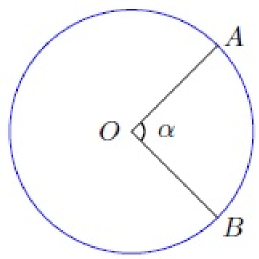
Entrenamiento Geometría
Israel Bonal Rodríguez
israel.bonal@cimat.mx
20 de Agosto de 2020

CIMAT

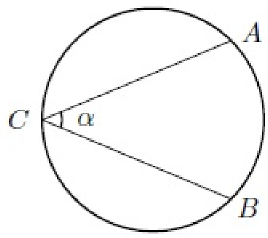
Ángulos en circunferencias

Dado un ángulo y una circunferencia, podemos hacer una equivalencia entre el valor de este ángulo y los arcos que interseca sobre la circunferencia. La forma de calcular el valor del ángulo dependerá del lugar donde se encuentre el vértice y de la forma en que sus lados intersecten la circunferencia. Veamos cada uno de ellos y la manera de calcularlos:

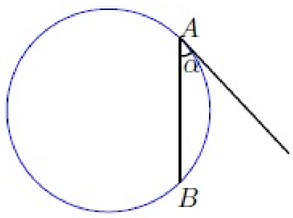
Definición 1: Un ángulo central es el que tiene su vértice en el centro de un círculo y su valor es equivalente al arco que interseca medido en radianes, es decir $\alpha = \widehat{AB}$.



Definición 2: Un ángulo inscrito es el que tiene su vértice sobre la circunferencia y los lados que lo forman son cuerdas de la circunferencia. Su valor es equivalente a la mitad del arco que interseca, es decir $\alpha = \widehat{AB}/2$.



Definición 3: Un ángulo semi-inscrito es el que tiene su vértice sobre la circunferencia y está formado por una línea tangente y una secante. Su valor es equivalente a la mitad del arco que interseca, es decir $\alpha = \widehat{AB}/2$.



Teorema 1: El valor de un ángulo inscrito es igual a la mitad del ángulo central que interseca el mismo arco.

Teorema 2: La magnitud del ángulo entre dos líneas que se cortan dentro de un círculo es equivalente a la semisuma de los arcos que cortan dichas líneas. Es decir

$$\alpha = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$$

Teorema 3: La magnitud del ángulo entre dos líneas que se cortan fuera de un círculo es igual a la semidiferencia de los arcos que cortan dichas líneas. Es decir

$$\alpha = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}$$

Cuadriláteros cíclicos

Un hecho muy conocido en geometría es que por cualesquiera tres puntos no alineados pasa exactamente una circunferencia. ¿Pero qué podemos decir si consideramos cuatro puntos en lugar de tres? Como es de esperarse, no siempre existirá una circunferencia que pase por los cuatro puntos dados. Por ejemplo, consideremos la circunferencia que pasa por tres puntos dados (la cual es única), A, B, C, y agreguemos un cuarto punto, D, el cual no esté sobre la circunferencia. Claramente, no existe una circunferencia que pase por estos cuatro puntos, ya que en particular pasaría por A,B,C, y por la manera en que escogimos a D, ésta no puede pasar por D. De aquí vemos que los cuadriláteros que posean una circunferencia que pase por sus vértices deben ser en cierta forma especiales. A tales cuadriláteros se les acostumbra llamar *cuadriláteros cíclicos*.

Definición 4: Un cuadrilátero que está inscrito en una circunferencia, es decir, sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia se dice que es un *cuadrilátero cíclico*.

Teorema 4: Un cuadrilátero es cíclico si y sólo si la suma de dos ángulos opuestos es igual a 180°.

Teorema 5: Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Entonces $\measuredangle ADB = \measuredangle ACB$ si y sólo si $ABCD$ es cíclico.

Ejemplos

1. Demuestra que el radio trazado hacia el punto de tangencia es perpendicular a la tangente.

2. Las circunferencias C_1 y C_2 se intersecan en los puntos A y B. Se traza una recta l que corta a C_1 en C y D, y a C_2 en M y N, de tal manera que A y B quedan en distintos lados de l. Demuestra que $\measuredangle CAN + \measuredangle MBD = 180°$.

