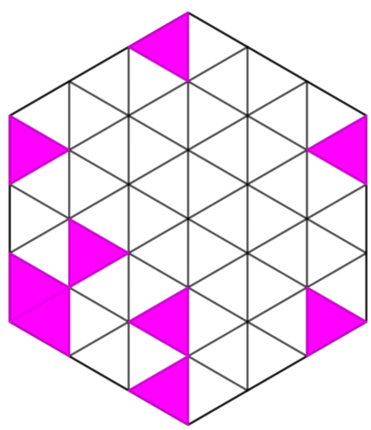
## Cuyo, etapa final

**Problema 1.** Ernesto y Kapioma van a participar en una carrera. En cierto momento, Kapioma iba en primer lugar y Ernesto en el lugar 20. Después, Ernesto rebasó a 7 personas, mientras que Kapioma fue rebasada por 5 personas. Si nadie más cambia de lugar, ¿cuál es el menor número de personas que debe rebasar Ernesto para quedar adelante de Kapioma?

**Problema 2.** La figura es una escalera de 8 niveles. El primer nivel tiene un cuadradito, el segundo nivel tiene dos cuadraditos y así sucesivamente el octavo nivel tiene ocho cuadraditos. Los cuadraditos se pintan de manera alternada de blanco y morado, como se muestra. ¿Cuántos cuadraditos morados hay la región sombreada?



**Problema 3.** ¿Cuántos triángulos, como mínimo, hay que sombrear en la siguiente imagen para que la figura tenga al menos un eje de simetría?



**Problema 4.** Cuando un sargento dice un número, sus soldados se organizan en ese número de filas, con el mismo número de soldados en cada una. El sargento dijo 7 y sus soldados se organizaron 6 en cada fila, pero 3 soldados no encontraron fila. Si el sargento dice 8, ¿cuántos soldados no podrán encontrar fila?

**Problema 5.** Ángela, Beatriz, Carla y Daniela intercambiaron regalos. Sabemos que Anita no se quedó el regalo de Daniela y que Carla se llevó el de Beatriz. Además, como es un intercambio, nadie se quedó su propio regalo. ¿Cuál regalo se llevó Daniela?

**Problema 6.** En una calle hay muchas casas. De un lado solo hay casas con números pares (2, 4, 6, ...) y del otro lado solo hay casas con números impares (1, 3, 5,...). Astro y Berto tienen la tarea de pintar los números de las casas afuera de la puerta. Astro va a pintar las casas pares y Berto va a pintar las casas impares. Sin embargo, Astro es más rápido que Berto y alcanza a pintar dos números en el tiempo en el que Berto pinta un número. Cuando Astro ha terminado de pintar la casa con el número 100, ¿cuál es la última casa que terminó Berto?

**Problema 7.** Germán tiene los números del 1 al 15. ¿Cuál es el menor número que no es primo, y que no puede obtenerse multiplicando dos de los números de Germán?

Nota: Los números primos son aquellos que solo se dividen por 1 y por sí mismos. Por ejemplo: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, etcétera.

**Problema 8.** Una secuencia de números comienza con 97 y 101. A partir de ahí, cada número se obtiene tomando los dos números anteriores y restando el mayor del menor. Por ejemplo, como 101 - 94 = 4, nuestra secuencia comienza como 97, 101, 4, 97, 93 y continúa. ¿Qué número ocupa la posición 2021? Por ejemplo, 93 está en la posición número 5.

**Problema 9.** Un payaso va salir a escena. Tiene pelucas de color azul, blanco, café y dorado; Globos color azul, café, dorado, rojo y verde; también tiene zapatos gigantes color azul, café, rojo, verde y amarillo. ¿De cuántas maneras puede disfrazarse para dar su show si quiere que exactamente dos de sus accesorios sean del mismo color?

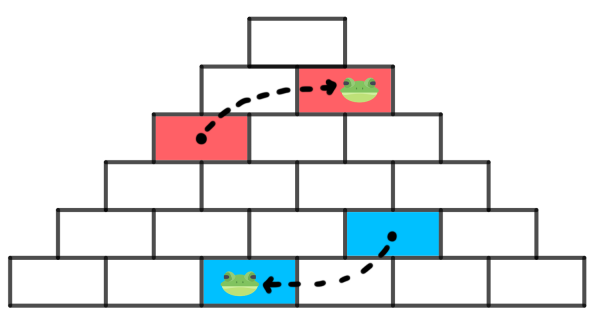
**Problema 10.** A Chocoreta le dejaron hacer 674 sumas de tarea:

$$1 + 2 + 3, 4 + 5 + 6, \cdots, 2020 + 2021 + 2022$$

Chocoreta calculó todas las sumas en una nueva lista, ¿cuántos resultados son múltiplos de 4?

**Problema 11.** Berenice escribe el mayor entero positivo que no tiene dígitos repetidos ni dígitos iguales a 0. Multiplica sus dígitos y escribe ese nuevo número. Multiplica los dígitos del nuevo número y continúa así hasta que obtiene un número de una sola cifra. ¿Qué número obtuvo al final Berenice?

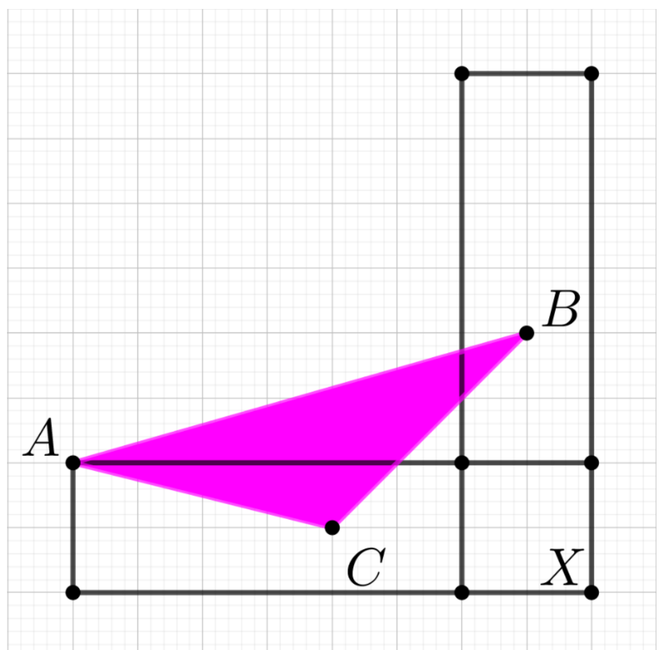
**Problema 12.** La siguiente es una pirámide de seis niveles. Una ranita está dando saltos de rectángulo en rectángulo. Para dar sus saltos puede decidir si ir a la derecha o a la izquierda y, además, si ir arriba o abajo. Si decide ir a la derecha y arriba, por ejemplo, entonces calcula: uno a la derecha y, de los dos de arriba, el de la derecha; por ejemplo, el camino rojo es "derecha arriba". El camino azul es "izquierda abajo". ¿Cuál es la mayor cantidad de ranitas que podemos colocar en la pirámide, una en cada rectángulo, de manera que no haya una ranita que pueda saltar al rectángulo donde está otra ranita?



**Problema 13.** ¿Cuál es el menor entero positivo por el que se debe multiplicar 375 para obtener un número con cuatro ceros al final? Por ejemplo, el menor entero positivo por el que se debe multiplicar 15 para obtener un número con dos ceros al final es 20 pues $15 \times 20 = 600$.

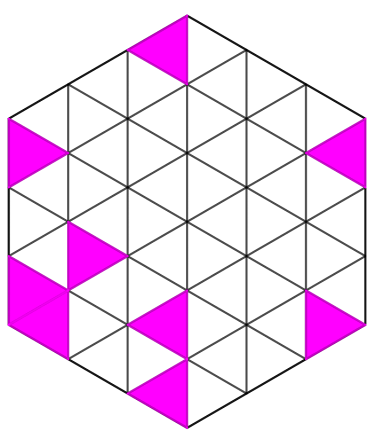
**Problema 14.** El primer dígito de un número de 4 cifras es la cantidad de 0's que aparecen en él, el segundo dígito es la cantidad de 1's, el tercer dígito es la cantidad de 2's y el último dígito la cantidad de 3's. Da un ejemplo de un número que cumpla esto.

**Problema 15.** La siguiente figura muestra dos rectángulos iguales de lados 16 cm y 64 cm. Los dos rectángulos comparten la esquina del vértice $X$ y sus bases están alineadas. Además $B$ y $C$ son sus centros. ¿Cuál es el área, en cm$^2$, del triángulo $\triangle ABC$?




# Koala, etapa final

**Problema 1.** ¿Cuántos triángulos, como mínimo, hay que sombrear en la siguiente imagen para que la figura tenga al menos un eje de simetría?



**Problema 2.** A Chocoreta le dejaron hacer 674 sumas de tarea:

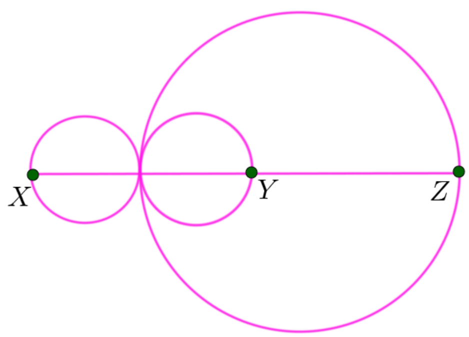
$$1 + 2 + 3, 4 + 5 + 6, \cdots, 2020 + 2021 + 2022$$

Chocoreta calculó todas las sumas en una nueva lista, ¿cuántos resultados son múltiplos de 4?

**Problema 3.** ¿Cuál es el menor entero positivo por el que se debe multiplicar 375 para obtener un número con cuatro ceros al final?

Por ejemplo, el menor entero positivo por el que se debe multiplicar 15 para obtener un número con dos ceros al final es 20, pues $15 \times 20 = 600$.

**Problema 4.** En la figura se tiene tres circunferencias tangentes, que se tocan en un solo punto, y las dos más pequeñas son iguales. El segmento $XZ$ pasa por el centro de las circunferencias y mide 80 cm. El segmento $YZ$ mide 60 cm. ¿Cuál es el radio, en cm, de la circunferencia más grande?

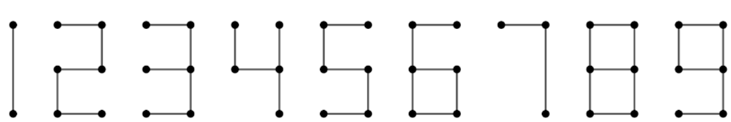



**Problema 5.** Yareli escribe el número más grande posible que no tiene dígitos repetidos ni dígitos iguales a 0, y que al multiplicar sus dígitos no obtenemos un número terminado en 0. Continúa multiplicando los dígitos del resultado hasta obtener un número de un solo dígito. ¿Qué número obtuvo al final?

Por ejemplo, si multiplicamos los dígitos de 134 obtenemos $1 \times 3 \times 4 = 12$. Ahora multiplicamos los dígitos de 12 y obtenemos $1 \times 2 = 2$.

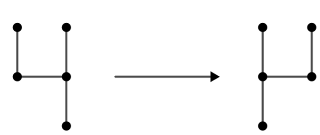
**Problema 6.** El equipo de fútbol de los Totoros se puso sus playeras al revés durante el entrenamiento. Esto hizo que sus números se vieran como en un espejo. Si en el equipo de los Totoros hay jugadores con playeras del 10 al 99, ¿cuántos números siguen siendo números cuando se voltea la playera?

Nota 1: Los números en las playeras de los Totoros se dibujan así:



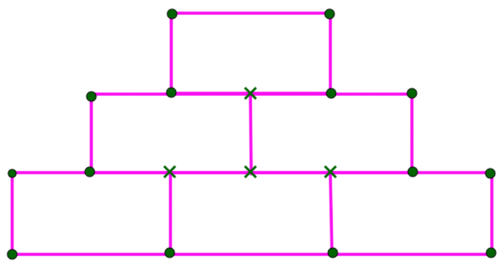
Nota 2: El número 1 no es igual al número 01.

Nota 3: Por ejemplo, cuando volteamos el 4, obtenemos:



**Problema 7.** El primer dígito de un número de 4 cifras es la cantidad de 0's que aparecen en él, el segundo dígito es la cantidad de 1's, el tercer dígito es la cantidad de 2's y el último dígito la cantidad de 3's. ¿Cuál es la suma de todos los números de cuatro cifras que cumplen estas condiciones?

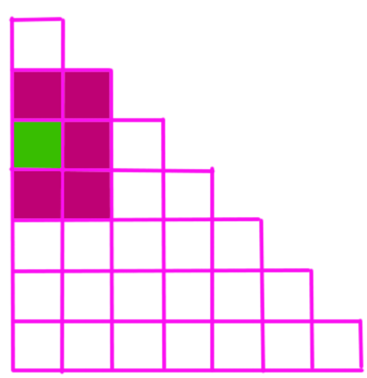
**Problema 8.** La siguiente figura es una pirámide de tres niveles. Tiene 14 vértices sobre su perímetro (puntos) y 4 dentro de ella (cruces). ¿Cuántos puntos tendrá una pirámide construida igual, pero con 100 cruces?



**Problema 9.** El equipo de los *Totoros* jugó 21 partidos en su temporada. Sean $G, E$ y$P$ la cantidad de partidos ganados, empatados y perdidos, respectivamente, que tuvieron en la temporada. Cada partido ganado les dio tres puntos, cada partido empatadado les dio un punto y cada partido perdido no les dio puntos. En total obtuvieron 50 puntos. ¿Cuántas tercias $(G, E, P)$ cumplen con los resultados de la temporada?

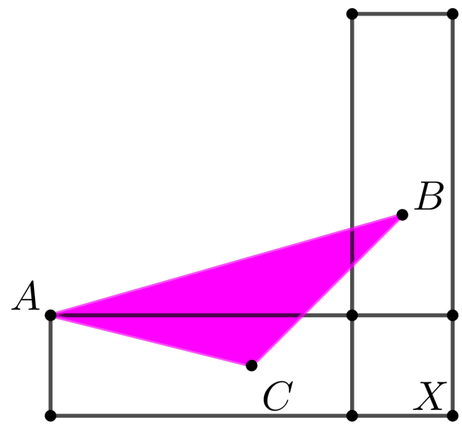
**Problema 10.** En un salón de clases los alumnos se sientan formando la siguiente figura escalonada. En cada cuadradito se sienta un alumno. Cada alumno debe saludar exactamente una vez a los alumnos que tenga a su alrededor. Por ejemplo si está sentado en el asiento en verde, debe saludar a todos los alumnos en los asientos sombreados de morado. ¿Cuántos saludos hay en el salón de clases?

Nota: Cuando Daniela saluda a Yareli, Yareli también saluda a Daniela. Se cuenta un solo saludo entre las dos.



**Problema 11.** ¿Cuántos números de 5 dígitos cumplen que todos sus dígitos son iguales a 3 excepto uno? Por ejemplo, 38333 es un número que cumple.

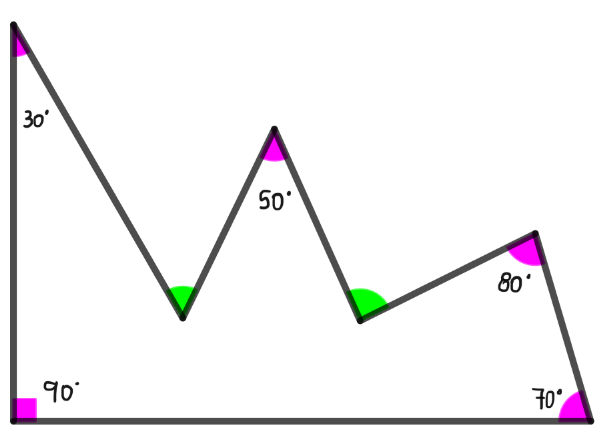
**Problema 12.** La siguiente figura muestra dos rectángulos iguales de lados 16 cm y 64 cm. Los dos rectángulos comparten la esquina del vértice $X$ y sus bases están alineadas. Además $B$ y $C$ son sus centros. ¿Cuál es el área, en cm$^2$, del triángulo $\triangle ABC$?




**Problema 13.** Yareli escoge dos dígitos del conjunto $1, 2, 3, 4$, en orden, y escribe un número de dos dígitos. Por ejemplo, si escoge 1 y luego 2, escribe el número 12; pero si escoge 2 y luego 1, escribe el número 21. Montse también escoge dos dígitos del conjunto $1, 2, 3, 4$, en orden, y también escribe un número de dos dígitos. De todas las posibles maneras en que las dos pueden hacer esto, ¿en cuántos casos el número de Yareli es mayor que el número de Montse?

**Problema 14.** Astro va colorear cada uno de los números del 1 al 120. Los coloreara de azul, rojo o verde (sólo de un color). Para cada número, ubica el múltiplo de 5 más cercano y mayor o igual que él. También ubica el múltiplo de 6 más cercano y mayor o igual que él. Si el múltiplo de 5 está más cerca pinta el número de rojo. Si el de 6 está más cerca lo pinta de azul y si no puede decidir lo pinta de verde. ¿Cuántos números quedarán pintados de azul?

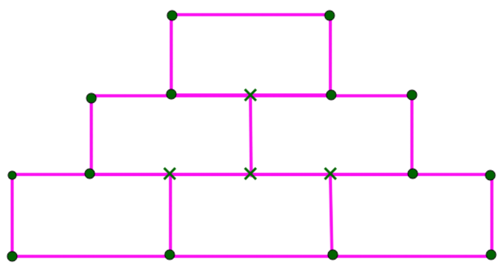
**Problema 15.** En la siguiente figura se han puesto los valores de los ángulos marcados en rosa: $90°, 30°, 50°, 80°$ y $70°$. ¿Cuál es el valor de la suma de los ángulos en verde?



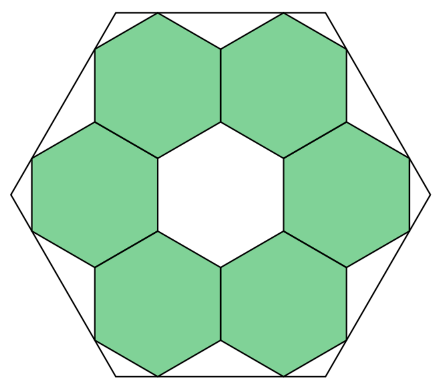
# Walabi, etapa final

## Primera parte

**Problema 1.** La siguiente figura es una pirámide de tres niveles. Tiene 14 vértices sobre su perímetro (puntos) y 4 dentro de ella (cruces). ¿Cuántos puntos tendrá una pirámide construida igual, pero con 100 cruces?



