Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas
ACM

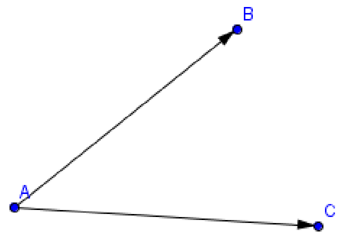
Ángulos y Congruencia de Triángulos

Laura Vielma
Enero 2011

Ángulos

Ángulo es la figura formada por dos rayos que tienen el mismo origen. Los dos rayos son los lados del ángulo y el origen común es el vértice.

Para el gráfico adjunto, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son los lados y A es el vértice del ángulo. Se utiliza la siguiente notación para el ángulo mostrado, donde siempre la letra del vértice se encuentra en el medio: $\widehat{BAC}, \widehat{CAB}, \angle BAC, \angle CAB$. A veces se utiliza únicamente el vértice del ángulo para denotarlo, como por ejemplo, $\hat{A}$ o $\angle A$ pero esto no es muy recomendable porque puede generar confusión dependiendo el tipo de problema que se tenga. En esta guía se trabajará con $\angle ABC$.



Clasificación de ángulos

Se clasifican los ángulos de acuerdo a su medida o a su posición con relación a otros.

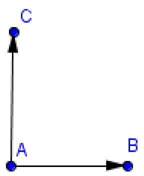
1. Por su medida: pueden ser nulo, llano o rectilíneo, recto, agudo, obtuso, convexo, cóncavo y de una vuelta.
   - Ángulo nulo: mide $0°$. Sus lados son dos rayos coincidentes.

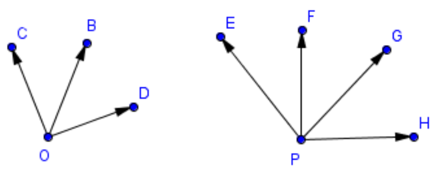
   - Ángulo llano o rectilíneo: mide $180°$. Sus lados son dos rayos opuestos.

   - Ángulo recto: mide la mitad de un ángulo llano, $90°$. Decimos que $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{CA}$ son perpendiculares y escribimos $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$.

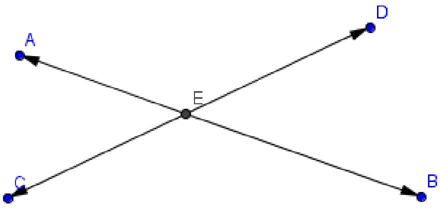
     

   - Ángulo agudo: todo aquel que mide más de $0°$ y menos de $90°$.
   - Ángulo obtuso: todo aquel que mide más de $90°$ y menos de $180°$.
   - Ángulo convexo: cuya medida está comprendida entre $0°$ y $180°$.
   - Ángulo cóncavo: si mide más de $180°$ y menos de $360°$.
   - Ángulo de una vuelta: se genera al girar un rayo, una vuelta completa alrededor de su origen. Mide $360°$.
2. Por su posición: se clasifica en consecutivos, adyacentes y opuestos por el vértice.
   - Ángulos consecutivos: dos ángulos son consecutivos si tienen el mismo vértice, un lado común y los otros lados en regiones distintas del común. Tres o más ángulos son consecutivos, si cada uno es consecutivo con su inmediato.

     En este caso, $\angle COB$ es consecutivo del $\angle BOD$ y $\angle EPF, \angle FPG, \angle GPH$ son tres ángulos consecutivos.

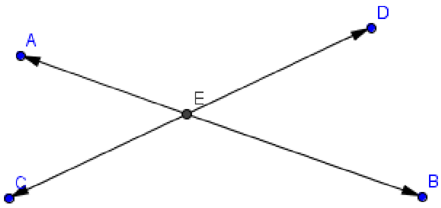
- Ángulos adyacentes: denominado también, par lineal, son dos ángulos consecutivos cuyas medidas suman 180°.
- Ángulos suplementarios: son dos ángulos cuyas medidas suman 180°.
- Ángulos complementarios: dos ángulos se llaman complementarios si sus medidas suman 90°.
- Ángulos opuestos por el vértice: son dos ángulos, cuyos lados forman dos pares de rayos opuestos.



- Ángulos congruentes: Dos ángulos son congruentes si tienen igual medida. Usamos el símbolo $\cong$ para decir que los ángulos son congruentes y usamos el símbolo $=$ para decir que la medida de los ángulos son iguales.

Teoremas

1. Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.