3. Sea $ABCD$ un cuadrilátero el cual tiene sus cuatro vértices sobre una circunferencia. Las líneas AB y DC se intersecan en un punto Q y las líneas DA y CB se intersecan en un punto P. Demuestra que las líneas que bisectan los ángulos $\measuredangle DPC$ y $\measuredangle AQD$ son mutuamente perpendiculares.

4. Las circunferencias C_1 y C_2 se intersecan en los puntos A y B. Por el punto A se traza una recta que corta a las circunferencias C_1 y C_2 en los puntos C y D, respectivamente. Por los puntos C y D se trazan tangentes a las circunferencias, las cuales se intersecan en el punto M. Demuestra que el cuadrilátero $MCBD$ es cíclico.

5. Sea BC el diámetro de un semicírculo y sea A el punto medio del semicírculo. Sea Q un punto sobre el arco $\widehat{AC}$ y sea P el pie de la perpendicular desde A sobre la línea BQ. Demuestra que $BP = PQ + QC$.

Problemas

1. Demuestra que dos líneas paralelas cualesquiera que intersecan una circunferencia, cortan arcos iguales entre ellas. ¿Qué sucede cuándo una de las líneas es tangente a la circunferencia?

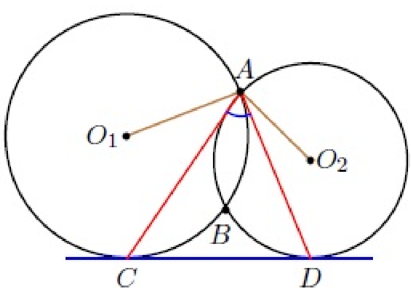
2. **(Resultado importante)** Demuestra que el valor de un ángulo semi-inscrito es igual al valor de un ángulo inscrito que intersecte el mismo arco.

3. Una circunferencia ha sido dividida arbitrariamente en cuatro partes y los puntos medios de los arcos obtenidos se han unido con segmentos de rectas. Demuestra que entre estos segmentos dos serán perpendiculares entre sí.

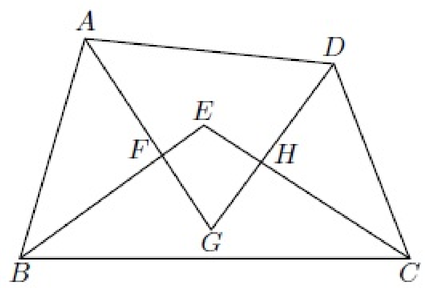
4. Dos circunferencias son tangentes exteriormente en un punto A. BC es una tangente común externa. Demuestra que $\measuredangle BAC = 90°$.

5. Dos circunferencias de centros O_1 y O_2 se intersecan en los puntos A y B, como se muestra en la figura. La línea CD es tangente a ambas circunferencias. Demuestra que

$$\measuredangle CAD = \frac{1}{2}\measuredangle O_1AO_2$$



6. En la siguiente figura están trazadas las bisectrices de los ángulos interiores del cuadrilátero $ABCD$, las cuales se intersecan en los puntos E, F, G y H, como se muestra en la figura. Demuestra que el cuadrilátero $EFGH$ es cíclico.



7. Sea AB una cuerda en una circunferencia y P un punto sobre el arco $\widehat{AB}$. Sea Q la proyección de P sobre AB, R y S las proyecciones de P sobre las tangentes al círculo en A y B, respectivamente. Demuestra que PQ es la media geométrica de PR y PS, esto es, $PQ = \sqrt{PR \cdot PS}$.

8. Una línea PQ paralela al lado BC de un triángulo $\triangle ABC$, corta a AB y a AC en P y Q, respectivamente. La circunferencia que pasa por P y es tangente a AC en Q, corta de nuevo a AB en R. Demuestra que el cuadrilátero $RQCB$ es cíclico.