**Problema 2.** Seis hexágonos regulares idénticos se colocan dentro de un hexágono regular más grande, como muestra la figura. El hexágono exterior tiene área 900. ¿Cuál es el área de la región sombreada?

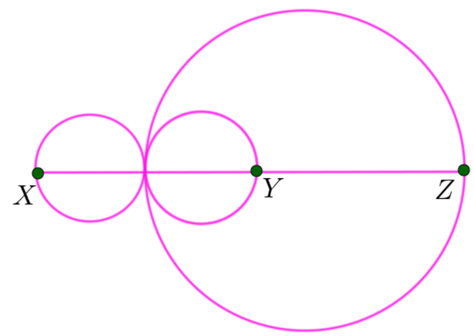


**Problema 3.** Ángela, Beatriz, Carla, Daniela y Elisa juegan Among Us. Una de ellas es la impostora, que siempre miente, y las otras cuatro siempre dicen la verdad. Esto fue lo que dijeron:

- Ángela: Yo no soy la impostora.
- Beatriz: Ángela es la impostora.
- Carla: Alguna de Ángela o Beatriz es la impostora.
- Daniela: Ni Beatriz ni Elisa están mintiendo.
- Elisa: Vi a Beatriz en el cuarto de máquinas.

¿Quién es la impostora?

**Problema 4.** En la figura se tiene tres circunferencias tangentes, las dos más pequeñas son iguales. El segmento $XZ$ pasa por el centro de las circunferencias y mide 80 cm. El segmento $YZ$ mide 60 cm. ¿Cuál es el radio, en cm, de la circunferencia más grande?



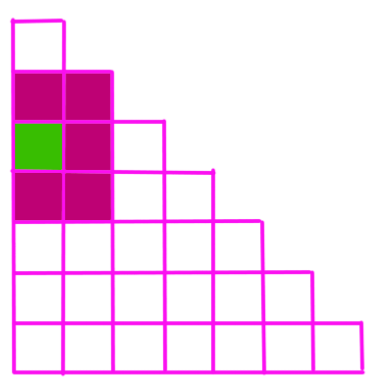

**Problema 5.** Daniela se propuso ahorrar todos los días. Se puso la meta de que todos los días tenía que echar al menos 1 peso más en su alcancía de los que echó el día anterior. Sabemos que el 1 de septiembre echó 10 pesos y que hubo 20 días distintos en que alguien de su familia le ayudó para echar 20 pesos más que el día anterior. ¿Cuál es el mínimo que tendrá ahorrado el 30 de septiembre, después de echar el dinero de ese día?

**Problema 6.** El equipo de los *Totoros* jugó 21 partidos en su temporada. Sean $G, E$ y $P$ la cantidad de partidos ganados, empatados y perdidos respectivamente que tuvieron en la temporada. Cada partido ganado les dió tres puntos, cada partido empatadado les dió uno y cada partido perdido no les dió nada. Si hicieron 50 puntos. ¿Cuántas tercias $(G, E, P)$ cumplen con los resultados de la temporada?

**Problema 7.** Un número se dice *sietado* si es la multiplicación de siete enteros positivos consecutivos. Determina el máximo común divisor de todos los números sietados.

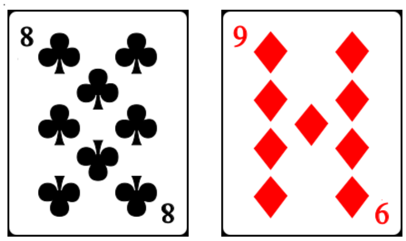
**Problema 8.** En un salón de clases los alumnos se sientan formando la siguiente figura escalonada. En cada cuadradito se sienta un alumno. Cada alumno debe saludar exactamente una vez a los alumnos que tenga a su alrededor. Por ejemplo si está sentado en el asiento en verde, debe saludar a todos los alumnos en los asientos sombreados de morado. ¿Cuántos saludos hay en el salón de clases?

Nota: Cuando Daniela saluda a Yareli, Yareli también saluda a Daniela. Se cuenta un solo saludo entre las dos.



**Problema 9.** Mane tiene la carta 9 de diamantes rojos y la carta 8 de tréboles negros. Desea pintar cada diamante y cada trébol de las cartas usando el color opuesto. Terminará cuando todos los diamantes sean negros y todos los tréboles sean rojos. Si comienza siempre con un diamante, luego un trébol, luego otro diamante, y así continúa intercalando entre las cartas, ¿de cuántas formas puede hacer este proceso de pintado?

Nota: Puedes dejar tu respuesta como una multiplicación expresada.




**Problema 10.** Una tercia $(a, b, c)$ de enteros positivos con $a < b < c$ se dice que es *pegadita* si $a$ divide a $b$ y $b$ divide a $c$. Comenzando con una pareja $(x, z)$ de enteros positivos tales que $x$ divida a $z$, podemos cambiarla por la pareja $(y, z)$ o por la pareja $(x, y)$ siempre y cuando $(x, y, z)$ sea pegadita. Si una pareja ya no la podemos cambiar por ninguna otra, decimos que es una pareja en la que se termina. De entre todas las parejas $(p, r)$ en las que puede terminar la pareja $(12, 96)$ ¿Cuál es máximo valor que puede tomar $p + r$?

**Problema 11.** Determina el menor entero positivo $n$, tal que la suma de los elementos de la sucesión

$$1 - 2 + 4 - 8 + \cdots + 2^n$$

sea mayor a $1,000$.

**Problema 12.** Al cui-cui mágico le gusta la plata. Por eso, colecciona monedas de plata de distintas denominaciones. Si tiene monedas de \$1, \$2, \$5, \$10, \$20, \$50 y \$100. ¿Cuántas cantidades distintas puede formar usando a lo más una moneda de cada denominación?

## Segunda Parte

**Problema 13.** El juego Pokemon Stadium de Nintendo 64 incluía un mini juego de memoria. La maestra Clefairy recitaba un código que mezclaba arriba, abajo, derecha e izquierda. Para un desafío, Clefairy quería cada cuarteta, tomada de dos en dos, fuera una permutación distinta de las cuatro direcciones. ¿Cuál es la mayor longitud posible del código?

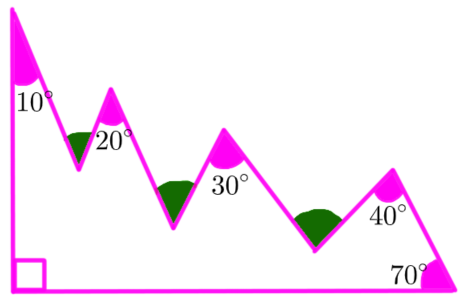
Por ejemplo, en los seis términos $ABCDEF$, queremos que tanto $ABCD$ como $CDEF$ sean permutaciones distintas de las cuatro direcciones.

**Problema 14.** Determina el menor entero positivo $a$ tal que para cualesquiera $a$ enteros positivos existen dos números distintos, digamos $m$ y $n$, para los cuales

$$m^{2^m} - n^{2^n}$$

es múltiplo de 10.

**Problema 15.** En la siguiente figura se han puesto los valores de los ángulos marcados en rosa. Además del ángulo recto marcado en rosa también, en la esquina. ¿Cuál es el valor de la suma de los ángulos en verde?




# Canguro, etapa final

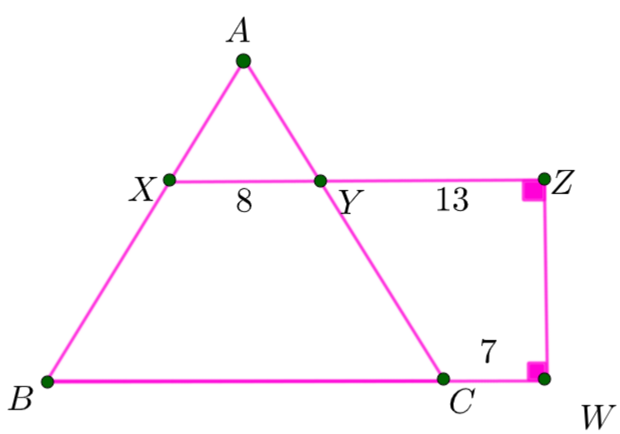
## Primera Parte

**Problema 1.** Ángela, Beatriz, Carla, Daniela y Elisa juegan Among Us. Una de ellas es la impostora, que siempre miente, y las otras cuatro siempre dicen la verdad. Esto fue lo que dijeron:

- Ángela: Yo no soy la impostora.
- Beatriz: Ángela es la impostora.
- Carla: Alguna de Ángela o Beatriz es la impostora.
- Daniela: Ni Beatriz ni Elisa están mintiendo.
- Elisa: Vi a Beatriz en el cuarto de máquinas.

¿Quién es la impostora?

**Problema 2.** En la imagen se tiene un triángulo equilátero. Los segmentos $XZ$ y $BW$ son paralelos y perpendiculares al segmento $ZW$. Nos dan las medidas de $XY = 8$, $YZ = 13$ y $CW = 7$, en cm. ¿Cuál es la medida del segmento $AB$?



**Problema 3.** Daniela se propuso ahorrar todos los días. Se puso la meta de que todos los días tenía que echar al menos 1 peso más en su alcancía de los que echó el día anterior. Sabemos que el 1 de septiembre echó 10 pesos y que hubo 20 días distintos en que alguien de su familia le ayudó para echar 20 pesos más que el día anterior. ¿Cuál es el mínimo que tendrá ahorrado el 30 de septiembre, después de echar el dinero de ese día?

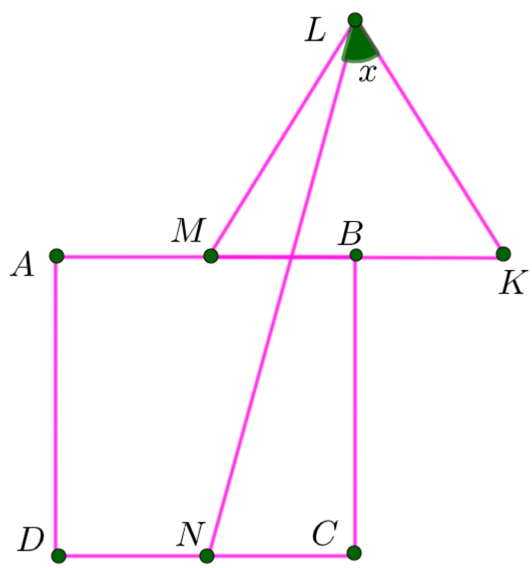
**Problema 4.** Un número se dice *sietado* si es la multiplicación de siete enteros positivos consecutivos. Determina el máximo común divisor de todos los números sietados.

**Problema 5.** Determina el menor entero positivo $n$, tal que la suma de los elementos de la sucesión

$$1 - 2 + 4 - 8 + \cdots + 2^n$$

sea mayor a $1,000$.

**Problema 6.** Con un cuadrado $ABCD$ se han tomado los puntos medios $M$ y $N$ de los segmentos $AB$ y $CD$ respectivamente. En la figura, el triángulo $LMK$ es equilátero, su base está alineada con uno de los lados del cuadrado y su lado mide lo mismo que el lado del cuadrado. Determina el valor de $x$, en grados, esto es la medida del ángulo $\angle NLK$ correspondiente al ángulo marcado en verde.




**Problema 7.** Determina la cantidad de tercias $a, b, c$ de enteros no necesariamente positivos con $a \leq b \leq c$ tales que su multiplicación sea 32.

**Problema 8.** Se tienen 12 pelotas que pesan $1 = 2^0, 2 = 2^1, \ldots, 2^{11}$ kg respectivamente, y se tiene una balanza de dos platillos, uno izquierdo y otro derecho. Cada una de las pelotas se coloca en algún platillo ¿De cuántas formas podemos hacer esta separación de manera que el platillo más pesado sea el derecho, pero podemos quitarle una pelota, para que se vuelva el más ligero?

**Problema 9.** Una tercia $(a, b, c)$ de enteros positivos con $a < b < c$ se dice que es *pegadita* si $a$ divide a $b$ y $b$ divide a $c$. Comenzando con una pareja $(x, z)$ de enteros positivos tales que $x$ divida a $z$, podemos cambiarla por la pareja $(y,z)$ o por la pareja $(x,y)$ siempre y cuando $(x,y,z)$ sea pegadita. Si una pareja ya no la podemos cambiar por ninguna otra, decimos que es una pareja en la que se termina. De entre todas las parejas $(p,r)$ en las que puede terminar la pareja $(12,96)$ ¿Cuál es máximo valor que puede tomar $p+r$?

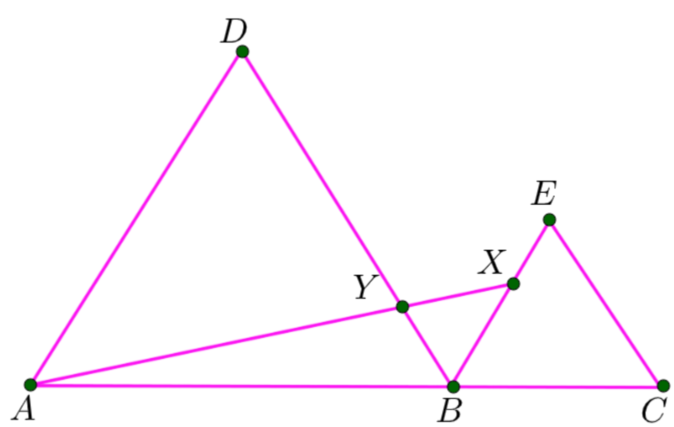
**Problema 10.** Luis escribe en su cuaderno el número 0 y va a lanzar una moneda varias veces. Si cae Sol, suma 1 al número que tenía; si cae Águila, se queda con el número que tenía. Sea $\frac{A}{B}$ la probabilidad de que después de 10 lanzamientos de moneda tenga el número 5, con $A, B$ enteros positivos sin factores en común. Determina el valor de $B$.

**Problema 11.** Bere va pintar los números enteros del 1 al 1000, cada uno con un sólo color. Se debe cumplir que si dos números están pintados del mismo color entonces

- Ambos son primos o ninguno lo es.
- Ambos son múltiplos de cuatro o ninguno lo es.
- Ambos son cuadrados o ninguno lo es.

Por ejemplo 11 y 21 no están pintados del mismo pues uno de ellos es primo y el otro no ¿Cuál es la mínima cantidad de colores que va necesitar Bere?

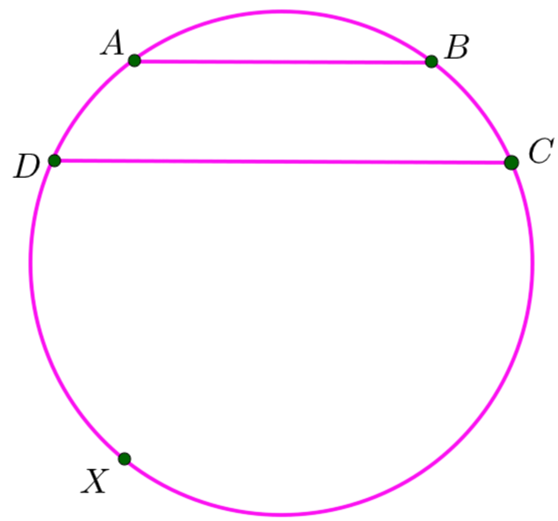
**Problema 12.** En la figura los puntos alineados $A, B$ y $C$ son tales que $AB = 90$ cm y $BC = 30$ cm. Los triángulos $ADB$ y $BEC$ son equiláteros. El punto $X$ se toma en el segmento $BE$ de manera que $BX = 18$ cm. El segmento $AX$ interseca al segmento $DB$ en el punto $Y$. Calcula, en cm, a medida del segmento $BY$.




## Segunda Parte

**Problema 13.** El equipo de fútbol de los Totoros jugó 20 partidos de fútbol. En cada partido obtienen 3 puntos si ganan, 1 punto si empatan y 0 puntos si pierden. Si escribimos la sucesión de números que representan los puntos que tenían después de cada partido, ¿cuál es la mayor cantidad de números primos distintos que podrían aparecer en esa sucesión? Justifica tu respuesta.

**Problema 14.** En la figura los puntos $A, B, C, D$ y $X$ se encuentra sobre la circunferencia. Las rectas $AB$ y $CD$ son paralelas. Sea $H$ el ortocentro del triángulo $ACX$ y $J$ el ortocentro del triángulo $XBD$. Demuestra que $XH = XJ$.




**Problema 15.** Determina todas las parejas de enteros $(A, B)$ (no necesariamente positivos) tales que

$$A - B = \frac{A}{B}$$

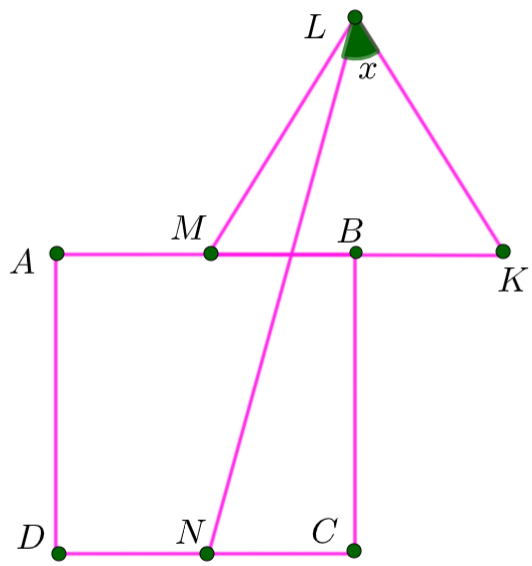
# Uombat, etapa final

## Primera Parte

**Problema 1.** Calcula el último dígito de la siguiente operación:

$$\frac{mcm(6!, 7)}{16} \cdot \sqrt{9}$$

**Problema 2.** Con un cuadrado $ABCD$ se han tomado los puntos medios $M$ y $N$ de los segmentos $AB$ y $CD$ respectivamente. En la figura, el triángulo $LMN$ es equilátero y su base está alineada con uno de los lados del cuadrado. Determina el valor de $x$, en grados, esto es la medida del ángulo $\angle NLK$ correspondiente al ángulo marcado en verde-

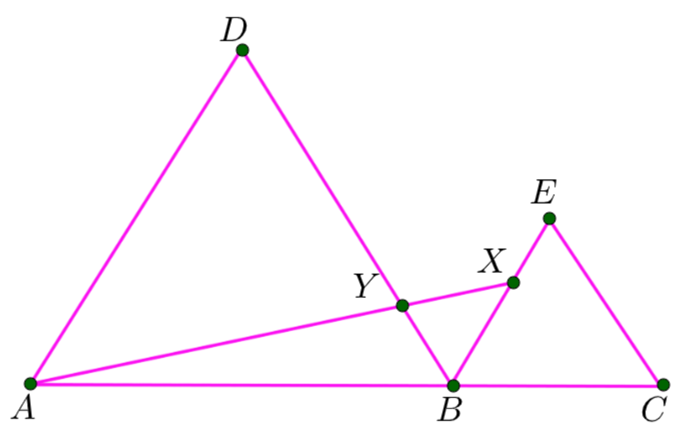



**Problema 3.** En el plano $xy$ sea $K$ la circunferencia de centro (5,0) y radio 5. ¿Cuántos puntos de coordenadas enteras hay sobre $K$?