Demostración:

El $\angle CEA$ y el $\angle AED$ forman un par lineal. De la misma forma, el $\angle AED$ y el $\angle DEB$. Por tanto, se tiene que $\angle CEA + \angle AED = 180°$ y $\angle AED + \angle DEB = 180°$. Restando miembro a miembro, se obtiene que $\angle CEA - \angle DEB = 0°$ por lo que, $\angle CEA = \angle DEB$ y entonces $\angle CEA \cong \angle DEB$.

2. Todo ángulo agudo tiene complemento y suplemento.

Demostración:

Un ángulo agudo mide menos de 90°, sea su medida a. Por tanto, tiene un complemento cuya medida es $90 - a$. De igual forma, la medida de su ángulo sumada con la de un ángulo obtuso cuya medida es $180 - a$ es 180°, por ello, también tiene un suplemento.

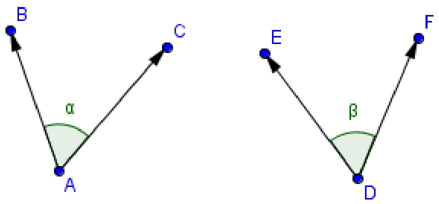
3. Los ángulos obtusos tienen sólo suplemento.

Demostración:

Un ángulo obtuso mide más de 90°, por tanto, como la medida de un ángulo es un número positivo no puede tener complemento pero tiene un suplemento como en el caso anterior.

4. Los complementos de dos ángulos congruentes, son congruentes.

Demostración:



Sea la medida de $\angle BAC = \alpha$ y $\angle EDF = \beta$. Entonces, $\alpha = \beta$ ya que los ángulos son congruentes según hipótesis. De igual forma, α y β miden menos de 90° para poder tener complemento. Entonces el complemento de $\angle BAC$ mide $\gamma = 90° - \alpha$. Análogamente, el complemento de $\angle EDF$ mide $\delta = 90° - \beta$. Pero como $\alpha = \beta$ entonces $\gamma = \delta$ y por tanto los complementos son congruentes.

5. Los suplementos de dos ángulos congruentes, son congruentes.

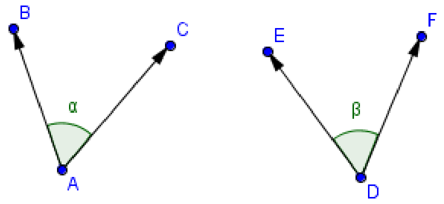
Demostración:

La demostración de este teorema es análoga a la del teorema anterior. Se deja al lector para practicar.

6. Dos ángulos que tienen el mismo complemento (o el mismo suplemento) son congruentes.

   Demostración:

   Para este teorema, sólo se demostrará el complemento y se dejará al lector el caso del suplemento como práctica.

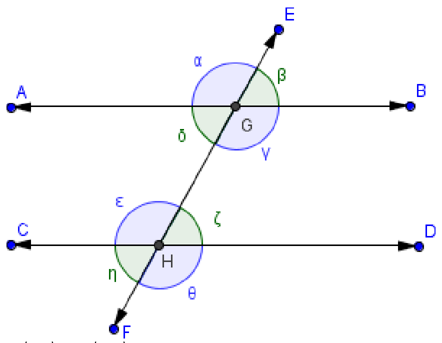
   Sea la medida de $\angle BAC = \alpha$ y $\angle EDF = \beta$. Para que los ángulos tengan complemento α y β miden menos de $90°$. Entonces el complemento de $\angle BAC$ mide $\gamma = 90° - \alpha$. Análogamente, el complemento de $\angle EDF$ mide $\delta = 90° - \beta$. Pero como $\gamma = \delta$ por hipótesis, entonces igualando se tiene que $90° - \alpha = 90° - \beta$ y de aqui llegamos a que $\alpha = \beta$ por lo que entonces los ángulos son congruentes.

Posiciones relativas de dos rectas

En un mismo plano, dos rectas distintas, pueden ser secantes o paralelas.

1. Rectas sectantes: son aquellas que se intersectan. Éstas, a su vez, se dividen en:
   - Oblícuas: si no determinan ángulo recto.
   - Perpendiculares: si determinan ángulo recto.
2. Rectas Paralelas: son aquellas que no se intersectan. Se utiliza el símbolo $\parallel$ para determinar que una recta es paralela a otra.

