ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

Laura Soledad Casillas Serna

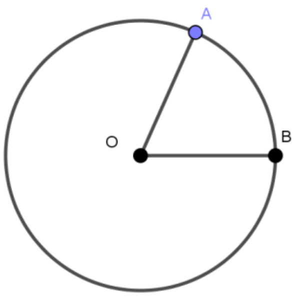
1. Ángulos en la circunferencia

La forma de calcular un ángulo en la circunferencia dependerá del lugar donde se encuentre el vértice y de la forma en que sus lados intersecten la circunferencia.

Si quieres repasar un poco sobre las distintas rectas en una circunferencia, puedes consultar el material de Área de Polígonos donde se explica cada una.

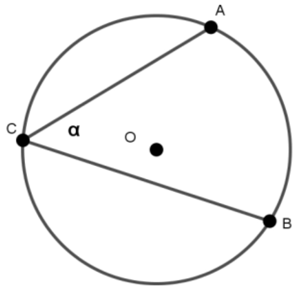
2. Ángulo central

Un ángulo central es el que tiene su vértice en el centro de un círculo y sus lados son dos radios de la circunferencia. Su valor es igual al arco que intersecta, es decir $\propto = \widehat{AB}$.



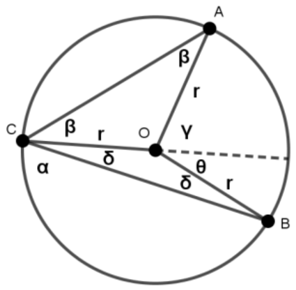
3. Ángulo inscrito

Es el que tiene su vértice sobre la circunferencia y los lados que lo forman son cuerdas de la circunferencia. Su valor es igual a la mitad del arco que intersecta, es decir: $\propto = \frac{\widehat{AB}}{2}$. Esto implica que también seria la mitad del ángulo central que comprende el mismo arco AB.



Demostración.

Si se trazan los radios OA, OB y OC se forman dos triángulos isósceles



El ángulo γ es exterior al triángulo AOC y entonces su valor es: $\gamma = 2\beta$

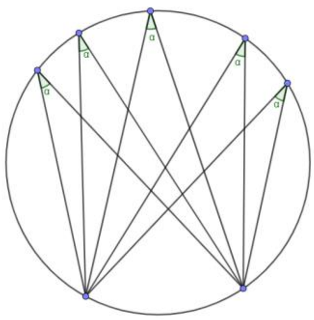
Lo mismo para el ángulo θ: $\theta = 2\delta$

Entonces el ángulo inscrito es igual a: $\alpha = \beta + \delta = \frac{\gamma}{2} + \frac{\theta}{2} = \frac{\gamma+\theta}{2}$

Como el ángulo central $\gamma + \theta = \widehat{AB}$

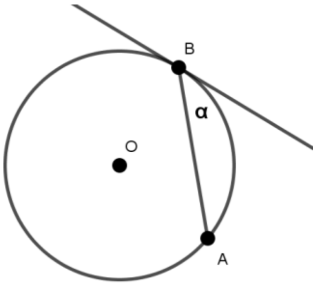
Entonces el ángulo inscrito es igual a $\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2}$ que es lo que se quería demostrar.

Algo útil que nos dice el **Teorema del Maguey** es que si tienes muchos puntos sobre la circunferencia, todos formando ángulos inscritos con el mismo arco, entonces los ángulos serán iguales.



4. Ángulo semi-inscrito

Es el que tiene su vértice sobre la circunferencia y está formado por una línea tangente y una secante. Su valor es igual a la mitad del arco que intersecta, es decir: $\propto = \frac{\widehat{AB}}{2}$

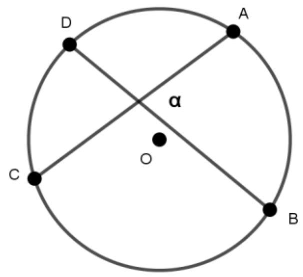


No siempre el vértice del ángulo esta en alguna de las posiciones antes mencionadas, por lo que se debe encontrar una forma de calcular la medida de un ángulo cuyo vértice esté dentro o fuera del círculo en cuestión.

5. Ángulo interior

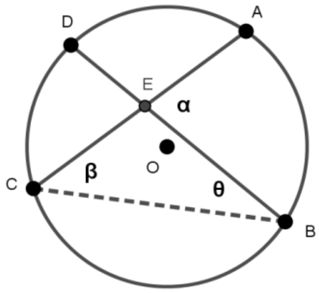
La magnitud del ángulo entre dos líneas que se cortan dentro de un círculo es equivalente a la semisuma de los arcos que cortan dichas líneas, es decir:

$$\alpha = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$$



Demostración

Trazando la cuerda de B a C, se forma un triángulo.



Como el ángulo α es un ángulo exterior al triangulo BEC entonces: $\alpha = \beta + \theta$

El ángulo inscrito $\beta = \frac{\widehat{AB}}{2}$

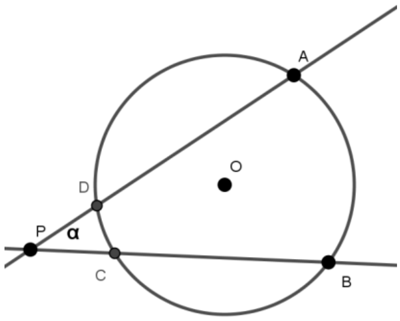
Y el ángulo inscrito $\theta = \frac{\widehat{CD}}{2}$

Entonces el ángulo interior $\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2} + \frac{\widehat{CD}}{2} = \frac{\widehat{AB}+\widehat{CD}}{2}$ que es lo que se quería demostrar.