**Problema 4.** El equipo de fútbol de los Totoros jugó 10 partidos de fútbol. En cada partido obtienen 3 puntos si ganan, 1 punto si empatan y 0 puntos si pierden. Si escribimos la sucesión de números que representan los puntos que tenían después de cada partido, ¿cuál es la mayor cantidad de números primos distintos que podrían aparecer en esa sucesión?

**Problema 5.** Se tienen 12 pelotas que pesan $1, 2, 4, 8 \ldots, 2^{11}$ kg respectivamente, y se tiene una balanza de dos platillos, uno izquierdo y otro derecho. Cada una de las pelotas se coloca en algún platillo. ¿De cuántas formas podemos hacer esta separación de manera que el platillo más pesado sea el derecho, pero podemos quitarle una pelota, para que se vuelva el más ligero?

**Problema 6.** En la figura los puntos alineados $A, B$ y $C$ son tales que $AB = 90$ cm y $BC = 30$ cm. Los triángulos $ADB$ y $BEC$ son equiláteros. El punto $X$ se toma en el segmento $BE$ de manera que $BX = 18$ cm. El segmento $AX$ interseca al segmento $DB$ en el punto $Y$. Calcula, en cm, a medida del segmento $BY$.



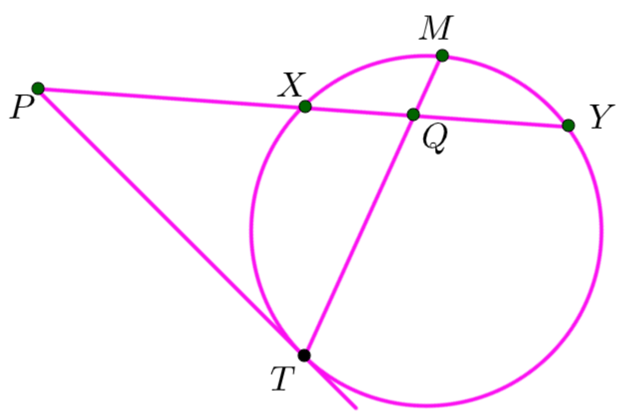
**Problema 7.** Uge tiene un pastel de cumpleaños dividido en $n$ rebanadas iguales, con $35 \leq n < 70$. Quiere repartir las rebanadas entre ella y sus amigos de manera que cada persona reciba la misma cantidad de rebanadas. Si invita a 4 amigos, sobran 2 rebanadas y si invita a 6 amigos sobran 3 rebanadas. Si sabemos que invitó a más de 3 amigos y que no sobraron rebanadas, ¿cuál es la menor cantidad de amigos que pudo haber invitado?

**Problema 8.** Determina el menor entero positivo $n$ tal que $2^n$ no divide a

$$2021^k + 2027^k$$

para todo entero positivo $k$.

**Problema 9.** En la figura $P$ es un punto fuera de la circunferencia y $PT$ es una recta tangente. Se traza una recta por $P$ que corta a la circunferencia en puntos $X$ y $Y$. El punto medio del arco $XY$ que no contiene a $T$ es $M$. Los segmentos $XY$ y $TM$ se cortan en $Q$. Si $PX = 4$ cm y $XY = 12$ cm. Calcula, en cm, la medida del segmento $QY$.




**Problema 10.** Benji es muy fan de StarWars. Cada semana ve las 11 películas, pero en un orden distinto. Sin embargo, tiene reglas: tiene que ver Episodio III después de Episodio II, después de Episodio I, aunque no necesariamente seguidas; lo mismo para Episodios IV, V y VI, y para Episodios VII, VIII y IX; las otras dos películas (Rogue One y Han Solo) las puede ver en cualquier momento. ¿Cuál es el máximo número de semanas que puede hacer esto, cada semana viendo las películas en un orden distinto? Escribe tu respuesta como un entero.

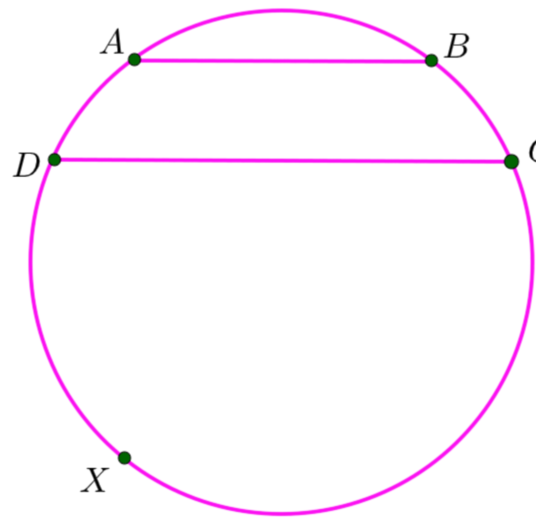
**Problema 11.** Yareli lanza un dado tres veces y escribe sus resultados como un número de tres dígitos. Por ejemplo, si obtuviera 1, 1, 5, entonces escribe el número 115. Montse también lanza un dado tres veces y obtiene un número de tres dígitos, igual que Yareli. Si la probabilidad de que el número de Yareli sea mayor que el número de Montse es $\frac{X}{6^6}$, ¿cuál es el valor de $X$?

**Problema 12.** Astro va colorear cada uno de los números del 1 al 120. Los coloreara de azul, rojo o verde (sólo de un color). Para cada número, ubica el múltiplo de 5 más cercano y mayor o igual que él. También ubica el múltiplo de 6 más cercano y mayor o igual que él. Si el múltiplo de 5 está más cerca pinta el número de rojo. Si el de 6 está más cerca lo pinta de azul y si no puede decidir lo pinta de verde. ¿Cuántos números quedarán pintados de azul?

## Segunda Parte

**Problema 13.** Hay 10 puntos sobre una circunferencia. Se trazaron todas las cuerdas entre estos 10 puntos y se observa que no hay tres cuerdas concurrentes. ¿Cuántos puntos de intersección hay en el interior de la circunferencia?

**Problema 14.** En la figura los puntos $A, B, C, D$ y $X$ se encuentra sobre la circunferencia. Las rectas $AB$ y $CD$ son paralelas. Sea $H$ el ortocentro del triángulo $ACX$ y $J$ el ortocentro del triángulo $XBD$. Demuestra que $XH = XJ$.




**Problema 15.** Determina todos los enteros positivos $n$ para los cuales existe otro entero positivo $m$ de manera que $n^2 - 1$ y $n^3 + 1$ sean divisores consecutivos de $m$. Esto es, que no hay un número mayor que $n^2 - 1$ y menor que $n^3 + 1$ que también divida a $m$.

# Soluciones a los Problemas

## Cuyo, primera etapa

**Solución Problema 1.** El problema nos pide eliminar opciones. Sabemos que $0, 1, 2, 3, 4, 5$ y 6 son números válidos en las piezas de dominó, así que nuestro primer criterio es buscar alguna ficha que tenga un número distinto de estos. El número 7226 no es posible porque tiene un 7. Luego, la respuesta correcta es (d).

**Solución Problema 2.** El problema nos pide eliminar opciones. Podemos ver que (a), (c) y (e) ya se cumplen en la figura del problema. Veamos que (d) también es posible, si la Luna girara media órbita alrededor de la Tierra. Para que (b) fuera posible, Mercurio tendría que colocarse entre la Tierra y la Luna, lo cual es imposible. La respuesta correcta es (b).

**Solución Problema 3.** Hagamos los cálculos para cada opción.
Gorra: a crédito cuesta $10 \times 25 = 250$ contra 200 de contado, 50 pesos de diferencia.
Mesa de Tenis: a crédito cuesta $20 \times 130 = 2600$ contra 2500 de contado, 100 pesos de diferencia.
Almohada: a crédito cuesta $15 \times 12 = 180$ contra 175 de contado, 5 pesos de diferencia.
Taza: a crédito cuesta $12 \times 10 = 120$ contra 100 de contado, 20 pesos de diferencia.
Pizarrón: a crédito cuesta $17 \times 25 = 425$ contra 300 de contado, 125 pesos de diferencia.

La mayor diferencia es 125, el Pizarrón. La respuesta correcta es (e).

**Solución Problema 4.** Tratemos de encontrar un patrón entre los números. Observa que los decimales se repiten: $4, 9, 3, 8$. Además, 4 y 9 aparecen con $50, 52$ y 3 y 8 aparecen con 51 y 53. Podríamos proponer que $4, 9$ aparecen con partes enteras pares y $3, 8$ aparecen con partes enteras impares. De entre las opciones 104,8 es la única que no cumple esta regla; la respuesta correcta es (c).

**Solución Problema 5.** Observa que cada nueva mesa quita un lugar, porque se tiene que pegar en un lado de otro hexágono. Además, pierde uno de sus propios lugares al pegarse, por lo que solo quedan 5 lugares libres. Es decir, cada nueva mesa aumenta $5 - 1 = 4$ lugares. La única excepción es la primera mesa, que aumenta 6 lugares. Si tenemos 10 mesas, son en total $6 + 4 \times 9 = 42$ lugares. La respuesta correcta es (d).

Esta es la mayor cantidad de personas que se podrían sentar. Podemos acomodar mesas de manera que se pierdan más lugares (si hacemos que compartan dos o más lados los hexágonos) pero el problema nos pregunta por el máximo número.

**Solución Problema 6.** Basta con contar los segmentos rojos uno por uno. En total son 22. Como cada uno mide $1cm$, el contorno mide $22cm$. La respuesta correcta es (b).

**Solución Problema 7.** La imagen muestra un triángulo colocado en la base inferior, hacia adentro del rectángulo. El triángulo se puede colocar en cualquiera de los cuatro lados del rectángulo, y tiene otras dos opciones: hacia adentro o hacia afuera. Luego, son $4 \times 2 = 8$ maneras distintas de construir el triángulo. La respuesta correcta es (b).

**Solución Problema 8.** Vamos a resolver este problema pensando hacia atrás. Chiqui obtuvo 42. La operación previa es multiplicar por 3. Dividimos $42 \div 3 = 14$, ese es el número que tenía antes. La operación previa es sumar 4. Restamos $14 - 4 = 10$ y ese tiene que ser el número que pensó Chiqui. La respuesta correcta es (b).

**Solución Problema 9.** La suma de los tres números que obtuvo Ceci es $17+38+33 = 88$. Esto quiere decir que en total restó 12, pues originalmente sumaban 100. Como restó lo mismo a cada número, debió haber restado $12 \div 3 = 4$ a cada uno. Esto quiere decir que sus números originales eran $21, 42, 37$. De estos, únicamente 42 aparece como una opción. La respuesta correcta es (b).

**Solución Problema 10.** Cada una de las 20 personas que llegó después comió 4 taquitos, es decir, $20 \times 4 = 80$ taquitos en total. Estos 80 taquitos salieron de los 5 taquitos que iban a comer cada una de las personas que llegaron primero; como cada persona pasó de 5 a 4 taquitos, se quitó un taquito por persona; para juntar 80 taquitos, deben ser 80 personas. En total son $80+20 = 100$ personas las que asistieron a la fiesta, la respuesta correcta es (c).

**Solución Problema 11.** Como cada 5 carreras, Tikis siempre gana 3, podemos separar las 15 carreras en tres grupos de 5 carreras; en cada uno Tikis ganó 3 carreras así que ganó $3 \times 3 = 9$ carreras en total. La respuesta correcta es (c).

**Solución Problema 12.** Si "empatamos" cada lado del rectángulo rojo con su correspondiente del rectángulo verde, vamos a encontrar un huequito a ambos lados. Afortunadamente, la imagen nos dice justamente el tamaño de dichos huequitos. Los lados horizontales son $4cm$ más cortos a la izquierda y $3cm$ más cortos a la derecha, llevamos $4 + 4 + 3 + 3 = 14cm$ de diferencia. Los lados verticales son $2cm$ más cortos arriba y $1cm$ más cortos abajo, llevamos $2 + 2 + 1 + 1 = 6cm$ de diferencia. En total, son $14cm + 6cm = 20cm$ de diferencia. El perímetro del rectángulo verde es $20cm$ más grande que el perímetro del rectángulo rojo, la respuesta correcta es (c).

**Solución Problema 13.** La figura recortada debe tener al menos los mismos 4 lados, pues no hubo cortes de vértice a vértice. Al desdoblar la figura, vemos que ganamos un lado, son 5 en total. La respuesta correcta es (b).

**Solución Problema 14.** Hagamos la lista de los primeros números de Miguel: $1+2+3 = 6, 2+3+4 = 9, 3+4+5 = 12, 4+5+6 = 15, 5+6+7 = 18, 6+7+8 = 21$. Ahora, hagamos la lista de los primeros números de Tadeo: $1+2+3+4 = 10, 2+3+4+5 = 14, 3+4+5+6 = 18$. Nos detenemos aquí porque ya encontramos un número en común: 18, que además aparece entre las opciones. La respuesta correcta es (d).

**Solución Problema 15.** El ejercicio nos pide contar los días que han pasado desde el 1ro de enero de 2021 hasta el 23 de septiembre de 2021 y luego multiplicarlo por 3. Sumamos los meses completos y luego 23 días de septiembre: $31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 23 = 266$, recordando que tanto julio como agosto, aunque con consecutivos, tienen 31 días. Como cada corrección le toma 3 segundos, en total son $266 \times 3 = 798$ segundos. La respuesta correcta es (b).

## Koala, primera etapa

**Solución Problema 1.** Ver solución de Cuyo, problema 2.

**Solución Problema 2.** Ver solución de Cuyo, problema 11.

**Solución Problema 3.** Ver solución de Cuyo, problema 10.

**Solución Problema 4.** Ver solución de Cuyo, problema 13.

**Solución Problema 5.** Un ángulo llano mide 180°. Las porciones verdes suman $25 \times 4 = 100°$, por lo que los ángulos marcados con $x$ suman los restantes 80°. Como son cuatro ángulos marcados con $x$, cada uno mide $80 \div 4 = 20°$. La respuesta correcta es (a).

**Solución Problema 6.** Para que al girar el celular, el dígito 6 de las horas se vea igual, el último dígito tiene que ser 9, que es un 6 girado media vuelta. Esto nos deja las opciones $6:19, 6:39, 6:59$. De estas tres, la primera y la tercera cumplen que son el mismo número al girarlas, pero solo $6:59$ cumple que es una hora entre las $6:30$ y las $7:00$. La respuesta correcta es (e).

**Solución Problema 7.** Si las diagonales no tienen cuadritos en común, entonces son dos diagonales iguales y ocuparían una cantidad par de cuadritos, que no es el caso. Luego, las dos diagonales tienen un cuadrito en común. Desde ese cuadrito común hacia cada una de las esquinas hay la misma cantidad de cuadritos: $25 - 1 = 24, 24 \div 4 = 6$. Luego, el lado del cuadrado debe medir $6 + 1 + 6 = 13$ cuadritos y hay $13 \times 13 = 169$ cuadritos en total. La respuesta correcta es (e).

**Solución Problema 8.** Ver solución de Cuyo, problema 9.

**Solución Problema 9.** Observa que las rutas cortas (azules) no conectan todas las ciudades entre sí, sino que las dividen en dos triángulos separados. Por lo tanto, es necesario en algún momento tomar una ruta larga (roja) para pasar de triángulo a triángulo. Empezando en $A$, Yareli podría viajar a $E, C, F, B, D$ tomando rutas de color azul, azul, rojo, azul, azul. Con eso visita todas las ciudades y gastó en total $5 + 5 + 7 + 5 + 5 = 27$ carmapesos. La respuesta correcta es (d).

**Solución Problema 10.** Los números imposibles, de menor a mayor, son $1, 2, 4, 5, 8, 11$. A partir de aquí, todos los números son posibles pues $12 = 3+3+3+3, 13 = 7+3+3, 14 = 7+7$ y podemos obtener cada tercia siguiente sumando 3. Con esto sabemos que el mayor marcador imposible es $8 - 11$, la respuesta correcta es (e).

**Solución Problema 11.** Sabemos que la línea $AB$ mide $2cm$, igual al lado del triángulo. Como dos lados del triángulo son lados exteriores de la figura, llevamos $2+2 = 4cm$ de perímetro. Ahora, veamos que el diámetro del círculo mide la mitad de $AB$, porque cabe dos veces; es decir, $1cm$ de diámetro. Aunque el círculo está partido en dos, se completa una circunferencia completa en el exterior; por la fórmula tenemos $3{,}14 \times 1cm = 3{,}14cm$. En total, el perímetro es $4 + 3{,}14 = 7{,}14cm$. La respuesta correcta es (a).

**Solución Problema 12.** Podemos contar cuántas maneras hay de colocar una pieza vertical y luego duplicarlo, por las piezas horizontales. En la primera columna hay 3 maneras, en la segunda manera solo 1 manera, igual que en la tercera columna, y otras 3 maneras en la última columna. Son $3 + 1 + 1 + 3 = 8$ maneras verticalmente; hay otras 8 maneras horizontalmente, 16 en total. La respuesta correcta es (d).

**Solución Problema 13.** Hagamos la lista completa de los números que cumplen, ordenados de menor a mayor: $12, 15, 21, 24, 33, 36, 42, 45, 51, 54, 63, 66$. Estos son todos los múltiplos cuyos dígitos son números entre 1 y 6 y son en total 12. La respuesta correcta es (d).

**Solución Problema 14.** Si hacemos un corte que pase exactamente por alguna de las aristas que ya tenemos, dividimos nuestro prisma en una pirámide y otro prisma. La pirámide tiene 4 caras mientras que el prisma tiene 5. La respuesta correcta es (c), 9 caras.