Ángulos determinados sobre dos paralelas y una secante



Si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, se determinan los siguientes ángulos:

1. Angulos alternos: que pueden ser internos ($\delta = \zeta, \quad \epsilon = \gamma$) y externos ($\alpha = \theta, \quad \beta = \eta$).
2. Angulos correspondientes: $\alpha = \epsilon, \quad \beta = \zeta, \quad \delta = \eta, \quad \gamma = \theta$.
3. Angulos conjugados: que pueden ser internos ($\delta + \epsilon = 180°, \quad \gamma + \zeta = 180°$) y externos ($\alpha + \eta = 180°, \quad \beta + \theta = 180°$).

Si las rectas no son paralelas, se definen los pares de ángulos con los mismos nombres pero no se cumplen las propiedades mencionadas.

Triángulos

Se llama triángulo a la figura formada por la reunión de los segmentos determinados al unir tres puntos no colineales.

Clasificación de triángulos

Se clasifican los triángulos por sus lados y por sus ángulos.

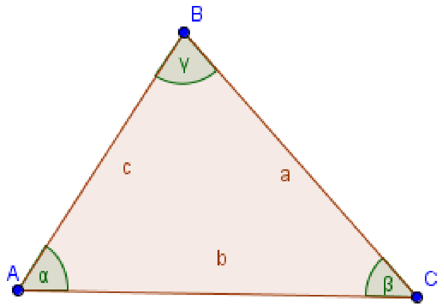
1. Por sus lados: se clasifican en escaleno, isósceles y equilátero.
   - Escaleno: no tiene lados congruentes.
   - Isósceles: Tiene dos lados congruentes. El tercero se llama base. Los ángulos en la base son congruentes.
   - Equilátero: Tiene tres lados congruentes. Cada ángulo interior mide $60°$.

2. Por sus ángulos: se clasifican en:
    - Triángulo rectángulo: tiene un ángulo recto. Los lados que determinan dicho ángulo se llaman catetos y el tercero es la hipotenusa.
    - Triángulo acutángulo: si sus ángulos interiores son agudos.
    - Triángulo obtusángulo: tiene un ángulo obtuso.

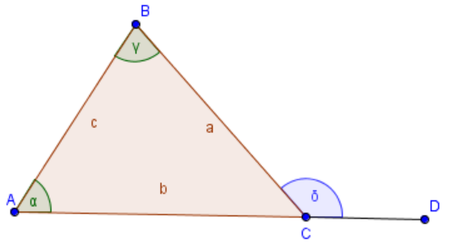
Propiedades Básicas

En todo triángulo:

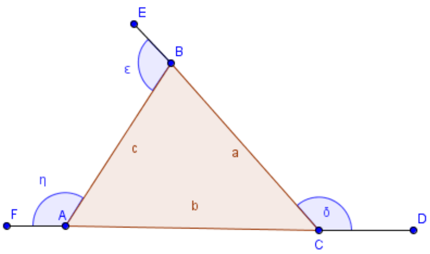
1. Las medidas de los ángulos interiores suman 180°. Entonces $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.



2. Cualquier ángulo exterior mide igual que la suma de dos interiores no adyacentes. Entonces $\alpha + \beta = \delta$.

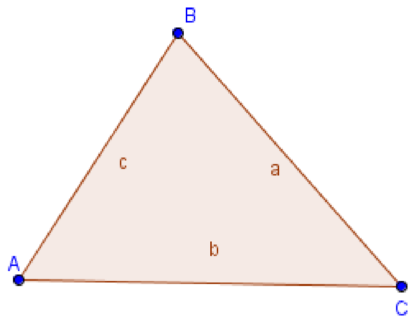


3. Las medidas de los ángulos exteriores, uno por vértice, suman 360°.



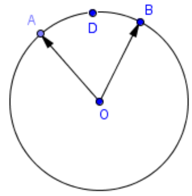
4. En un mismo triángulo, a ángulos congruentes se oponen lados congruentes y viceversa.

5. Cualquier lado es mayor que la diferencia de longitudes de los otros dos y menor que su suma. Esta propiedad se conoce como Desigualdad Triangular. Si $c > b > a$, entonces $b < a + c$ y $b > c - a$.