6. Ángulo exterior

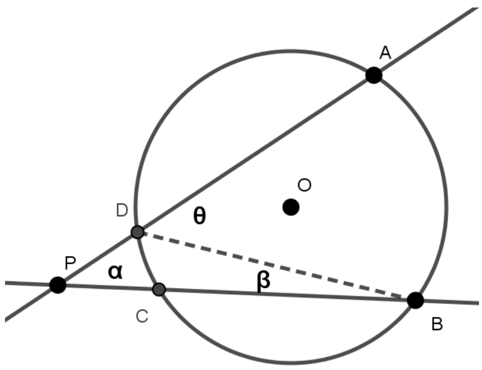
La magnitud del ángulo entre dos líneas que se cortan fuera de un círculo es igual a la semidiferencia de los arcos que cortan dichas líneas. Es decir:

$$\alpha = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}$$



Demostración

Si se traza una cuerda desde el punto B al D se forma un triángulo PBD, y los ángulos β y θ son ángulos inscritos.



Entonces $\beta = \frac{\widehat{DC}}{2}$ y $\theta = \frac{\widehat{AB}}{2}$

El ángulo θ es un ángulo exterior al triangulo PBD y su valor se puede obtener mediante:

$$\theta = \beta + \alpha$$

Y como se desea saber el valor de α, se despeja quedando de la siguiente manera:

$\alpha = \theta - \beta = \frac{\widehat{AB}}{2} - \frac{\widehat{DC}}{2} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{DC}}{2}$ que es lo que se quería demostrar.

7. Problemas

1. Calcula el valor de los ángulos marcados en cada una de las siguientes figuras:

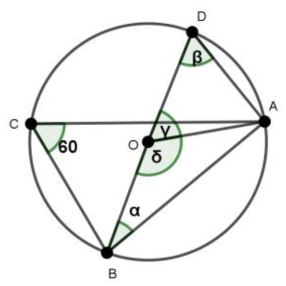


Figura 1

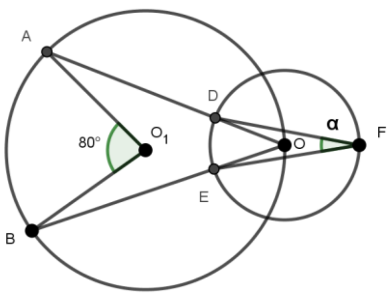
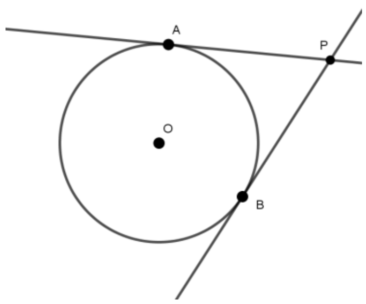


Figura 2

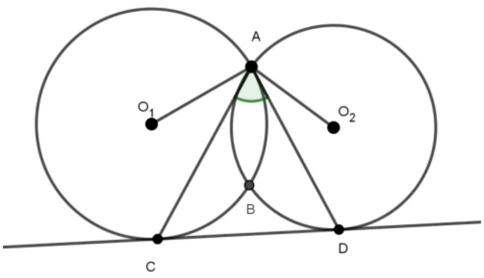
α= α=
β=
γ=
δ=

2. En una circunferencia con centro O, se traza una recta tangente a la circunferencia en el punto P. Demuestra que el radio OP y la recta tangente son perpendiculares.
3. Demuestra los ángulos semi-inscritos.
4. Demuestra que dos líneas paralelas cualesquiera que intersectan una circunferencia, cortan arcos iguales.
5. En la siguiente figura PA y PB son tangentes a la circunferencia. Demuestra que PA=PB (¿Teorema del payaso?).



6. Dos circunferencias son tangentes exteriormente en un punto A. BC es una tangente común externa. Demuestra que <BAC=90°.

7. A una circunferencia se le han trazado dos líneas tangentes paralelas las cuales la tocan en los puntos M y N. Se traza un tercer tangente la cual corta a las tangentes anteriores en los puntos K y L. Sea O el centro de la circunferencia. Demuestra que <KOL =90°.
8. Uno de los lados de un triángulo inscrito en una circunferencia coincide con un diámetro. Demuestra que el triángulo es un triángulo rectángulo.
9. Dos circunferencias de centros O_1 y O_2 se intersectan en los puntos A y B, como se muestra en la figura. La línea CD es tangente a ambas circunferencias. Demuestra que: $< CAD = \frac{1}{2} < O_1AO_2$



10. Las circunferencias $C_1 y\ C_2$ se intersectan en los puntos A y B. se traza una recta ℓ que corta C_1 en C y D, y a C_2 en M y N, de tal manera que A y B quedan en distintos lados de ℓ. Demuestra que <CAN+<MBD=180º.
11. (Examen final OMMAGS 2016) Sea ABC un triángulo. Sea P un punto en el interior del triángulo ABC, tal que el circuncírculo de BPC es tangente a AC, BP intersecta al circuncírculo de ABC en D. Demuestra que AD es paralela a PC.

8. Vídeos

Ángulos en la circunferencia

https://youtu.be/wN6ch-Tetog