**Solución Problema 15.** Podemos ver que el ancho de cada rectángulo es el mismo que el del cuadradito. Además, podemos ver que 7 veces el ancho es igual a 2 veces el largo, de manera que el cuadradito cabe 7 veces en cada 2 rectángulos. Como tenemos 10 rectángulos, son 35 cuadraditos. Si sumamos el marcado de amarillo, son 36 cuadraditos de área en total. Como el área total es 5184, el área de cada cuadradito es $5184 \div 36 = 144$. Como $12 \times 12 = 144$, el lado de cada cuadradito mide $12cm$. Por lo tanto, el perímetro del cuadradito es $12 \times 4 = 48cm$. La respuesta correcta es (b).

## Walabi, primera etapa

**Solución Problema 1.** Ver solución de Koala, problema 5.

**Solución Problema 2.** Después de 1 giro, estamos sobre $B$. Como es un sacapuntas de 10 lados, cada 10 giros volvemos a estar sobre $A$. Luego, después de 1000 giros, estamos sobre $A$ de nuevo. Contamos $B, C, D, E, F, G, H$, siete giros. Después de 1007 giros, el sacapuntas está sobre el lado $H$.

**Solución Problema 3.** Ver solución de Koala, problema 7.

**Solución Problema 4.** Por definición, $x\,\% = \frac{x}{100}$. Luego, buscamos $x$ tal que

$$\frac{x}{100}x^2 = x$$

$$x^2 = 100$$

$$x = 10.$$

**Solución Problema 5.** Ver solución de Koala, problema 13.

**Solución Problema 6.** Como el área de las regiones blancas y negras es la misma, cada una ocupa $36 \div 2 = 18$ centímetros cuadrados de área. Como las franjas blancas aparecen de dos en dos y cada franja ocupa $1cm^2$ de área, debe haber $18 \div 2 = 9$ franjas blancas en total.

**Solución Problema 7.** Ver solución de Koala, problema 15.

**Solución Problema 8.** Ver solución de Koala, problema 12.

**Solución Problema 9.** Como Yareli giró 900 grados con la mirada, quiere decir que Daniela recorrió $900 \div 360 = 2{,}5$ vueltas completas, o 5 medios círculos. Los diámetros de cada medio círculo son $100, 200, 300, 400, 500$. Como la fórmula del perímetro es simplemente $\pi \times dimetro$, tenemos $\frac{\pi}{2}(100+200+300+400+500) = 750\pi \approx 750 \times 3{,}14 = 2355$ metros.

**Solución Problema 10.** Vamos a separar el problema en casos, según la decena a la que pertenecen: con decena 1 tenemos todos: $11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19$; con decena 2 tenemos $22, 24, 26, 28$; con decena 3 tenemos $33, 36, 39$; con decena 4 tenemos $42, 44, 46, 48$; con decena 5 tenemos únicamente 55; con decena 6 tenemos únicamente 66; con decena 7 tenemos únicamente 77; con decena 8 tenemos $84, 88$; y, por último, con decena 9 tenemos $93, 96, 99$. Hay que tener cuidado especial con $4, 8, 9$ porque los números al cuadrado sí ganan factores repetidos. En total son 28 números.

**Solución Problema 11.** Los factores de 2516 son $2, 2, 17, 37$. El problema dice que Yareli multiplicó dos números, así que hay que juntar estos factores en solo dos números. Eso nos deja los siguientes casos: $17 \times 2, 37 \times 2; 17 \times 4, 37; 17, 37 \times 4$, es decir, $(34, 74), (68, 37), (17, 148)$. Podemos eliminar 68 porque al voltearlo no nos da un número primo, y 148 porque no es un número de dos dígitos. Los números que multiplicó Yareli debieron haber sido 34 y 74. Los números que quería multiplicar Yareli son $43 \times 47 = 2021$.

**Solución Problema 12.** La base del triángulo $MBP$ es la mitad de la base del triángulo $DCP$. Para que tengan las mismas áreas, es necesario que la altura del triángulo $MBP$ sea el doble de la altura del triángulo $DCP$. Como sus alturas suman la longitud del cuadrado, la altura de $MBP$ debe ser dos tercios mientras que la altura de $DCP$ debe ser un tercio. Esta proporción se extiende hacia los lados $MP, PC$, porque forman una línea recta y pasan por $P$. Luego, $PC = \frac{1}{3}MC$, de modo que $\frac{MC}{PC} = 3$.

**Solución Problema 13.** Resolvemos este problema pensando de adelante hacia atrás. Si al final tienen la misma cantidad, cada una tiene $600ml$. Antes de esto, Ceci vació un tercio de su vaso en el vaso de Paty, es decir, $600ml$ representan dos tercios de lo que Ceci tenía antes. Ceci tenía $600ml \times \frac{3}{2} = 900ml$ después del primer paso, y Paty tenía $300ml$. Estos $300ml$ representan dos tercios de lo que Paty tenía originalmente, de modo que Paty inició con $300ml \times \frac{3}{2} = 450ml$ y Ceci con $1200 - 450 = 750ml$. Paty tenía $300ml$ menos que Ceci al inicio.

**Solución Problema 14.** Podemos hacer una lista ordenada, considerando denominadores a partir de 5. Dado que $\frac{4}{5} = 0{,}8$ y $\frac{5}{6} \approx 0{,}833$, buscamos una fracción entre esos dos valores.

Con denominador 5, el numerador tendría que ser mayor que 4, pero solo queda la opción $\frac{5}{5} = 1$ que no funciona. Con denominador 6, el numerador tendría que ser menor que 5, pero $\frac{4}{6} \approx 0{,}667$, que no funciona.

Con denominador 7 tenemos $\frac{5}{7} \approx 0{,}71$ pero $\frac{6}{7} \approx 0{,}857$, por lo que no es posible. Con denominador 8 tenemos $\frac{5}{8} = 0{,}652, \frac{6}{8} = 0{,}75, \frac{7}{8} = 0{,}875$, por lo que tampoco es posible.

Con denominador 9 tenemos $\frac{7}{9} \approx 0{,}778$ pero $\frac{8}{9} \approx 0{,}889$, por lo que tampoco es posible. Con denominador 10 tenemos $\frac{8}{10} = 0{,}8$ pero $\frac{9}{10} = 0{,}9$, por lo que tampoco funciona.

Veamos por último que $\frac{9}{11} \approx 0{,}8181$, que sí funciona. Como hemos descartado todos los denominadores menores, esta debe ser nuestra respuesta.

**Solución alternativa.** Es un resultado conocido que dos fracciones $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ tales que $ad-bc = 1$ cumplen que la fracción con el menor denominador entre ellas es la que tiene denominador $b+d$, numerador $a+c$. En este caso, vemos que $5\times5-4\times6 = 25-24 = 1$, entonces la fracción entre ellas con el menor denominador es $5+6 = 11$ y su numerador es $4 + 5 = 9$, que coincide con lo que encontramos.

**Solución Problema 15.** Como $AB = AD$, el triángulo $ABD$ es isósceles. Como $CB = CD$, entonces el triángulo $CBD$ también es isósceles. El cuadrilátero $ABCD$ es entonces un papalote (deltoide) y sabemos que una de sus diagonales (en este caso, $AC$) es mediatriz de la otra (en este caso, $BD$). Luego, $PB = PD$ y, como $BPD$ es isósceles, entonces $\angle BPC = \angle CPD$.

Usando que $BP \parallel CE$, tenemos que $\angle BPC = \angle PCE$ por alternos internos. Esto nos dice que $\angle PCE = \angle CPE$, de donde $CEP$ es un triángulo isósceles con $CE = EP$.

Por último, $DE = DP - EP = BP - cE = 250 - 177 = 73$.

# Canguro, primera etapa

**Solución Problema 1.** Podemos factorizar la expresión como

$$2^{10}(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{10}) = 2^{10}(2^{11} - 1) = 1024(2047)$$

Por último, factorizamos $2047 = 23\times89$, de donde el mayor factor primo es precisamente 89.

**Solución Problema 2.** Ver solución de Walabi, problema 13.

**Solución Problema 3.** Vamos a considerar los triángulos $ADB$ y $ADF$. Para nuestra fortuna, ambos triángulos son isósceles, pues $AD = DB$ por ser diagonales del pentágono regular, y $AD = DF$ por construcción. Recordando que los ángulos interiores de un pentágono regular miden 108°, podemos calcular que cada uno de los ángulos $\angle EDA, \angle ADB, \angle BDC$ valen 36° con ayuda de isósceles como $EDA$. Como $\angle BDF = 60°$ porque $BDF$ es equilátero, tenemos que $\angle FAB = \angle DAB - \angle DAF$.

Sabiendo que $ADB$ es isósceles y que $\angle ADB = 36°$, tenemos que

$$\angle DAB = \frac{180 - 36}{2} = 72.$$

Sabiendo que $ADF$ es isósceles y que $\angle ADF = 36 + 60 = 96$, tenemos que

$$\angle DAF = \frac{180 - 96}{2} = 42.$$

Juntando todo lo anterior, concluimos que $\angle FAB = 72 - 42 = 30°$.

**Solución Problema 4.** Si imaginamos que Luis y Mane están parados sobre la misma recta, de espaldas al sol, las rectas imaginarias desde la parte más alta de sus cabezas hasta el punto más alejado de sus sombras son paralelas. Esto es porque las configuraciones persona-sombra-línea imaginaria forman triángulos semejantes. Luego, por Thales, tenemos que sus alturas y sus sombras forman una proporción constante, es decir, por cada centímetro adicional de altura, podemos encontrar $x$ centímetros adicionales de sombra.

En específico, como Mane mide $6cm$ más que Luis y su sombra mide $511 - 415 = 96$ centímetros, tenemos que por cada centímetro extra de altura hay $96 \div 6 = 16$ centímetros más de sombra. Como Jacsan mide $10cm$ menos que Luis, debería tener $160cm$ menos de sombra, es decir $4{,}15 - 1{,}60 = 255$ centímetros.

**Solución Problema 5.** Ver solución de Walabi, problema 15.

**Solución Problema 6.** Los números que buscamos son producto de primos, sin que ninguno se repita. Vamos a hacer la lista, según el menor primo en la lista y la cantidad de primos.

1. El menor es 2, hay solo 2 primos. Tenemos desde $2\times3$ hasta $2\times47$, son 14 números en este caso.

2. El menor es 2, hay 3 primos. Tenemos desde $2 \times 3 \times 5$ hasta $2 \times 3 \times 13$, luego $2\times5\times7$ y nada más. Son $4+1 = 5$ números en este caso. Como $2\times3\times5\times7 > 100$, no habrá casos de 4 o más primos.

3. El menor es 3. Tenemos desde $3 \times 5$ hasta $3 \times 31$, son 9 números en este caso. Como $3 \times 5 \times 7 > 100$, no hay ya casos de 3 o más primos.

4. El menor es 5. Tenemos desde $5 \times 7$ hasta $5 \times 19$, son 5 números en este caso.

5. Los que faltan son únicamente: $7 \times 11$, $7 \times 13$. Si los dos primos son mayores que 10, su producto será mayor que 100, por lo que no hay más.

En total son $14 + 5 + 9 + 5 + 2 = 35$ números que cumplen lo que nos pide el problema.

**Solución Problema 7.** Nota: "algunos" podría significar uno solo, es decir, si hay un múltiplo de 11 en el conjunto, se cumple la condición de que *algunos de ellos* sumen un múltiplo de 11.

No podemos tener dos de la misma congruencia módulo 11 ni alguno con congruencia 0. Luego, tenemos las casillas $1, 10, 2, 9, 3, 8, 4, 7, 5, 6, 0$. Por Principio de Casillas, si tenemos al menos 6 números, habría dos en la misma casilla (o al menos uno en la casilla 0. Luego, el menor valor posible de $n$ que cumple esto es 6.

**Solución Problema 8.** Dado que Nájera llenó toda quiniela posible, las quinielas se pueden emparejar de manera que una sea la contraria de la otra. Luego, cada pareja de quinielas de esta manera tienen 6 aciertos (porque alguna de las dos debió haber acertado en cada partido), que nos da un promedio de 3 por pareja. Como hay una cantidad entera de parejas y cada una promedia 3, el promedio de todas es también 3.

**Solución Problema 9.** Si completamos el cono el triángulo de base 6 (radio grande) es semejante al triángulo de base 3 y por tanto están en razón 2:1. Por tanto, si la altura del vaso es $h$, la altura del cono es $2h$. Así que tenemos la siguiente cadena de ecuaciones que expresan el volumen del vaso como la resta entre el cono grande y el cono de la mitad de altura (omitimos las unidades que son cm$^3$):

$$\begin{aligned} 150\pi &= \frac{\pi(6)^2(2h)}{3} - \frac{\pi(3)^2 h}{3} \\ &= \frac{\pi h}{3}(36 \cdot 2 - 9) \\ &= 21h\pi. \end{aligned}$$

Por lo tanto $h = \frac{50}{7}$.

Una vez más, por semejanza el vaso lleno hasta la mitad tiene un radio de 4,5cm (en su límite superior). Y podemos calcular el volumen deseado como la resta de ese cono con base de radio 4,5 (y altura $\frac{3}{2}h$), menos el volumen del cono de base con radio 3 (y altura $h$).

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi(4{,}5)^2\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{50}{7}\right)}{3} - \frac{\pi(3)^2\left(\frac{50}{7}\right)}{3} \\ &= \pi\left(\frac{20{,}25 \cdot 25}{7} - \frac{150}{7}\right) \\ &= \frac{506{,}25 - 150}{7}\pi \\ &= 159{,}80. \end{aligned}$$

Así, $V = 159$.

**Solución Problema 10.** Ver solución de Walabi, problema 12.

**Solución Problema 11.** Ver solución de Walabi, problema 14.

**Solución Problema 12.** Ver solución de Walabi, problema 10.

**Solución Problema 13.** Considerando las 2 semanas que Chiqui deja descansar la tierra, podemos considerar los ciclos de 15, 10 y 5 semanas. Luego, las semanas en las que cosecha maíz son $13, 28, 43$, las semanas en las que cosecha zanahora son $8, 18, 28, 38, 48$ y las semanas en las que cosecha lechuga son $3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48$. Vemos que en total son 10 semanas distintas en las que tiene algo para cosechar, por lo que son 42 semanas en las que no tiene nada que cosechar.

**Solución Problema 14.** Necesitamos primero llegar de $A$ al cudrito sombreado y luego llegar del cuadrito sombreado a $B$. Es fácil contar los caminos en cada caso, hay 4 caminos para la primera parte y 5 caminos para la segunda parte, pues basta contar las opciones que tiene para cambiar de dirección. Por último, como hay que realizar ambas acciones una después de otra, son $4 \times 5 = 20$ recorridos distintos que cumplen lo que pide el problema.

**Solución Problema 15.** Estudiamos el ciclo de los últimos dígitos de las potencias de $4: 4, 6$. Ahora, estudiamos los valores de los últimos dígitos de $n^2 + n$ para los valores de $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. En orden, obtenemos $0, 2, 6, 2, 0, 0, 2, 6, 2, 0$, de modo que los números terminados en 2 y los números terminados en 7 son opciones. Sin embargo, el último dígito 6 en potencias de 4 solo se obtiene con potencias pares, así que solo los números terminados en 2 funcionan. Como hay uno cada decena y hay 100 decenas en los números del 1 al 1000, tenemos 100 números que cumplen la condición.

# Uombat, primera etapa

**Solución Problema 1.** Los árboles pueden estar acomodados ocupando una fila, una columna o una diagonal mayor del cuadrado. El árbol especial de limones y limas puede colocarse en cualquier lugar del cuadrado y determina lo demás. Si se pone en cualquiera de los cuatro cuadritos centrales o los cuatro cuadritos de las esquinas, hay tres intersecciones distintas (fila-columna, fila-diagonal, diagonal-columna) y dos maneras de elegir los árboles (limones o limas), por lo que son $8 \times 3 \times 2 = 48$ acomodos para este caso. Si pone el árbol especial en cualquiera de los cuadritos restantes, solo hay una intersección posible (fila-columna), las mismas dos maneras de elegir los árboles (limones o limas) por lo que son $8 \times 1 \times 2 = 16$ acomodos para este caso.

En total, tenemos $48 + 16 = 64$ maneras distintas en que Yareli puede plantar su jardín.

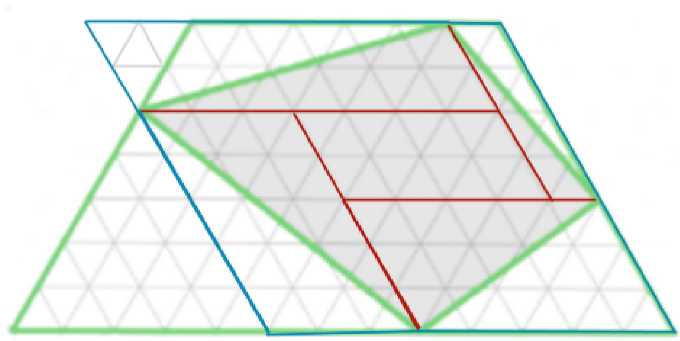
**Solución Problema 2.** Ver solución de Canguro, problema 1.

**Solución Problema 3.** Buscamos dos números, uno de ellos de dos dígitos, tal que su suma es 200. Si nuestro primer número es $x$, el segundo debe ser $200 - x$. Como no hay condiciones para el segundo número, pero hay una pareja para cada número de dos dígitos posibles, entonces hay 90 parejas que cumplen lo que pide el problema.