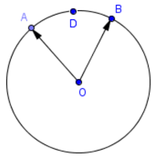


Ángulos en la Circunferencia

Para trabajar con los ángulos en la circunferencia, debemos definir lo que se entenderá por arco de una circunferencia. Sea O el centro de la circunferencia, y sean A y B puntos que están en ella pero que no son los extremos de un diámetro como se puede ver en la figura. Entonces, el arco menor $\widehat{AB}$ es la reunión de A, B y todos los puntos de la circunferencia que están en el interior del $\angle APB$. El arco mayo $\widehat{AB}$ es la reunión de A, B y todos los puntos de la circunferencia que están en el exterior del $\angle APB$. En cada caso, A y B son los extremos del arco $\widehat{AB}$. Ahora bien, como siempre puede haber doble interpretación para $\widehat{AB}$ se suele incluir algún otro punto entre los extremos del arco para determinar de cuál de los dos arcos se está hablando evitando asi el uso de la palabra menor o mayor. En el caso que se muestra en la figura, si queremos hablar del arco menor $\widehat{AB}$, usaremos $\widehat{ADB}$.



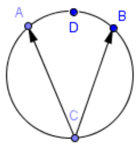
Definición: Un ángulo central de una circunferencia es un ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia. La medida en grados de un arco menor es la medida del ángulo central correspondiente. Esto se expresa asi:



Ángulo central: $\angle AOB = \widehat{ADB}$

Definición: Un ángulo está inscrito en un arco, si los lados del ángulo contienen los extremos del arco y el vértice del ángulo es un punto, pero no un extremo, del arco.

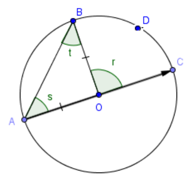
Teorema: La medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo central.



Ángulo inscrito: $\angle ACB = \frac{\widehat{ADB}}{2}$

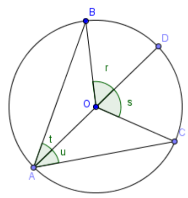
Demostración: Existen tres casos posibles.

Caso 1: Consideremos primero el caso en que el $\angle BAC$ contiene el diámetro de la circunferencia como se ve en la figura. Sea $\angle BOC = r$, $\angle BAO = s, \angle ABO = t$. Entonces, por la propiedad del ángulo exterior de un triángulo $r = s + t$. Ahora bien, como los segmentos BR y AP son radios de la circunferencia, son congruentes teniéndose entonces que el triángulo ABO es isósceles. Por tanto, $r = s$. De allí, $s = \frac{r}{2}$ y se obtiene que la medida del ángulo inscrito BAC es la mitad de la medida del ángulo central BOC.



Caso 2: Supongamos ahora que B y C están en lados opuestos del diámetro que pasa por A, como se muestra en la figura. Por el caso 1, sabemos que $t = \frac{r}{2}$ y $\frac{s}{2}$. En consecuencia, por adición, $t + u = \frac{1}{2}(r + s)$.

Pero $\angle BAC = t + u$ y $\angle BOC = r + s = \widehat{BDC}$ por tanto, $\angle BAC = \frac{\widehat{BDC}}{2}$.



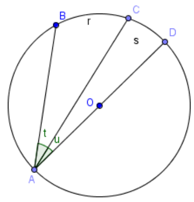
Caso 3: Finalmente, supongamos que B y C están en el mismo lado del diámetro que pasa por A, como se muestra en la figura. Entonces,

$$r + s = \widehat{BCD} \text{ y } t + u = \angle BAD$$

Por el caso 1,

$$t + u = \frac{1}{2}(r + s)$$

por tanto, $u = \frac{1}{2}r$ y como en los otros casos, $\angle BAC = \frac{\widehat{BC}}{2}$.

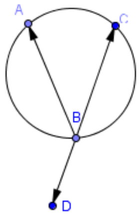


Colorario: Un ángulo cualquiera inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

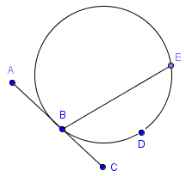
Colorario: Dos ángulos cualesquiera inscritos en el mismo arco son congruentes.

Ambas demostraciones se derivan de lo hecho anteriormente y las proponemos de ejercicio para el lector.

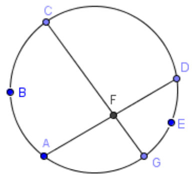
Otros ángulos interesantes en la circunferencia son los siguientes cuyas demostraciones se dejan al lector.



1. Ángulo ex-inscrito: $\angle DBC = \frac{\widehat{ACB}}{2}$

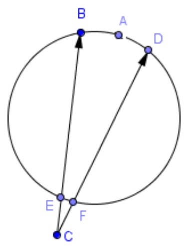


2. Ángulo semi-inscrito: $\angle EBC = \frac{\widehat{EDB}}{2}$

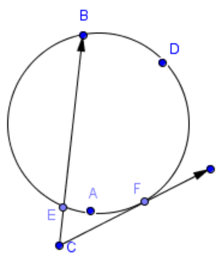


3. Ángulo interior: $\angle CFA = \frac{\widehat{DEG}+\widehat{ABC}}{2}$

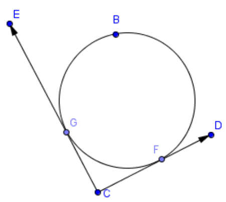
4. Ángulo exterior:



a) de dos secantes: $\angle BCD = \frac{\widehat{BAD}-\widehat{EF}}{2}$

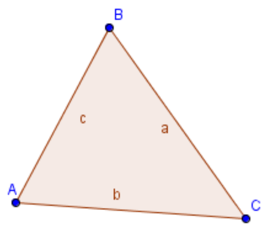


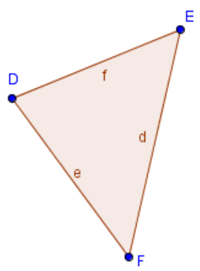
b) de secante y tangente: $\angle BCD = \frac{\widehat{BDF}-\widehat{EAF}}{2}$



c) de dos tangentes: $\angle ECD = \frac{\widehat{GBF}-\widehat{GF}}{2}$

Congruencia de Triángulos





Dos triángulos se llaman congruentes, si tienen sus lados y ángulos, respectivamente congruentes. Si $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ entonces los segmentos AB y DE, BC y EF, y AC y DF, son congruentes respectivamente. De la misma manera, $\angle ABC \cong \angle CEF$, $\angle BCA \cong \angle EFD$, $\angle CAB \cong \angle FDE$.

Por otro lado, a lados congruentes, uno en cada triángulo, se oponen ángulos congruentes y viceversa. Para que dos triángulos sean congruentes, deben cumplir con alguno de los casos de congruencia. En ellos se menciona como requisito que presente tres pares de elementos congruentes, siendo por los menos uno de ellos un lado.

1. Postulado ALA: Un par de lados y los ángulos adyacentes a ellos.
2. Postulado LAL: Dos pares de lados y el ángulo comprendido.
3. Postulado LLL: Los tres pares de lados.

Problemas Resueltos

1. Se tienen los ángulos consecutivos $\angle AOB, \angle BOC$ y $\angle COD$, siendo: $\angle AOC = 47°, \angle BOD = 51°$, y $\angle AOD = 80°$. Hallar la medida del $\angle BOC$.

   Solución: Primero calculamos la medida de $\angle COD$. $\angle COD = \angle AOD - \angle AOC = 80° - 47° = 33°$. Entonces $\angle BOC = \angle BOD - \angle COD = 51° - 33° = 18°$.

2. Hallar la medida de un ángulo, sabiendo que su complemento y suplemento suman 208°.

   Solución: Sea x la medida del ángulo pedido. Entonces, según el enunciado $(90° - x) + (180° - x) = 208°$. Entonces, $270° - 2x = 208°$) de donde $2x = 62°$ y de allí $x = 31°$.

3. El doble del complemento de un ángulo, más el triple del suplemento del mismo, es 500°. Hallar la medida del ángulo.

   Solución: Sea x la medida del ángulo pedido. Entonces, según el enunciado $2(90° - x) + 3(180° - x) = 500°$. Entonces, $180° - 2x + 540° - 3x = 500°$) de donde $720° - 5x = 500°$ y de allí $5x = 220°$ concluyendo que $x = 44°$.

4. El suplemento del complemento de un ángulo es igual a 3/2 de la diferencia entre el suplemento y el complemento de dicho ángulo.

   Solución: Sea x la medida del ángulo pedido. Entonces, según el enunciado:

   $$180° - (90° - x) = \frac{3}{2}[(180° - x) - (90° - x)]$$

   Efectuando:

   $$90° + x = \frac{3}{2}[180° - x - 90° + x]$$

   $$90° + x = \frac{3}{2}(90°)$$

   $$90° + x = 135°$$

   $$x = 45°.$$

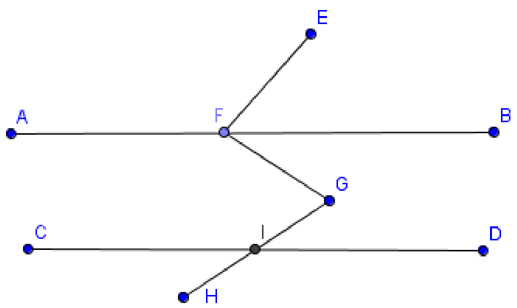
5. Dada la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ y un punto O sobre ella, a un mismo lado se trazan los rayos $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, tal que $\overrightarrow{OA}$ sea interior al $\angle POB$ y $\angle AOP = 54°$. Hallar la medida de $\angle AOB$ si $\angle QOB$ es el suplemento del triple de $\angle BOA$.