**Solución Problema 4.** Ver solución de Canguro, problema 3.

**Solución Problema 5.** Ver solución de Canguro, problema 4.

**Solución Problema 6.** Hacemos los siguientes trazos para contar triangulitos.



El triángulo sombreado superior izquierdo, tiene área $\frac{28}{2} = 14$, pues es la mitad de un paralelogramo de 28 triángulos. Similarmente, el triángulo superior derecho tiene área $\frac{8}{2} = 4$. El inferior derecho tiene área $\frac{30}{2} = 15$. El inferior izquierdo tiene área $\frac{30}{2} = 15$. Y por último, el paralelogramo sombreado en el centro está compuesto por 16 triangulitos de área 1. Por lo tanto, el área sombreada es igual al siguiente resultado

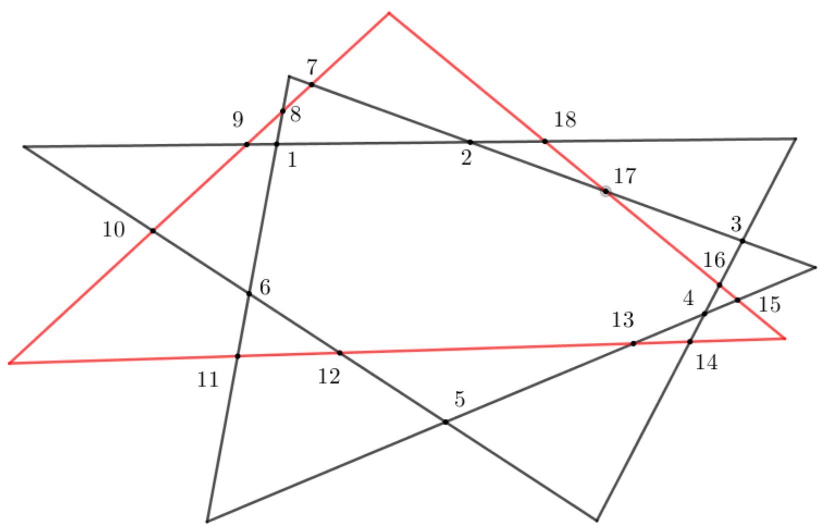
$$14 + 4 + 15 + 15 + 16 = 64.$$

**Solución Problema 7.** Ver solución de Canguro, problema 9.

**Solución Problema 8.** Ver solución de Canguro, problema 8.

**Solución Problema 9.** Observemos que ninguna de las opciones lleva una consonante, así que esa regla no es relevante. Sin embargo, varias opciones tienen un número impar, por lo que deberían estar acompañadas de una consonante; como no hay consonantes, ninguna de $A3, O5, I9, 3A, 9I, 5O$ son opciones válidas. Todas las demás $(E2, U8, 2E, 8U)$ sí lo son. Hay 4 combinaciones válidas entre las opciones.

**Solución Problema 10.** No es posible que un lado de un triángulo intersecte los tres lados de otro triángulo (podría intersectar sus prolongaciones, pero no los segmentos). Luego, nuestra esperanza es que cada lado de cada triángulo intersecte a dos lados de cada uno de los otros triángulos. La siguiente figura muestra que es de hecho posible:




De modo que la respuesta es 18.

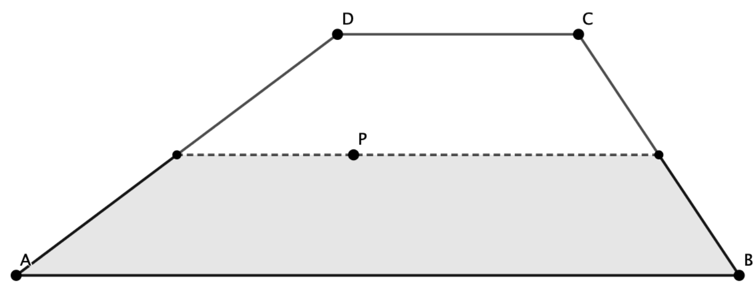
**Solución Problema 11.** Usando la fórmula del área del trapecio, tenemos que

$$\frac{(AB + CD) \times h}{2} = \frac{(18 + 6) \times h}{2} = 72$$

de donde $h = \frac{72 \times 2}{24} = 6$.

Usando $AB$ como base del triángulo $ABP$, para que el área sea mayor que 27, su altura tendría que ser mayor que $\frac{27 \times 2}{18} = 3$. Cualquier punto $P$ a distancia mayor que 3 de la base $AB$ formaría un triángulo $ABP$ de área mayor que 27. Como la altura del trapecio es 6, la recta a distancia 3 de la base mayor es la recta media. Es un hecho conocido que este segmento mide el promedio de las bases: $\frac{18+6}{2} = 12$.

Por último, la región que cumple forma un trapecio con altura 3, base mayor 12 y base menor 6, es decir, tiene un área de $\frac{(6+12)\times 3}{2} = 27$. Como el área del trapecio original es 72, la probabilidad de que nuestro punto $P$ cumpla lo deseado es $\frac{27}{72} = \frac{3}{8}$. La respuesta es $3 + 8 = 11$.




**Solución Problema 12.** Para que Coco gane una ronda, la cantidad de divisores debe ser un número de la forma $4k + 3$, pues Coco es la tercera en rondas de 4. Como en particular es un número impar, sabemos que únicamente los cuadrados perfectos tienen una cantidad impar de divisores. Por lo tanto, tenemos que estudiar únicamente los números $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81$. Cada uno de estos números tiene, en el mismo orden, $1, 3, 3, 5, 3, 9, 3, 7, 5$, donde solo 3 y 7 son de la forma $4k + 3$.

Los números con los que ganó Coco son $4, 9, 25, 49, 64$, y son 5 en total.

**Solución Problema 13.** Como hay 4 cuadrados positivos menores que $b$, podemos deducir que $16 < b \leq 25$. Como $16 = 4 \times 4$, entonces $4 \leq a$. Resolvemos el problema separando en casos.

Si $a = 4$, tenemos que $16 < b \leq 20$, así que son 4 parejas. Si $a = 5$, tenemos que $20 < b \leq 25$, así que son 5 parejas. Si $a = 6$, tenemos que $24 < b \leq 25$, así que es 1 pareja. No hay valores posibles si $a > 6$, pues necesitaríamos $b > 28$.

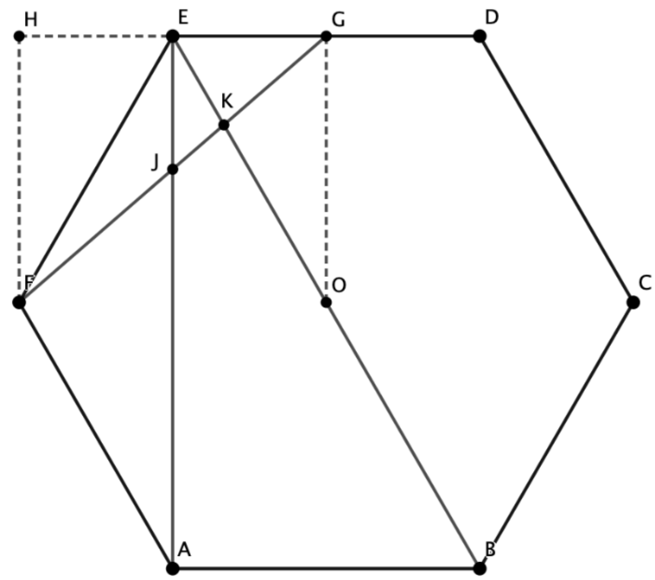
Concluimos que hay $4 + 5 + 1 = 10$ parejas que cumplen lo que pide el problema.

**Solución Problema 14.** Independientemente de la ubicación de los dos cuadritos pintados, podemos asegurar que hay filas y columnas enteras sin pintar. Es decir, podemos garantizar algún rectángulo con una de sus dimensiones igual a 14. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que tomamos la dimensión horizontal como la más grande.

Ahora, veamos que el espacio vertical está compuesto de 14 filas, a lo más 2 de las cuales están ocupadas, quedando al menos 12 vacías, divididas en 3 intervalos. Por Casillas, siempre es posible asegurar que alguno de los intervalos mide al menos 4. Luego, podemos garantizar la segunda dimensión como mayor o igual a 4.

Concluimos que siempre podemos asegurar que existe un rectángulo con $14 \times 4 = 56$ cuadritos blancos dentro de él, sin cuadritos negros.

**Solución Problema 15.** Vamos a medir la figura en función de medidas importantes en el hexágono. Para ello, hagamos los siguientes trazos adicionales con la siguiente figura como referencia:




Dado que $FH, EJ, GO$ son paralelas, tenemos varios triángulos semejantes. Por la semejanza entre $\triangle EJG$ y $\triangle HFG$ que está en razón $EG : HG = 1 : 2$, podemos deducir que $EJ = \frac{1}{2}a$, donde $a$ es la apotema del hexágono. Luego, tenemos la semejanza entre $\triangle EJK$ y $\triangle OGK$ que también está en razón $EJ : OG = 1 : 2$. Como $EG = \frac{1}{2}l$, donde $l$ es el lado del hexágono, podemos deducir que la altura de $\triangle EKJ = \frac{1}{3}\frac{1}{2}l = \frac{1}{6}l$.

Con todo lo anterior, tenemos que el área del triángulo verde se puede calcular como

$$x = \frac{\frac{a}{2} \times \frac{l}{6}}{2} = \frac{al}{24}$$

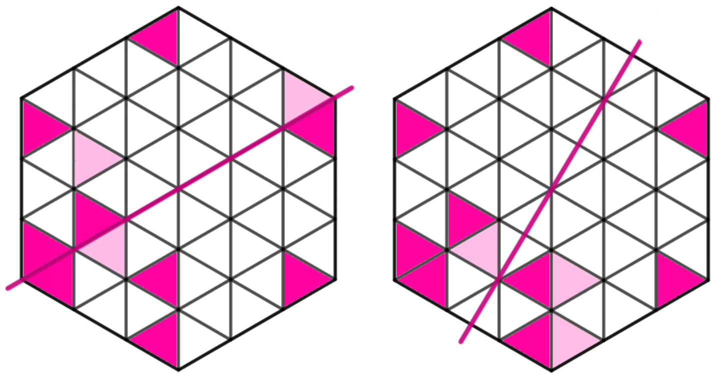
. Como el área de todo el hexágono es $\frac{6al}{2} = 3al = 1$, concluimos que $x = \frac{1}{72}$, por lo que $\frac{1}{x} = 72$.

# Cuyo, etapa final

**Solución Problema 1.** Ernesto iba en lugar 20 pero luego rebasó a 7 personas. Por cada persona que rebasa mejora una posición, así que Ernesto debe estar ahora en lugar 13. Similarmente, por cada persona que la rebasa, Kapioma baja una posición; si estaba en primer lugar y la rebasaron 5 personas, ahora debe estar en lugar 6. Para que Ernesto rebase a Kapioma, debe rebasar a las personas actualmente en posición $12, 11, 10, 9, 8, 7$ y, finalmente, a Kapioma misma en lugar 6. Es decir, Ernesto tiene que rebasar al menos a 7 personas para ponerse delante de Kapioma.

**Solución Problema 2.** Podemos simplemente dibujar la parte del tablero que falta y contar los cuadritos morados ocultos. De arriba hacia abajo, por fila, podemos contar $1 + 1 + 2 + 2 + 4 = 10$ cuadritos morados en la región sombreada.

**Solución Problema 3.** La menor cantidad son 3 triangulitos. Las siguientes dos configuraciones muestran un caso posible:



**Solución Problema 4.** Cuando el sargento dijo 7, debieron haberse ordenado en 7 filas. El problema dice que había 6 soldados por fila más 3, que nos da un total de $7 \times 6 + 3 = 45$ soldados.

Si ahora el sargento dice 8, sabiendo que $45 = 40 + 5 = 8 \times 5 + 5$, podemos saber que hay 5 soldados en cada fila más 5 soldados que no encontraron fila.

**Solución Problema 5.** Una tabla podría ayudarnos a visualizar de manera más sencilla este problema. En la primera colocamos a cada persona, buscamos que coincida con la columna del regalo que se llevó. Primero: sabemos que nadie se llevó su propio regalo, que Anita no se llevó el de Daniela y que Carla se llevó el de Beatriz. Dado que nadie más pudo haberse llevado el de Beatriz, podemos llenar la tabla así:

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| A | × | × | | × |
| B | | × | | |
| C | | ✓ | × | |
| D | | × | | × |

Podemos ver entonces que Anita no se llevó el suyo, no se llevó el de Daniela (por problema) y no se llevó el de Beatriz (porque se lo llevó Carla). La única posibilidad es que Anita se haya llevado el regalo de Carla. Actualizamos la tabla:

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| A | × | × | ✓ | × |
| B | | × | × | |
| C | | ✓ | × | |
| D | | × | × | × |

Daniela no se llevó el de Beatriz (porque se lo llevó Carla), no se llevó el de Carla (porque se lo llevó Anita) y no se pudo llevar el suyo. La única posibilidad es que se haya llevado el de Anita.

**Solución Problema 6.** Astro ha pintado 50 casas en total. En ese tiempo, Berto ha pintado únicamente 25 casas. Cada impar viene antes que el par, el impar número 25 viene antes que el par número 25, que es $25 \times 2 = 50$. La última casa que pintó Berto es la número 49.

**Solución Problema 7.** El menor número que no se puede obtener de esta manera es 1. La única manera de obtener 1 es $1 \times 1$ pero Germán solo tiene un número 1.

**Solución Problema 8.** Podemos ver que la secuencia tiene un número 4 cada tres posiciones, y los otros dos números van bajando de 4 en 4, formando tercias. Los números al inicio de cada tercia son $97, 97, 89, 81, 73, 65, 57, 49, 41, 33, 25, 17, 9$ y hacemos el resto: $9, 5, 4, 1, 3, 2, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0$ y se repite. Podemos ver que los 0s solo ocurren en los números múltiplos de 3. Como 2021 no es múltiplo de 3, entonces el número en esa posición es 1.

**Solución Problema 9.** El payaso tiene 4 pelucas, 5 globos y 5 zapatos. Tenemos que contar tres casos: cuando peluca y globo son del mismo color, cuando globo y zapato son del mismo color y cuando zapato y peluca son del mismo color.

Peluca y globo. Hay tres opciones del mismo color (azul, café, dorado). El tercer accesorio, zapatos, tiene que ser de un color distinto: si escoge azul, puede ser café, rojo, verde o amarillo (4); si escoge café, puede ser azul, rojo, verde o amarillo (4); y si escoge dorado puede ser azul, café, rojo, verde o amarillo (5). Hay 13 maneras en este caso.

Globo y zapatos. Hay cuatro opciones del mismo color (azul, café, rojo y verde). El tercer accesorio, peluca, tiene que ser de un color distinto: si escoge azul, puede ser blanco, café o dorado (3); si escoge café, puede ser azul, blanco o dorado (3); si escoge rojo, puede ser azul, blanco, café o dorado (4); y si escoge verde, puede ser azul, blanco, café o dorado (4). Hay 14 maneras en este caso.

Zapatos y peluca. Hay dos opciones del mismo color (azul y café). El tercer accesorio, globo, tiene que ser de un color distinto: si escoge azul, puede ser café, dorado, rojo o verde (4); y si escoge café puede ser azul, dorado, rojo o verde (4). Hay 8 maneras en este caso.

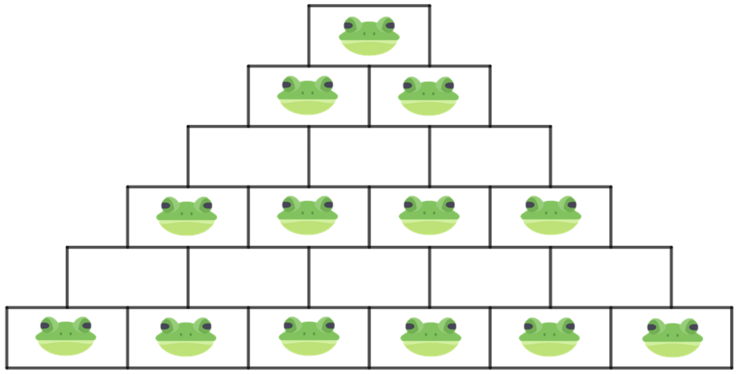
En total, el payaso tiene $13 + 14 + 8 = 35$ maneras de vestirse de manera que dos de sus accesorios sean del mismo color.

**Solución Problema 10.** Hagamos los primeros casos: $1 + 2 + 3 = 6, 4 + 5 + 6 = 15, 7+8+9 = 24, 10+11+12 = 33, 13+14+15 = 42, 16+17+18 = 51, 19+20+21 = 60$. Hay dos cosas que podemos observar: (1) los resultados de cada suma aumentan de 9 en 9; (2) hay un múltiplo de 4 cada cuatro números, en la tercera posición del ciclo.

Esta es suficiente información para tratar de generalizar: en 674 números hay $674 \div 4 = 168$ grupos de 4 números, y sobran 2. Como el múltiplo de 4 es el tercer número, entonces hay solo 168 múltiplos de 4 en la tarea de Chocoreta.

**Solución Problema 11.** El mayor entero positivo que no tiene dígitos repetidos ni dígitos iguales a 0 es 987654321. Si multiplicamos sus dígitos, obtenemos 362880. Si volvemos a multiplicar sus dígitos, obtenemos 0. Este es el número que obtuvo Berenice al final.

**Solución Problema 12.** La mayor cantidad es 13 ranitas. La siguiente figura muestra el acomodo:



**Solución Problema 13.** Veamos que $375 = 3 \times 5 \times 5 \times 5$. Para obtener un 0 al final, necesitamos un $2 \times 5$. Como queremos cuatro 0s al final, necesitamos cuatro $\times 2$ y cuatro $\times 5$. Como ya tenemos tres $\times 5$, lo que nos falta es $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 40$.

**Solución Problema 14.** Hay dos números que cumplen lo que queremos: 2020 y 1210. Podemos razonar de la siguiente manera: no puede haber de los 4 dígitos y no puede haber 3 de ningún dígito. Por lo tanto, tampoco hay 3. Los dígitos del número deben sumar 4, así que debe haber al menos un dígito 2, y sabemos que el primer dígito es al menos 1.

**Solución Problema 15.** **Koala, etapa final**

**Solución Problema 1.** Ver solución Cuyo, problema 3.

**Solución Problema 2.** Ver solución Cuyo, problema 10.

**Solución Problema 3.** Ver solución Cuyo, problema 13.

**Solución Problema 4.** Como $YZ = 60cm$ y es parte del segmento $XZ = 80cm$, podemos deducir que $XY = 20cm$. Como $XY$ mide lo mismo que dos diámetros de las circunferencias pequeñas, entonces cada diámetro mide $10cm$. Por último, tenemos que $YZ = 60 - 10 = 50cm$.

**Solución Problema 5.** Para que en la multiplicación tengamos un dígito 0, la manera más simple es un múltiplo de 10, lo que implica un factor 2 y un factor 5. Hay 4 dígitos distintos de 0 que tienen un factor 2 y solo uno que tiene un factor 5, por lo que es mejor sacrificar el 5. Verifiquemos que el producto de los dígitos de 98764321 no tiene ceros: $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 72576$. Por lo tanto, este es el número que escribió Yareli.

Sin embargo, al multiplicar $7 \times 2 \times 5 \times 7 \times 6 = 0$ obtenemos un cero. Este es el número que Yareli obtuvo al final.

**Solución Problema 6.** Los dígitos que siguen siendo un dígito al reflejar son pocos: 1 que es 1, 2 que es 5 y 5 que es 2, y 8 que es 8, dado que no podemos usar el 0. Luego, cualquier combinación de dos de estos cuatro dígitos debería ser un número válido de dos dígitos: tenemos $4 \times 4 = 16$ playeras posibles.

**Solución Problema 7.** Ver solución Cuyo, problema 14. Como los dos números que cumplen son 2020 y 1210, la suma que buscamos es 3230.

**Solución Problema 8.** Tratemos de identificar cuántos puntos y cruces hay en cada renglón: en el primer renglón hay 2 puntos, en cada renglón siguiente hay 4, excepto el último, donde hay uno más que el número de "ladrillos". Con respecto a las cruces, podemos ver que primero hay 1, luego 3, luego seguirían 5 y es la sucesión de los impares.

Veamos que $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19 = 100$, por lo que necesitamos 10 renglones con cruces y dos más con puntos. En los 10 renglones de puntos y cruces hay 4 puntos en cada uno, llevamos $4 \times 10 = 40$ puntos. En el renglón de hasta arriba hay otros 2 puntos. Si tenemos 10 renglones con cruces, se necesitan 11 niveles de "ladrillos", por lo que el último nivel tiene 11 "ladrillos" y 12 puntos. En total son $40 + 2 + 12 = 54$ puntos.

**Solución Problema 9.** Vamos a encontrar una manera de obtener 50 puntos y trabajar desde ahí. Si los Totoros hubieran ganado todos sus partidos, habrían obtenido $21 \times 3 = 63$ puntos. Necesitamos restar 13 puntos; cada derrota resta 3 puntos y 13 no es múltiplo de 3, así que necesitamos empates; como solo tenemos victorias, cambiar una victoria por un empate resta 2 puntos: $13 - 2 = 11; 11 - 2 = 9$. Tenemos la primera tercia: $(16, 2, 3)$.

Esta es la tercia con el mayor número de victorias. Podemos cambiar una victoria por una derrota $(-3)$ y luego recuperar esos puntos cambiando tres derrotas por empates $(+3)$. Tenemos la tercia $(15, 5, 1)$.

Observemos que si tenemos 14 victorias tenemos $14 \times 3 = 42$ puntos, pero solo 6 partidos, por lo que no podemos sumar los 8 puntos que faltan. Con menos victorias ocurre algo similar, por lo que podemos concluir que no hay más tercias.

**Solución Problema 10.** Hay distintas cantidades de estudiantes que cada quien puede saludar, según su posición en el salón. Utilizaremos los colores del siguiente tablero:

**Solución Problema 11.** Cuando el dígito distinto de 3 es el primero, tenemos solo 8 opciones pues no puede ser 0 ni 3. Si el dígito distinto de 3 es cualquiera de los otros cuatro, entonces tenemos 9 opciones, pues sí puede ser 0 pero no 3. Tenemos en total $8 + 9 + 9 + 9 + 9 = 44$ números.

**Solución Problema 12.** Ver solución Cuyo, problema 15.

**Solución Problema 13.** Hay en total $4 \times 3 = 12$ números distintos que pudo haber escrito Yareli. Son los números $12, 13, 14,\ 21, 23, 24,\ 31, 32, 34,\ 41, 42, 43$, en orden. Hagamos una segunda lista de cuántos números son menores que cada uno de los números en la lista de Yareli: $0, 1, 2, 3,\ 4, 5, 6, 7,\ 8, 9, 10, 11$. Luego, hay en total $1 + 2 + \cdots + 11 = \frac{11(12)}{2} = 66$ casos en los que el número de Yareli es mayor que el número de Montse.

**Solución Problema 14.** Como nuestras reglan dependen de los múltiplos de 5 y múltiplos de 6, podemos hacer el patrón para los primeros $5 \times 6 = 30$ números y solo multiplicar por 4, porque $30 \times 4 = 120$. La siguiente tabla muestra los colores de los primeros 30 números:

Podemos concluir que en total hay $XXX$ números pintados de azul.

**Solución Problema 15.** La figura es un polígono de 7 lados, por lo que la suma de sus ángulos interiores debe ser $180(7-2) = 900$ grados. Tenemos valores de cinco de los ángulos $(90 + 30 + 50 + 80 + 70 = 320)$ y solo faltan los dos que son opuestos a los verdes, que deben sumar el resto $(900 - 320 = 580)$. Para concluir, veamos que estos dos ángulos, más los verdes, deben sumar $360 \times 2 = 720$. Por lo tanto, los dos verdes suman $720 - 580 = 140$ grados.

## Walabi, etapa final

**Solución Problema 1.** Ver solución Koala, problema 8.

**Solución Problema 2.** Cuando trabajamos con hexágonos regulares, una de las unidades más útiles es dividir el área en triángulos equiláteros, pues cada hexágono se parte en seis triangulitos equiláteros y hexágonos congruentes crean triángulos congruentes. Entre los siete hexágonos de la figura tenemos $7 \times 6 = 42$ triangulitos.

Veamos que hay dos tipos de triángulos en la orilla: pequeños (en las esquinas) y grandes (en las orillas); hay 6 pequeños y 6 grandes. Veamos que cada 3 pequeños forman 1 equilátero y cada grandes forman un equilátero. Luego, tenemos $2 + 6 = 8$ equiláteros más.

En total, tenemos que el hexágono grande está formado por $42+8 = 50$ triangulitos, así que cada uno tiene área $900 \div 50 = 18$. El área sombreada está formado por $6 \times 6 = 36$ triangulitos, por lo que tienen área de $36 \times 18 = 648$.

**Solución Problema 3.** Las afirmaciones de Ángela y Beatriz son contradictorias, así que una de las dos está mintiendo. Como solo hay una persona que miente, todas las demás deben estar diciendo la verdad. Eso incluye a Daniela, quien afirma que Beatriz no está mintiendo. Por lo tanto, la impostora es Ángela.

**Solución Problema 4.** Ver solución Koala, problema 4.

**Solución Problema 5.** Por el mínimo diario, Daniela debió haber ahorrado $10 + 11 + 12 + ... + 40 = 765$ pesos. Cada día que ahorra 20 más que el día anterior, el mínimo aumenta para todos los días siguientes; obtenemos una cantidad menor si esto ocurrió en los últimos 20 días del mes. Tenemos entonces $19 + 38 + 57 + ... + 380 = 3990$ pesos más. Por lo tanto, el mínimo que Daniela tendrá ahorrado el 30 de septiembre es $765 + 3990 = 4755$ pesos.

**Solución Problema 6.** Ver solución Koala, problema 8.

**Solución Problema 7.** En siete números consecutivos siempre hay al menos dos mútiplso de 2, dos múltiplos de 3, un múltiplo de 4, uno de 5 y uno de 7. Luego, su producto siempre es múltiplo de al menos $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 4 \times 5 \times 7 = 5040$. Como no es posible asegurar ningún otro factor en este intervalo, este es el máximo común divisor de todos los números sietados.

**Solución Problema 8.** Ver solución Koala, problema 10.

**Solución Problema 9.** Tiene que pintar todos los diamantes de negro y todos los tréboles de negro; el hecho de que alternen diamante-trébol no afecta el resultado. Para elegir el orden de los diamantes hay 9! maneras; para elegir el orden de los tréboles hay 8!. En conjunto, hay 9!8! maneras en que Mane puede hacer lo que quiere.

**Solución Problema 10.** Tenemos la pareja $(12, 96)$ y buscamos valores $(12, y, 96)$ tales que $y$ sea divisible entre 12 y divisor de 96, distinto de ambos. Hay dos valores posibles: $y = 24, 48$. Como buscamos que los valores de la pareja terminal tengan la suma mayor, queremos que sean mayores, por lo que nos quedamos con la pareja $(48, 96)$ en donde "termina". El valor que buscamos es $48 + 96 = 144$.

(Otras opciones de "terminaciones" son $(12, 24)$. La pareja $(24, 96)$ también "termina" en $(48, 96)$.

**Solución Problema 11.** Podemos hacer las sumas parciales hasta encontrar el primer valor mayor a 1000. Esta es la sucesión de sumas parciales:

$$1, -1, 3, -5, 11, -21, 43, -85, 171, -341, 683, -1365, 2731.$$

Encontramos el valor deseado con $n = 12$.

**Solución Problema 12.** Veamos que no hay dos o más monedas que puedan sumar un valor mayor. Esto es porque cada moneda suma más que todas las anteriores: $1, 3, 8, 18, 38, 88$. Sabiendo eso, entonces las combinaciones dependen únicamente de si cada moneda está o no está en el conjunto, es decir, $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 128$ combinaciones distintas, que incluyen 0 como una opción.

**Solución Problema 13.** Vamos a denotar las cuatro direcciones por $A, B, C, D$. Supongamos que la primera combinación escrita es $ABCD$. La siguiente combinación debe empezar con $CD$ y contener $AB$, por lo que las dos opciones son $CDAB, CDBA$. De hecho, solo podemos usar combinaciones donde la primera pareja es $A, B$ o $C, D$ y la segunda pareja son los otros dos; son 8 cuartetas posibles:

$$ABCD, ABDC, BACD, BADC, CDAB, CDBA, DCAB, DCBA.$$

El siguiente es un código que contiene las 8 cuartetas, por lo que debe tener longitud máxima de 18:

$$ABCDBADCABDCBACD.$$

**Solución Problema 14.** La resta de dos números es un múltiplo de 10 si ambos números terminan en el mismo último dígito (dígito de las unidades). Suponiendo que ninguno de $m, n$ es 1, tanto $m^{2^n}$ como $n^{2^m}$ serían cuartas potencias. Las terminaciones de las cuartas potencias o sus residuos módulo 10 son $0, 1, 5, 6$. Luego, si tenemos 5 enteros cualesquiera, incluso si alguno de ellos es el 1, necesariamente habrá dos que, al realizar el procedimiento, tendrían el mismo dígito de las unidades. El valor de $a$ que buscamos es 5.

**Solución Problema 15.** La figura muestra un polígono de 9 lados, por lo que la suma de sus ángulos interiores debe ser $180(9 - 2) = 1260$ grados. La suma de los ángulos visibles es $90 + 10 + 20 + 30 + 40 + 70 = 260$, por lo que los tres faltantes deben sumar $1260 - 260 = 1000$ grados. Los tres ángulos que faltan, al sumarlos a los ángulos marcados en verde, suman $360 \times 3 = 1080$ grados, por lo que los tres verdes deben sumar 80 grados.

## Canguro, etapa final

**Solución Problema 1.** Ver solución Walabi, problema 3.

**Solución Problema 2.** Bajamos una perpendicular desde $A$ hacia $BC$. Como es equilátero, y como $XZ$ es paralelo a la base, esta perpendicular pasa por el punto medio de $XY$, digamos $M$, y cae en el punto medio de $BC$, digamos $N$. Tenemos entonces que $MZ = 21 - 4 = 17$, por lo que $NW = 17$ también, porque es un rectángulo. Como $CW = 7$, entonces $NC = 10$. Como $ANC$ es medio equilátero, entonces $AC = BC = AB = 20$.

**Solución Problema 3.** Ver solución Walabi, problema 5.

**Solución Problema 4.** Ver solución Walabi, problema 7.

**Solución Problema 5.** Ver solución Walabi, problema 11.

**Solución Problema 6.** Veamos que el triángulo $MNL$ es isósceles, con $ML = MN$, ambas iguales al lado del cuadrado. El ángulo $\angle NML = 90 + 60 = 150$ grados, por lo que $\angle MLN = 15$ grados. Por último, $x = \angle NLK = 60 - 15 = 45$ grados.

**Solución Problema 7.** Para que el resultado sea positivo, puede haber dos negativos o ninguno. Si hay ningún negativo, las tercias son $(1,1,32), (1,2,16), (1,4,8), (2,2,8), (2,4,4)$. Las parejas con números repetidos tienen 2 correspondientes negativas; las parejas con tres números distintos tienen 3 correspondientes negativas. En total son $5 + 6 + 6 = 17$ tercias que cumplen las condiciones.

**Solución Problema 8.** Sabemos que $1 + 2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$, es decir, el plato más pesado es definitivamente aquel donde esté la pelota más pesada. Bajo esta misma lógica, si al quitar esta pelota más pesada, es ahora el otro plato el más pesado, necesariamente la segunda pelota más pesada está en el otro plato. Es decir, la pelota $2^{11}$ debe estar en el plato derecho, y la pelota $2^{10}$ debe estar en el plato izquierdo. Las restantes 9 pelotas tienen cada una 2 opciones, pues el resultado es el mismo independientemente de dónde las coloquemos. Por lo tanto, hay $2^9 = 512$ maneras de separar las pelotas.

**Solución Problema 9.** Ver solución Walabi, problema 10.

**Solución Problema 10.** Para que tenga exactamente el número 5, Luis ha debido lanzar exactamente cinco veces Sol y cinco veces Águila, en cualquier orden. Hay $\binom{10}{5} = 252$ maneras posibles en que esto es posible, de un total de $2^{10} = 1024$. La fracción más reducida es $\frac{252}{1024} = \frac{63}{256} = \frac{A}{B}$. Luego, $B = 256$.

**Solución Problema 11.** Podemos considerar los números divididos en las siguientes categorías: Primo, Cuadrado múltiplo de 4, Cuadrado no múltiplo de 4, Múltiplo de 4 no cuadrado, No cuadrado no primo no múltiplo de 4. Son 5 categorías y, por las reglas del problema, bastan 5 colores para pintar todos los números.

**Solución Problema 12.** Como $BX$ es paralela a $AD$, los triángulos $AYD$ y $XYB$ son semejantes. La razón está dada por $AD : XB = 90 : 18 = 5 : 1$. Luego, $\frac{BY}{DY} = \frac{1}{5}$. Esto quiere decir que podemos partir $DB$ en 6 pedazos iguales y $DY$ sería 5 pedazos, $BY$ sería 1 pedazo. Es decir, $BY = \frac{90}{6} = 15$.

**Solución Problema 13.** Las maneras de cambiar la suma de puntos es sumar 1 o sumar 3. Como ambos números son impares, su suma cambia la paridad. Como solo hay primos impares después del 2, esto nos dice que hay a lo más un primo cada dos números. (Esto es cierto incluso en el caso en que la secuencia inicial es $1, 2, 3$, pues solo hay un primo en la primera pareja $(1, 2)$ y solo hay un primo en la segunda pareja $(3, x)$.) Por lo tanto, hay a lo más 10 primos en la secuencia completa; este es un ejemplo: $3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 19, 22, 23, 26, 29, 30, 31, 34$, en donde hay diez números primos: $3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31$.

**Solución Problema 14.** Llamemos $O$ al centro de la circunferencia. Como $ABCD$ es un trapecio cíclico, es un trapecio isósceles, de donde $AD = BC$ y $AC = BD$. Consideremos los triángulos $ACX$ y $DBX$ y sean $E, F$ los pies de las perpendiculares desde $O$ hacia $AC$ y $DB$, respectivamente. Es un hecho conocido que la distancia de un vértice a su ortocentro es el doble que la distancia del circuncentro al lado opuesto (propiedad $OH$). Esto quiere decir que $XH = 2OE$ y $XJ = 2OF$. Para concluir, veamos que los triángulos $ACO$ y $DBO$ son congruentes por criterio $LLL$ pues $AC = DB$ y los otros lados son radios. Como son isósceles, $F, E$ son puntos medios y $OF, OE$ son mediatrices correspondientes, de donde $OE = OF$ que a su vez implica $XH = XJ$.

**Solución Problema 15.** Hacemos un par de transformaciones algebraicas para obtener

$$AB - B^2 = A$$

$$AB - A = B^2$$

$$A(B - 1) = B^2$$

Como $B$ y $B - 1$ son primos relativos, la única opción es $B - 1 = 1, B = 2$. (Si $B - 1 = -1, B = 0$, lo cual no es posible porque $B$ es denominador al inicio del problema.) Luego, $B^2 = 4 = A$ y la única pareja $(A, B)$ que cumple es $(2, 4)$.

# Uombat, etapa final

**Solución Problema 1.** Como 7 es un primo y 6! es el producto de números menores, su mínimo común múltiplo es su producto; $mcm(6!, 7) = 7! = 5040$. Al dividir entre 16 tenemos 315, al multiplicar por $\sqrt{9} = 3$ tenemos 945. Como nos preguntan el último dígito, la respuesta es 5.

**Solución Problema 2.** Ver solución Canguro, problema 6.

**Solución Problema 3.** Buscamos parejas $(x, y)$ tales que $x^2 + y^2 = 5$. Las parejas que cumplen son permutaciones de $3, 2$ y de $5, 0$. En el primer caso, tenemos $2 \times 2 \times 2 = 8$ parejas (orden, signo, signo) y en el segundo hay solo $2 \times 2 = 4$ parejas (orden, signo del 5). En total son $8 + 4 = 12$ puntos sobre la circunferencia.

**Solución Problema 4.** Ver solución Canguro, problema 13.

**Solución Problema 5.** Ver solución Canguro, problema 8.

**Solución Problema 6.** Ver solución Canguro, problema 6.

**Solución Problema 7.** Si invita a 4 amigos, son 5 personas en total; el número de rebanadas es de la forma $5k+2$. Si invita a 6 amigos, son 7 personas en total; el número de rebanadas es de la forma $7p+3$. El valor de $n$ entre 35 y 70 que resuelve este sistema de congruencias es $n = 52$. Como $52 = 13 \times 4$ y sabemos que invitó a más de 3 amigos (es decir, que eran más de 4 personas en la fiesta), entonces debían ser 13 personas en la fiesta, es decir, invitó a 12 personas como mínimo. (Las otras opciones son 25 o 51 invitados.)

**Solución Problema 8.** Como tanto 2021 como 2027 son impares, sus potencias también son impares y su suma es un número par, por lo que sabemos que $n \geq 1$. Sin embargo, para $k = 2$ tenemos que $2021^2 + 2027^2 \equiv 2(mod 4)$, por lo que no sería divisible entre $2^n$ para $n = 2$. Como pide que sea divisible para todo entero posiivo $k$, entonces $n = 1$.