   Solución: Según el enunciado:

   $$\angle POA + \angle AOB + \angle BOQ = 180°$$

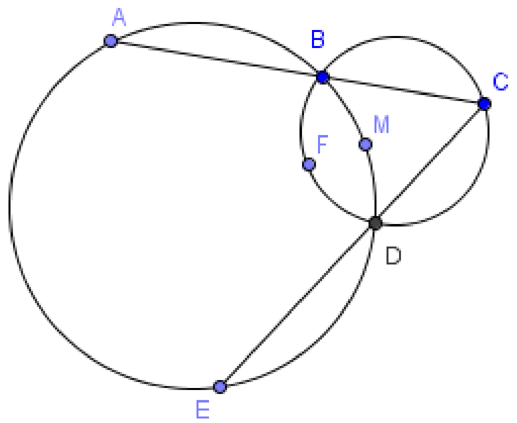
   Entonces $54° + x + (180° - 3x) = 180°$ de donde se obtiene que $x = 27°$.

6. Hallar la medida del $\angle AFE$ si los segmentos AB y CD son paralelos y se sabe que $\angle EFG = 100°$ y $\angle DIH = 3\angle BFG$.



Solución: Primero hallamos el valor de $\angle BFG$. Si trazamos una paralela a los segmentos AB y CD por el punto G tendríamos que los ángulos $\angle FGI = \angle BFG + \angle GID$ dado los ángulos alternos internos que se generan. Por tanto, $100^\circ = \angle BFG + 180^\circ - 3\angle BFG$, de donde se obtiene que $\angle BFG = 40^\circ$. Luego, $\angle EFB = 90^\circ - \angle BFG$ entonces $\angle EFB = 50^\circ$ y por ello $\angle AFB = 130^\circ$.

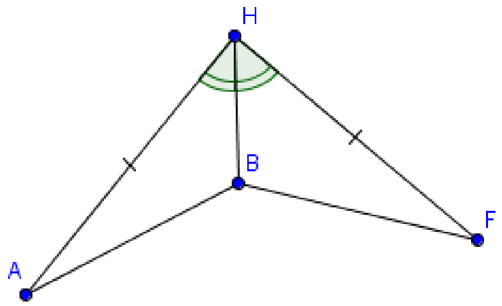
7. En la figura $\widehat{AE} = 192^\circ$ y $\widehat{BFD} = 140^\circ$. Hallar la medida del $\widehat{BMD}$.



Solución: En la menor circunferencia, $\angle ACE = \frac{\widehat{BFD}}{2}$ por ser el $\angle BCD$ inscrito. Por ello, $\angle ACE = 70^\circ$.

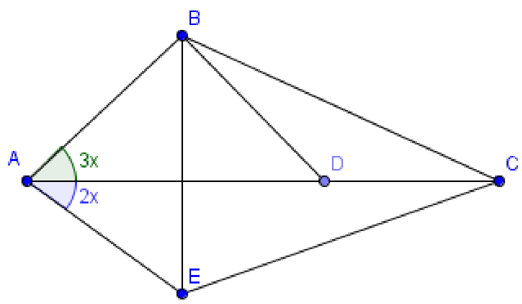
En la mayor circunferencia, $\angle ACE = \frac{\widehat{AE} - \widehat{BMD}}{2}$ por ser el $\angle BCD$ exterior. Por ello, $70^\circ = \frac{192^\circ - \widehat{BMD}}{2}$ de donde $\widehat{BMD} = 52^\circ$.

8. En la figura, $AH = FH, \angle AHB = \angle FHB$. Probar que $\angle HAB = \angle HFB$.



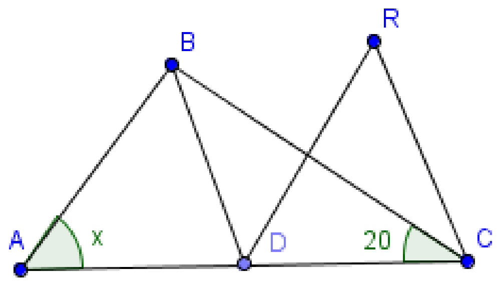
Solución: Como todo segmento es congruente consigo mismo $\overline{HB} \cong \overline{HB}$. Por hipótesis se sabe $AH = FH, \angle AHB = \angle FHB$ por tanto, por el postulado LAL se tiene que $\triangle AHB \cong \triangle FHB$ y por ello, $\angle HAB = \angle HFB$.