**Solución Problema 9.** Como $M$ es el punto medio del arco $XY$, tenemos que $TM$ es bisectriz del ángulo $\angle XTY$. Luego, por Teorema de la Bisectriz, tenemos que $\frac{XQ}{QY} = \frac{TX}{TY}$. Por Potencia de un Punto desde $P$, sabemos que $PX\dot{P}Y = PT^2$, es decir, $4 \times 12 = 64 = PT^2$, de donde $PT = 8$. Tenemos que $\frac{PX}{PT} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16} = \frac{PT}{PY}$, es decir, los triángulos $PXT$ y $PTY$ son semejantes, de donde $\frac{TX}{TY} = \frac{PX}{PT} = \frac{1}{2} = \frac{XQ}{QY}$. Como $XY = 12$, entonces $XQ = 4$ y $QY = 8$.

**Solución Problema 10.** Benji quiere ordenar 11 películas en total. Dado que hay tres tercias ordenadas, basta con elegir la posición de la tercia en el orden, las otras dos películas se permutan en 2 maneras. En total, tenemos $211 \times 38 \times 35 \times 3$ maneras en que Benji puede ver las películas.

**Solución Problema 11.** Podemos formar $6 \times 6 \times 6 = 216$ números distintos de 3 dígitos lanzando un dado tres veces y manteniendo el orden de centenas, decenas, unidades. Ordenamos estos números de menor a mayor y pensamos en la elección de Montse en relación con la elección de Yareli: si Montse elige el menor, Yareli tiene 215 valores que cumplen; si Montse elige el siguiente, Yareli tiene 214 valores que cumplen, y así sucesivamente.

En total, hay $\frac{(215(216)}{2} = 23220$ parejas que favorecen a Yareli, por lo que ese es el valor de $X$ que buscamos.

**Solución Problema 12.** Ver solución Koala, problema 14.

**Solución Problema 13.** Para cualesquiera cuatro puntos, existe una única configuración de cuerdas que determinan una intersección (las diagonales del cuadrilátero cíclico). Luego, basta con hacer $\binom{10}{4} = 210$.

**Solución Problema 14.** Ver solución Canguro, problema 14.

**Solución Problema 15.** Observemos que $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$ y que $n^3 + 1 = (n+1)(n^2 - n + 1)$, es decir, nuestros divisores comparten el factor $(n+1)$ y $m = (n+1)(n-1)(n^2 - n + 1)k$ para algún entero $k$ mayor o igual a 1. Como $n - 1$ y $n^2 - n + 1$ son coprimos, tendríamos un divisor entre $n^2 - 1$ y $n^3 + 1$, a saber

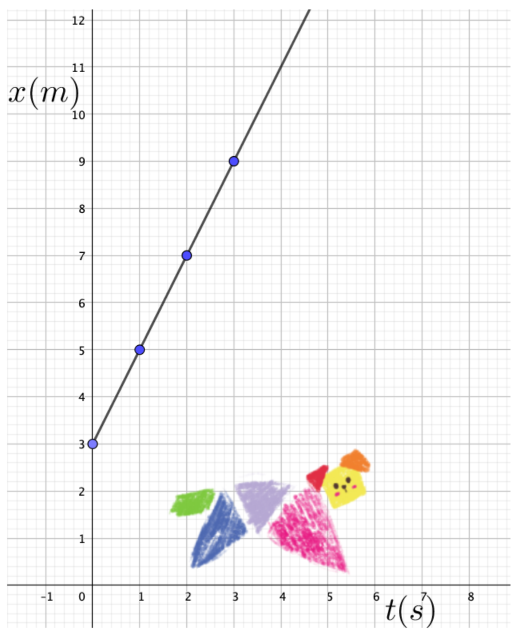
$$(n+1)(n^2 - n + 1) > (n-1)(n^2 - n + 1) > (n-1)(n+1)$$

pues $n+1 > n-1$ y $n^2-n+1 > n-1$ para $n > 2$. Luego, no pueden ser divisores consecutivos para $n > 2$, pues se cumple la desigualdad y, en ese caso, todos los factores son distintos de 1. Como $n^2-1=0$ para $n=1$, la única opción posible es $n=2$. Verificamos que, en ese caso, $n^2-1=3$ y $n^3+1=9$.

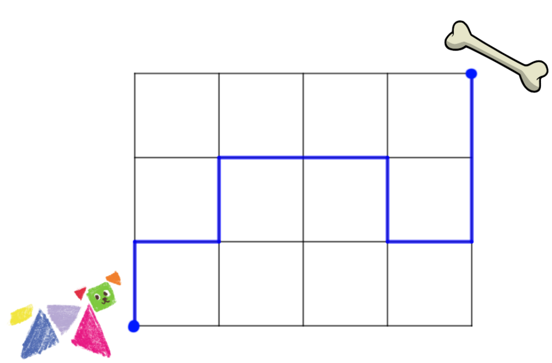
# Concurso de Física

## Medianos, primera etapa

**Problema 1.** Chiqui persiguió su pelota jugando. Podemos representar su movimiento a lo largo de un eje coordenado dependiente del tiempo según la gráfica mostrada. ¿Cuál fue su velocidad promedio? Expresa tu resultado en $\frac{m}{s}$.




**Problema 2.** La figura muestra el camino que siguió Choco para llegar a su hueso. ¿Cuál sería la magnitud del vector resultante que comienza en su posición inicial y termina en el lugar donde estaba el hueso?



**Problema 3.** En el problema anterior, si Choco cambia el camino que tomó, ¿la magnitud del vector resultante cambia?
A. Cambia
B. Se mantiene igual
C. No se puede saber

**Problema 4.** Ámber tiene distintas bolsas con croquetas, cada una marcada con la cantidad que contiene dentro. Las etiquetas dicen lo siguiente:

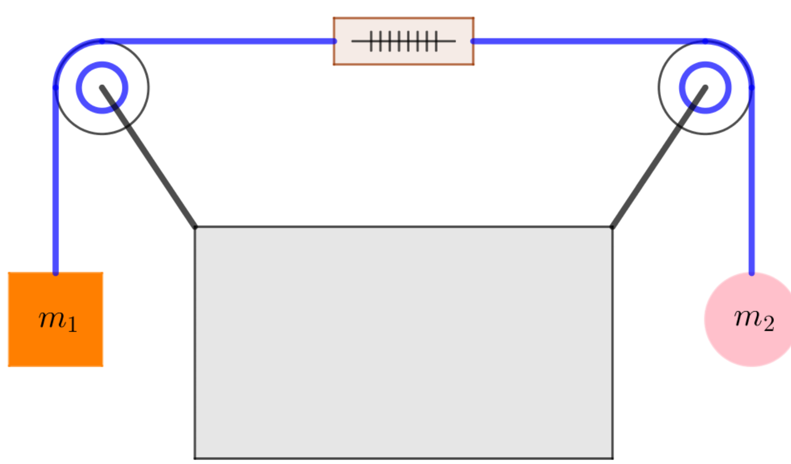
| Bolsa | Cantidad | Unidades |
|---|---|---|
| 1 | 0.032 | kg |
| 2 | 15 | gr |
| 3 | 0.27 x $10^5$ | mg |
| 4 | 40 | oz |
| 5 | 0.15 | libras |

Tabla de conversion de unidades

| | gr | kg | oz | lb |
|---|---|---|---|---|
| **1 gr** | 1 | 0.001 | 3.527 x $10^{-2}$ | 2.205 x $10^{-3}$ |
| **1 kg** | 100 | 1 | 35.27 | 2.205 |
| **1 oz** | 28.35 | 2.835 x $10^{-2}$ | 1 | 6.25 x $10^{-2}$ |
| **1 lb** | 453.6 | 0.4536 | 16 | 1 |

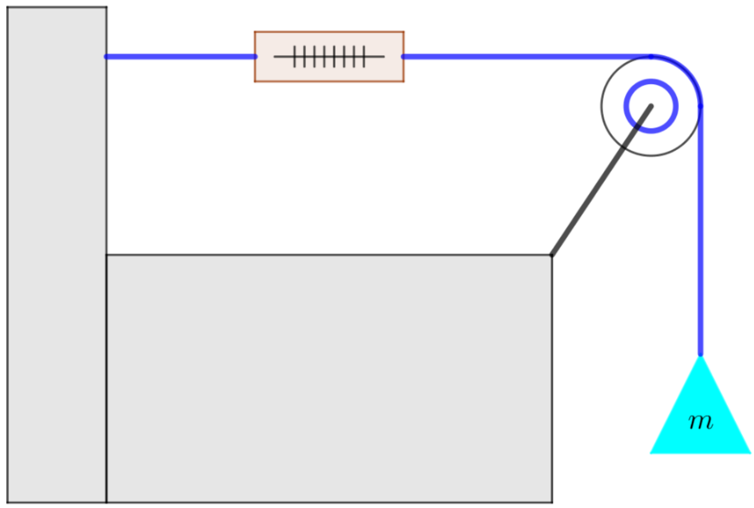
Si Ámber ordena las bolsas poniendo en primer lugar la bolsa con menor cantidad y en quinto lugar la bolsa con mayor cantidad, ¿qué bolsa quedaría en el lugar 3?

**Problema 5.** El sistema mostrado en la figura está en equilibrio. Si la balanza de resorte presenta su medición en Newtons y las masas $m_1$ y $m_2$ son de $5kg$, ¿qué valor indicaría la balanza?



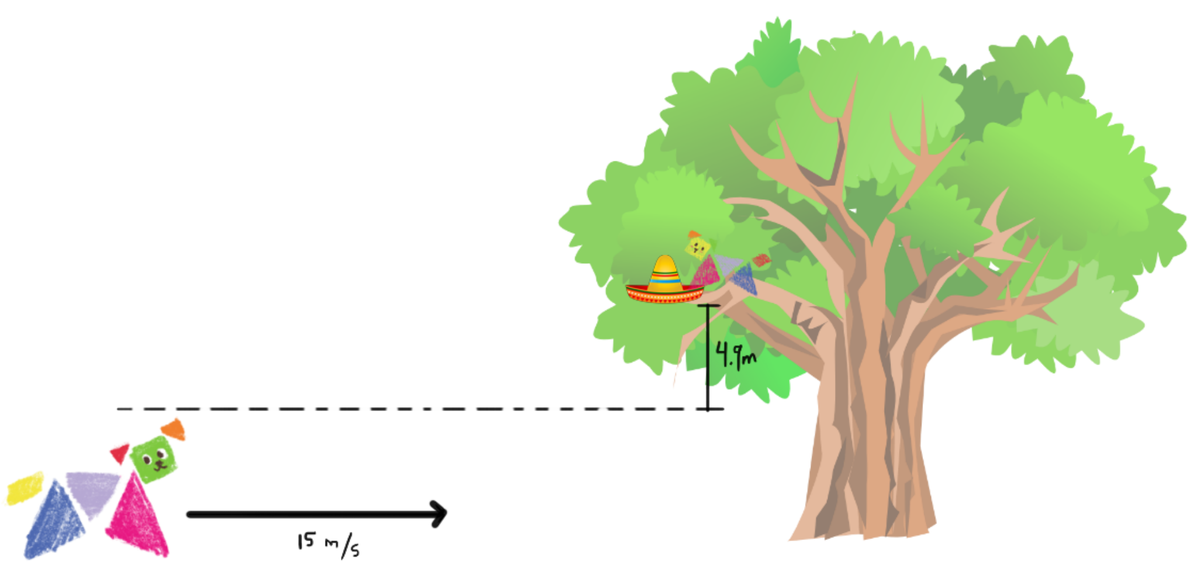

Nota: ignorar las masas de poleas, de las cuerdas y de la balanza. Suponer que no hay fricción en las poleas. Utiliza $9{,}8\frac{m}{s^2}$ como valor para la constante de gravedad. Expresa tu resultado en $N$.

**Problema 6.** En comparación con la situación del problema anterior, si ahora se usara un sistema como el de la figura, ¿el valor de la balanza cambiaría? Sí / NO




**Problema 7.** Si entre el planeta Chiquiluneta y el planeta Chocolandia existe una fuerza de atracción de $40{,}02 \times 10^2 N$, ¿cuál es la distancia entre estos dos planetas si Chiquiluneta tiene una masa de $21 \times 10^{13} kg$ y Chocolandia tiene una masa de $14 \times 10^{12} kg$? Nota: Usa el valor de $6{,}67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$ para la constante de gravitación universal. Expresa tu resultado en $km$.

**Problema 8.** Tikis y Choco están jugando. Tikis subió a la rama de un árbol, va a soltar un sombrero y quiere que caiga justo en la cabeza de Choco, quien corre hacia el árbol, justo debajo de Tikis. La rapidez constante de Choco es $15 \frac{m}{s}$ y la distancia vertical desde la rama del árbol hasta la altura de la cabeza de Choco es de $4{,}9m$. ¿Cuál debe ser la distancia horizontal entre la cabeza de Choco y la rama cuando Tikis suelte el sombrero? Nota: Considera que el sombrero no tiene fricción con el aire. Usa un valor de $9{,}8 \frac{m}{s^2}$ para la constante de gravedad.



**Problema 9.** En el problema anterior, si Tikis impulsara el sombrero con una velocidad inicial mayor que cero, ¿cómo cambiaría la distancia que tiene que recorrer Choco en el momento en que Tikis suelta el sombrero?
A. Aumenta
B. Disminuye
C. Se mantiene igual
D. No se puede saber

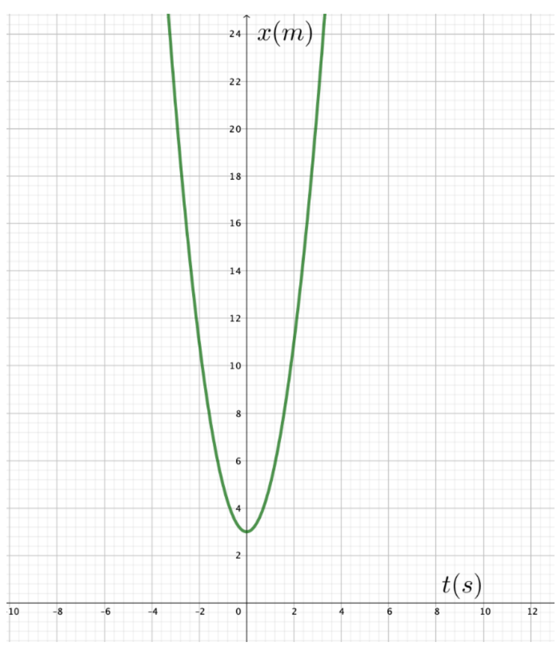
**Problema 10.** Danielle lanzó una pelota cuyo peso es de $49N$. ¿Cuál será la energía cinética de la pelota en el instante en que su velocidad sea de $800\frac{m}{s}$? Nota: Utiliza un valor de $9{,}8\frac{m}{s^2}$ para la constante de gravedad, si es necesario. Expresa tu resultado en $J$.

**Problema 11.** Ámber y Tikis construyeron un submarino. La presión dentro del submarino se mantiene siempre a $101325Pa$. Según su análisis, una ventana cuadrada que quieren colocar puede soportar una presión máxima de $16275Pa$. ¿Cuál es la profundidad máxima a la que puede descender el submarino sin dañarse si la densidad del agua donde van a navegar tiene un valor de $1{,}2\frac{kg}{m^3}$? Nota: Utiliza un valor de $9{,}8\frac{m}{s^2}$ para la constante de gravedad. Expresa tu resultado en $km$.

**Problema 12.** En el problema anterior, si cada lado de la ventana es de $20cm$, ¿cuál sería la fuerza máxima que puede sufrir la ventana al momento del sumergimiento? Nota: Expresa tu resultado en $N$.

# Grandes, primera etapa

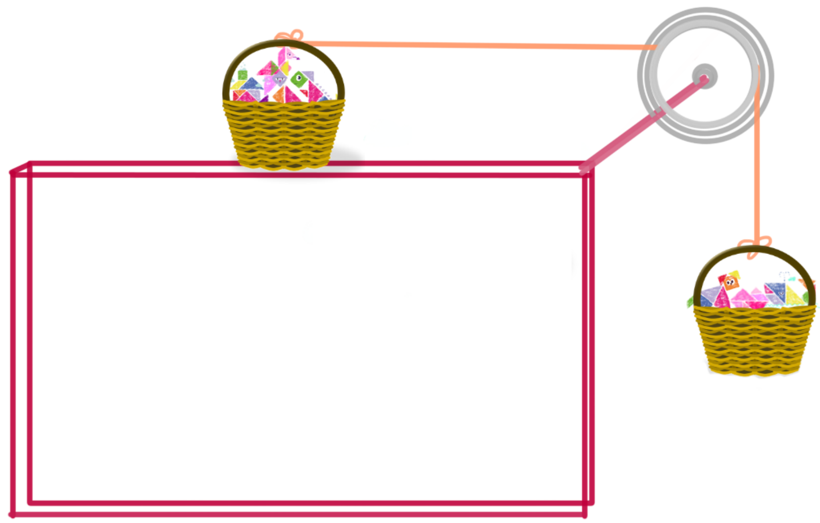
**Problema 1.** De acuerdo a la expresión $x = 2t^2 + 3$, mostrada en la gráfica, ¿cuál fue la rapidez promedio en en el tiempo de 1 a 3 segundos? Expresa tu resultado en $\frac{m}{s}$.




**Problema 2.** En el problema anterior: si eligiéramos un intervalo de tiempo diferente, ¿el valor de la rapidez promedio cambiaría?

**Problema 3.** Un metro cúbico de aluminio tiene una masa de $3 \times 10^3 kg$ y el mismo volumen de hierro tiene una masa de $6 \times 10^3 kg$. Encuentre el radio de una esfera de hierro sólida que equilibraría un metro cúbico de aluminio sobre una balanza de brazos iguales. Nota: Utiliza $\pi = 3{,}14$ y presenta tus resultados exactos a dos decimales en $m$.

**Problema 4.** Chocoreta amarró dos canastas con una cuerda inextensible de masa despreciable y las colocó en una polea sin fricción de manera que una quedaba suspendida como se muestra en la figura.