9. En la figura $AB = BC; AE = CD$ y $\angle BED \cong \angle BDE$. Halle el valor de x.

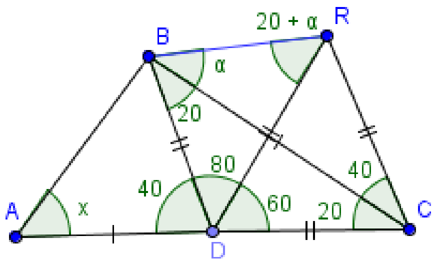


Solución: Observando los segmentos que son congruentes se tiene que $\triangle ABC$ es isósceles, por tanto, $\angle ACB = \angle BAC = 3x$. Por otro lado, que $\angle BED \cong \angle BDE$ nos dice que $\triangle BED$ es isósceles por lo que $EB = DB$. Entonces, dado que $AB = BC; AE = CD$ y $EB = DB$, por el postulado LLL se tiene que $\triangle BCD \cong ABE$. Como consecuencia se tiene que $\angle BCD = \angle BAE = 5x$. Observando lo que ocurre en el ángulo C se tiene que $\angle BCD$ es par lineal de $\angle ACB$ entonces, $3x + 5x = 180°$ de donde se obtiene que $x = 22{,}5°$.

10. En la figura, $AD = BC; BD = CD$ y el $\triangle CDR$ es equilátero. Hallar x.



Solución: Trazamos primero $\overline{BR}$. Utilizando la información suministrada se puede obtener lo siguiente: $\angle BCR = 40°$ ya que el ángulo DCR mide $60°$ por pertencer a un triángulo equilátero. El $\angle DBC = 20°$ por ser el triángulo BCD es isósceles. Por tanto, el $\angle BDR = 80°$ porque la suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$. De esta forma, el $\angle ADB = 40°$. Ahora aplicando el postulado LAL el triángulo BRC es congruente al triángulo ABD ya que $AD = BC, BD = RC$ y $\angle ADB = \angle BCR$. Entonces obtenemos que $x = \alpha$. Como el triángulo BDR es isósceles, el $\angle BDR = 20° + \alpha$. Por ello, $2(20° + \alpha) + 80° = 180°$ entonces $\alpha = 30°$, y por tanto, $x = 30°$.



Problemas Propuestos

1. Sean los ángulos consecutivos $\angle AOB, \angle BOC,$ y $\angle COD$, siendo $2(\angle AOB) = 3(\angle COD)$; $\angle AOB = 92°$ y $\angle BOD = 76°$. Hallar la medida del $\angle BOC$.

2. Las medidas de dos ángulos suplementarios son entre sí, como 3 a 7. Hallar el complemento del menor.

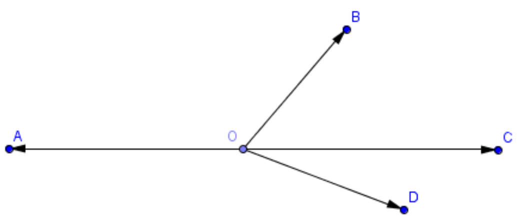
3. El doble de la medida de un ángulo es igual al triple de la medida de su complemento. Hallar la medida del ángulo.

4. Si los 3/2 del complemento de un ángulo α es igual al suplemento del complemento del mismo ángulo. Hallar α.

5. Hallar la medida de un ángulo tal que el triple de su complemento sea igual al suplemento de su mitad.

6. La suma de las medidas de dos ángulos es $80°$ y el complemento de la medida del primero es igual al doble de la medida del segundo. Calcular la diferencia de dichos ángulos.

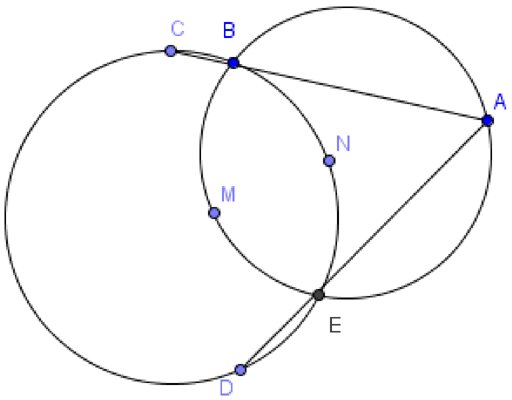
7. En la figura $\angle BOD = 80°$ y $\angle AOD - \angle AOB = 12°$. Halle la medida del $\angle BOC$.



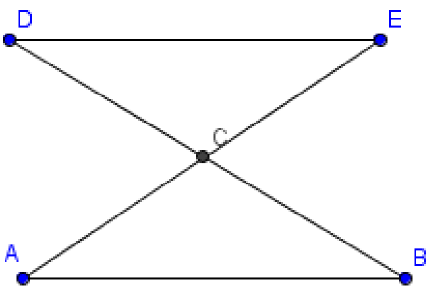
8. La diferencia entre la suma de suplementos y la suma de complementos de dos ángulos que se diferencian en $20°$, es igual al doble de la suma de dichos ángulos.

9. Los segmentos OA y OB son radios de una circunferencia de centro O. Sobre el menor arco $\widehat{AB}$ se toma el punto F. Si el ángulo AFB mide $130°$, hallar la medida del ángulo AOB.

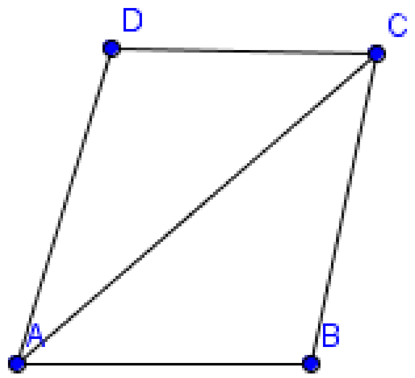
10. La figura muestra dos circunferencias congruentes. $\widehat{CD} = 164°$. Hallar la medida del $\angle BAE$.



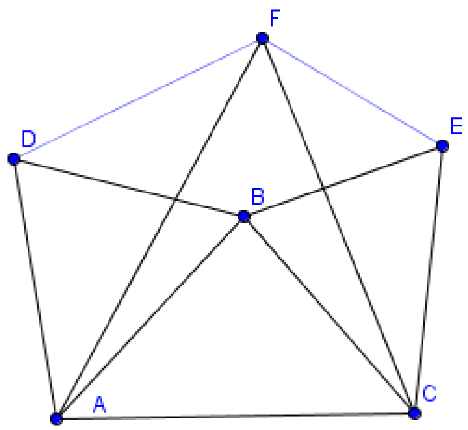
11. En la figura, $\overline{AE}$ intersecta a $\overline{BD}$ en C, tal que $AC = DC$ y $BC = EC$. Demostrar que $\angle EAB \cong \angle CDE$.



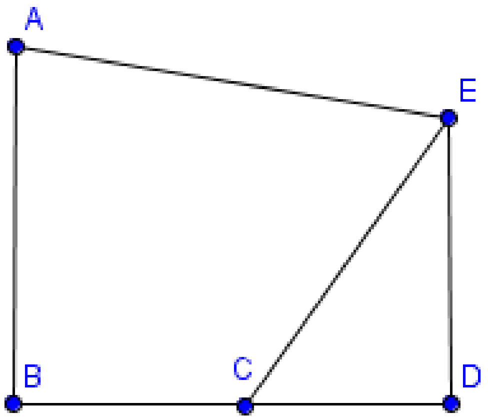
12. En la figura, $AB = CD$, y $\angle DCA = \angle BAC$. Demostrar que $\angle ACB = \angle DAC$



13. En la figura, $\triangle ADB, \triangle AFC$ y $\triangle BEC$ son triángulos equiláteros; calcular $\angle DFE$, si el ángulo ABC es recto.



14. En la figura $AE = EC$; $\overline{AE} \perp \overline{EC}$; $\overline{AB} \perp \overline{BC}$; $\overline{ED} \perp \overline{DC}$. Si $BC = 3$ y $ED = 5$, Hallar AB.



15. En la base de un triángulo isósceles ABC, $(AB = BC)$, se toma un punto cualquiera P, y se trazan $\overline{PE} \perp \overline{AB}$, $\overline{PF} \perp \overline{BC}$. Si $\overline{AH}$ es altura, demostrar que $AH = PE + PF$.

16. En la figura $AE = EC = BC$. Hallar la medida del $\angle ABC$ en función de r.