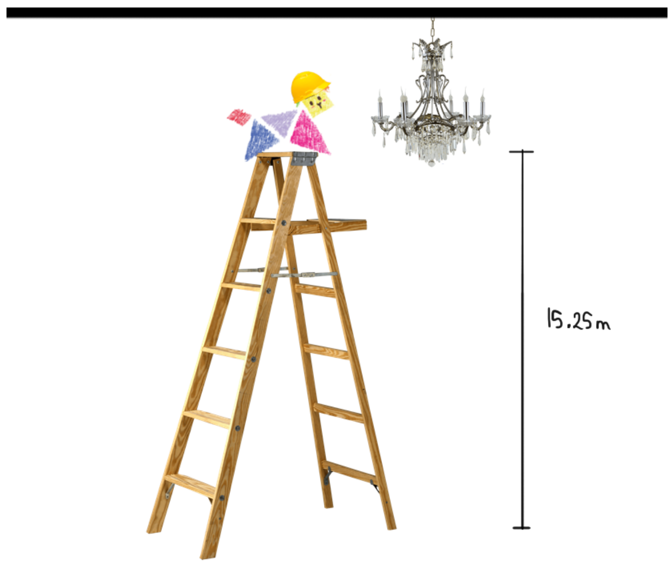


Una vez que Choco repartió sus juguetes en ambas canastas, la canasta $C_1$ tenía $2kg$ y la canasta $C_2$ tenía $5kg$. Si entre la canasta $C_1$ y la superficie sobre la que se encuentra hay un coeficiente de fricción de 0,2, ¿cuál es la tensión en la cuerda? Expresa tu resultado en $N$.

**Problema 5.** En la situación anterior, ¿qué pasaría con la tensión de la cuerda si aumentamos la masa de alguna de las canastas?
A. Aumenta
B. Disminuye
C. Se mantiene igual
D. No se puede saber

**Problema 6.** En la situación del problema 5, ¿qué pasaría con la tensión de la cuerda si elimináramos la fricción de la canasta $C_1$?
A. Aumenta
B. Disminuye
C. Se mantiene igual
D. No se puede saber

**Problema 7.** Tikis constructora estaba en su grúa intentando colocar un adorno de $2000gr$ pero se le cayó a una altura de $15{,}25m$. ¿Cuál es la energía potencial del adorno a $525cm$ arriba del nivel del suelo? Nota: Supón que el objeto no tiene fricción con el aire y que cae desde el reposo. Nota: Utiliza $g = 9{,}8\frac{m}{s^2}$ y expresa tus resultados en $J$.




**Problema 8.** En la misma situación anterior, ¿cuál es la energía cinética del adorno a los mismos $525cm$ arriba del nivel del suelo? Considera la nota del problema anterior.

En la situación anterior, si tuviéramos un objeto del triple de masa, ¿sería mayor la energía potencial o la cinética?

A. La potencial
B. La cinética
C. Son iguales
D. No se puede saber

**Problema 9.** Ámber y Tikis construyeron un submarino. La presión dentro del submarino se mantiene siempre a $101325Pa$. Según su análisis, una ventana cuadrada que quieren colocar puede soportar una presión máxima de $16275Pa$. ¿Cuál es la profundidad máxima a la que puede descender el submarino sin dañarse si la densidad del agua donde van a navegar tiene un valor de $1{,}2\frac{kg}{m^3}$? Nota: Utiliza un valor de $9{,}8\frac{m}{s^2}$ para la constante de gravedad. Expresa tu resultado en $km$.

**Problema 10.** En el problema anterior, si cada lado de la ventana es de $20cm$, ¿cuál sería la fuerza máxima que puede sufrir la ventana al momento del sumergimiento? Nota: Expresa tu resultado en $N$.

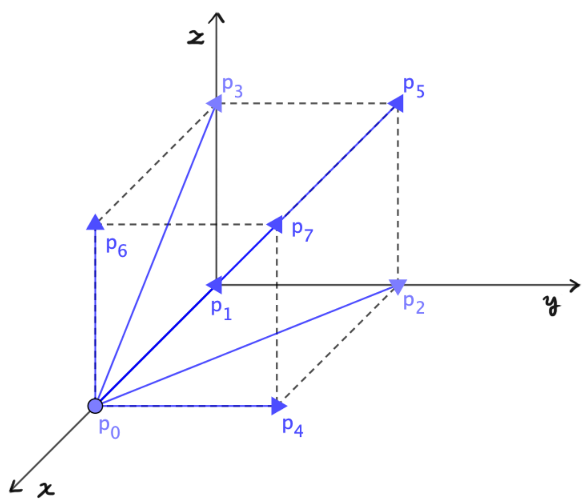
**Problema 11.** Totoro está jugando con partículas puntuales cargadas. Primero coloca dos partículas con cargas $q_0$ y $q_1$, separadas a $2cm$, de manera que al medir la fuerza entre ellas, tiene un valor de $720N$. Después cambió la particula con carga $q_1$ por una $2\mu c$ más pequeña, y la distancia entre las cargas ahora era 3 veces mayor que en el caso anterior pero la fuerza resultante fue de $40N$. ¿Cuál es el valor de la carga $q_0$? Nota: Utiliza $k = 9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{c^2}$. Expresa tu resultado en $\mu c$.

# Medianos, etapa final

**Problema 1.** Se establecieron 8 puntos en un sistema coordenado de la siguiente manera:

| | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $p_0$ | $a$ | 0 | 0 |
| $p_1$ | 0 | 0 | 0 |
| $p_2$ | 0 | $a$ | 0 |
| $p_3$ | 0 | 0 | $a$ |
| $p_4$ | $a$ | $a$ | 0 |
| $p_5$ | 0 | $a$ | $a$ |
| $p_6$ | $a$ | 0 | $a$ |
| $p_7$ | $a$ | $a$ | $a$ |

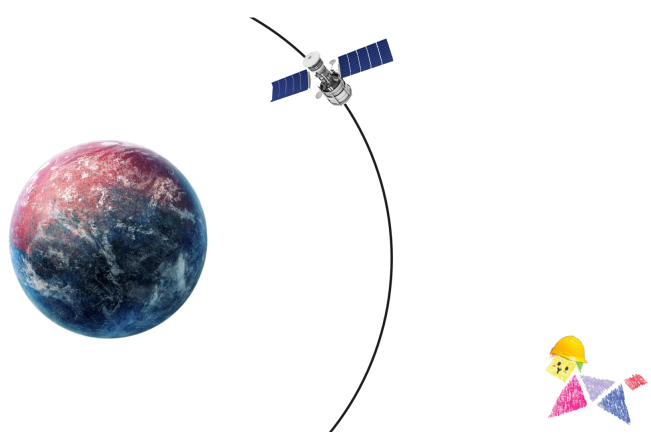
A partir de estos puntos, se crearon 7 vectores, uniendo $p_0$ con cada uno de los puntos restantes, como muestra la imagen:




a) Si todos los vectores comienzan en $p_0$, ¿cuál sería el vector resultante al sumar todos los vectores?

b) A partir del resultado anterior, ¿podrías encontrar el vector resultante si el punto de partida de los vectores hubiera sido cualquiera de los otros puntos? Explica.

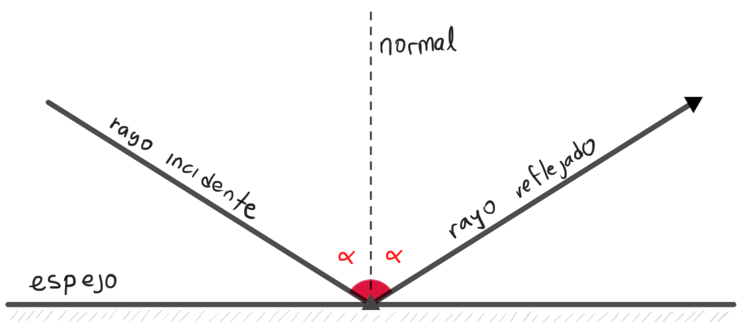
**Problema 2.** Chiqui es ingeniera espacial y quiere calcular la velocidad con la que orbitará un satélite alrededor del planeta Chocolandia. El satélite se colocará en órbita a una altura de $580km$ sobre la superficie. La masa del planeta Chocolandia es de $1{,}15 \times 10^{24}kg$ y su radio es de $3770km$. Ayuda a Chiqui a calcular la velocidad.



Nota: Utiliza el valor de $G$ como $6{,}67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$.

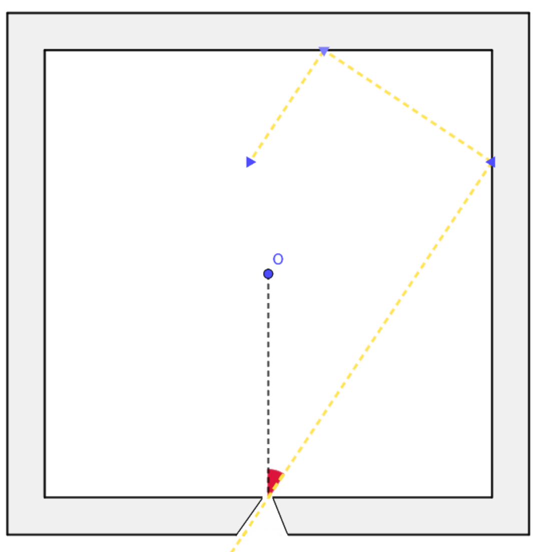
**Problema 3.** Amber hizo un agujero en un tanque de almacenamiento sin tapa y lleno de agua. El caudal que sale de la fuga es de $2{,}5 \times 10^{-3} \frac{m^3}{minuto}$. Si el agujero está en un punto a $16m$ bajo el nivel del agua, ¿cuál es el diámetro del agujero?

**Problema 4.** La reflexión de la luz en espejos se presenta cuando un rayo de luz incidente se refleja sobre una superficie, como se muestra en la siguiente figura, de manera que el rayo reflejado forma un ángulo con la normal a la superficie igual al ángulo que forma el rayo incidente con la misma normal, siendo la normal la recta que es perpendicular a la superficie en el punto de incidencia.




Se cuenta con un cerco cuadrado donde las superficies interiores son espejos planos, como en la figura. Un rayo de luz entra por un pequeño agujero puntual en el centro de uno de los espejos. ¿A qué ángulo $\theta$ debe entrar el rayo para salir por el agujero después de ser reflejado una vez por cada uno de los otros espejos?

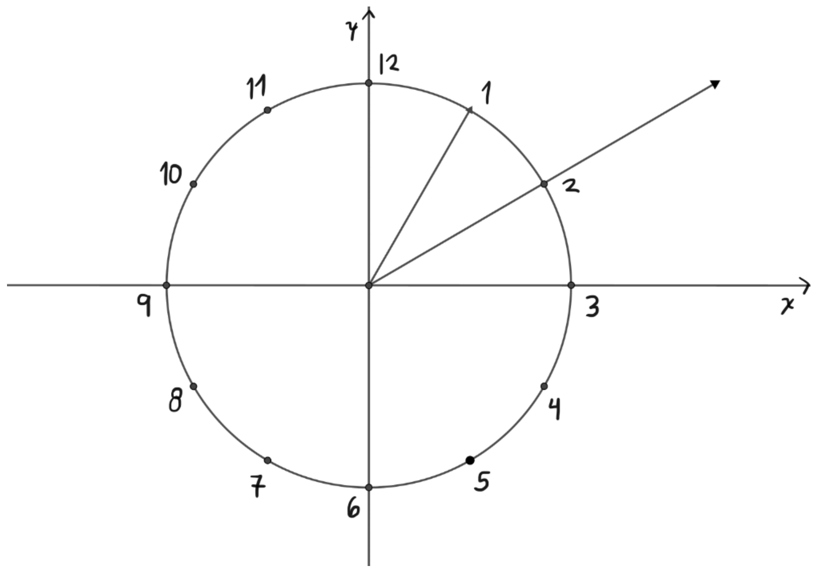
En la figura, $O$ es el centro del cuadrado.



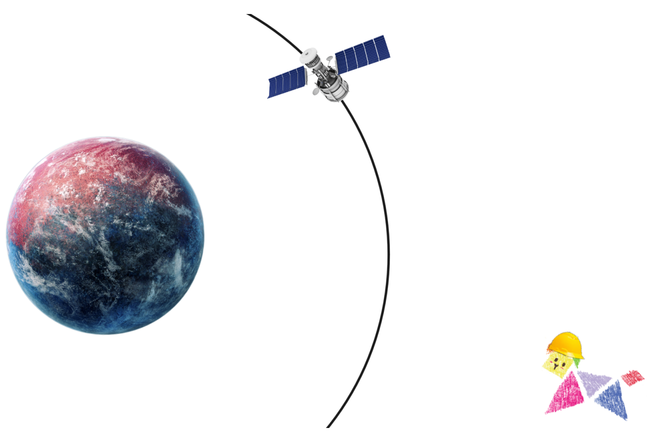

# Grandes, etapa final

**Problema 1.** Se dibujó un sistema de coordenadas sobre el centro de un reloj como se muestra en la imagen. Sobre este sistema de coordenadas se dibujan 12 vectores, cada uno en dirección hacia cada número de las horas y su magnitud igual a ese mismo número; de este modo, el primer vector comienza en el centro, pasa por el número 1 y tiene magnitud 1, el segundo vector, comienza en el centro, pasa por el número 2 y tiene magnitud 2 y así sucesivamente, hasta que el vector 12 pasa por el número 12 y tiene magnitud 12.

¿Cuál es el vector resultante al sumar los 12 vectores?




**Problema 2.** Chiqui es ingeniera espacial y quiere calcular el tiempo que tardará un satélite en completar una órbita alrededor del planeta Chocolandia. El satélite se colocará en órbita a una altura de $580km$ sobre la superficie. La masa del planeta Chocolandia es de $1{,}15 \times 10^{24} kg$ y su radio es de $3770km$. Ayuda a Chiqui a calcular el tiempo.



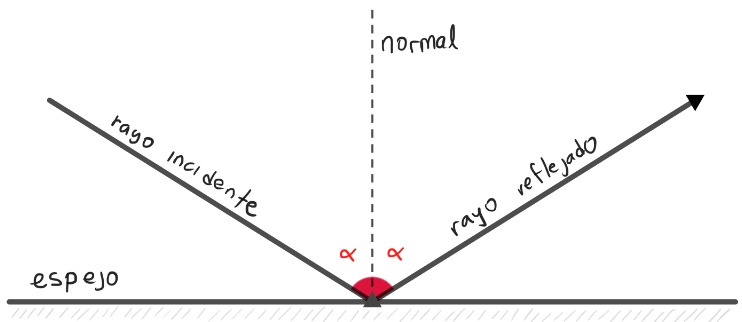
Nota: Utiliza el valor de $G$ como $6{,}67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$.

**Problema 3.** Una pelota de $10cm$ de radio cuya densidad es de $2{,}4 \frac{gr}{cm^3}$ cuelga de una cuerda inextensible que a su vez cuelga de un resorte cuya constante elástica tiene un valor de $1200 \frac{N}{m}$. La pelota se sumerge completamente en agua.

Calcular la tensión en la cuerda al sumergir la pelota si el resorte tuvo una deformación $5cm$ menor que al colgar la pelota directamente de él.

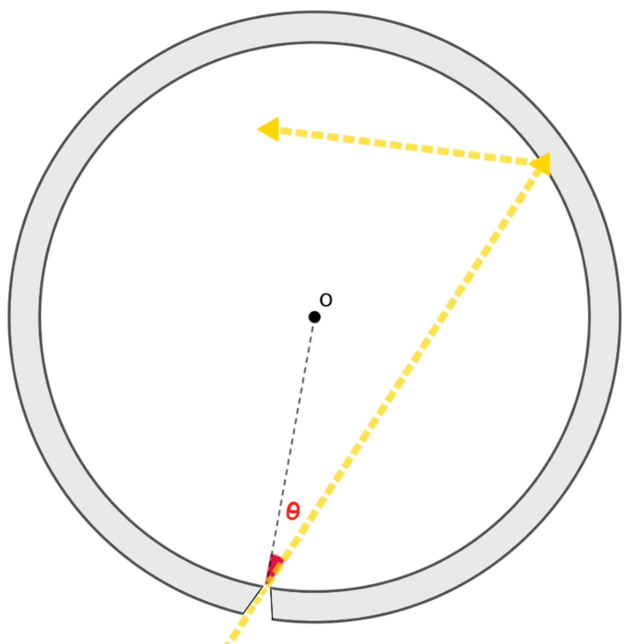
Nota: Utiliza el valor de $1 \frac{gr}{cm^3}$ como la densidad del agua.

**Problema 4.** La reflexión de la luz en espejos se presenta cuando un rayo de luz incidente se refleja sobre una superficie, como se muestra en la siguiente figura, de manera que el rayo reflejado forma un ángulo con la normal a la superficie igual al ángulo que forma el rayo incidente con la misma normal, siendo la normal la recta que es perpendicular a la superficie en el punto de incidencia.




Se cuenta con un cerco circular cuya superficie interior es reflectiva como un espejo, como se muestra en la figura. Un rayo de luz entra por un pequeño agujero puntual. ¿A qué ángulo $\theta$ debe entrar el rayo para salir por el agujero después de ser reflejado 6 veces en la superficie interior?

En la figura, $O$ es el centro de la circunferencia.



El Centro de Alto Rendimiento en Matemáticas fue fundado en 2011 en San Luis Potosí, México. Desde entonces, nos hemos dedicado a la preparación de estudiantes, profesores y familias para distintos concursos de matemáticas, principalmente aquellos que caen bajo el paragüas de Olimpiada de Matemáticas. Hemos tenido la oportunidad de trabajar con cientos de estudiantes muy talentosos, dentro y fuera de la Olimpiada, en todo México y partes de América Latina.

En CARMA estamos comprometidos con la educación matemática, con proporcionar un espacio accesible y seguro donde todos, todas y todes puedan continuar su preparación olímpica permanente, dar sus primeros y segundos pasos en concursos, o acercarse a las matemáticas desde una perspectiva lúdica y un aprendizaje basado en problemas.

Para más información sobre CARMA: Centro de Alto Rendimiento en Matemáticas, te presentamos los siguientes enlaces:

- Cursos en https://cursos.carmaenlinea.com/
- Concursos en https://concursos.carmaenlinea.com/.
  Anualmente organizamos Olimpiada Femenil (febrero-marzo), Olimpiada Virtual de Matemáticas (agosto) y Olimpiada de Otoño (septiembre-octubre).
- Nuestra página de Facebook en http://fb.com/carmatematicas
- Nuestro canal de YouTube en https://youtube.com/carma2011
- El canal de YouTube de ugesaurio en https://www.youtube.com/ugesaurio

CENTRO DE ALTO RENDIMIENTO EN MATEMATICAS

CARMA

·2011·

CENTRO DE ALTO RENDIMIENTO EN MATEMATICAS

CARMA

·2011·