Algoritmo de la División I, Números primos II e Introducción a los residuos

1. División en casita

El algoritmo de la división, es uno de los algoritmos básicos en la teoría de números que nos va a permitir obtener resultados interesantes y trabajar con los residuos de los números. Aún así, en realidad es muy sencillo si lo vemos como la división tradicional de la casita:

$$\begin{array}{r|l} & \underline{\;q\;} \\ a & n \\ & r \end{array}$$

Donde q es conocido como el cociente y r conocido como el residuo. Otra forma de verlo (que en realidad es el verdadero algoritmo de la división) es escribir el número n como $aq + r$. Ahora bien, es importante notar que en el estricto sentido, el residuo r debe de ser siempre un número entre 0 y a-1, ya que sino el número a "cabría" más veces en el número n. La mayor parte del tiempo no nos interesará el valor de q, pues utilizaremos sólo las propiedades del residuo.

2. Formas de los números

Este algoritmo de la división nos permite clasificar a los números con base en su residuo al dividirlos por alguno de los números. Por ejemplo, si tomamos a (el divisor) como 5, los números nos pueden dejar residuos 0, 1, 2, 3 y 4. Finalmente, podemos decir que esos respectivos números son de la forma 5q, 5q+1, 5q+2, 5q+3 y 5q+4. Sin importarnos el verdadero valor de q.

3. Distribución de los residuos

Es muy sencillo darse cuenta que los residuos de los números se repiten cíclicamente formando un patrón 1, 2, 3, 4, …, a-2, a-1, 0, 1, 2, 3, …, a-2, a-1, 0, 1, 2, etc.

4. El caso particular de la paridad

En el caso particular de el número 2, podemos obtener propiedades interesantes al analizar la paridad o formalizar algunas propiedades que ya hemos utilizado antes. Primero se observa que los residuos posibles al dividir entre 2 son 0 y 1, por lo cual las formas de los números enteros serán de la forma 2k y 2k+1. Así pues, por ejemplo podemos demostrar las propiedades de la suma de números pares e impares:

Un número impar más un número impar es par - Como ambos números son impares, quiere decir que sus residuos son 1 al dividirlos entre 2, por lo cual ambos son de la forma 2k+1. Luego, si los sumamos, (2k+1) + (2q+1) = (2k+2q+2)=2(k+q+1), que entonces es de la forma 2k, por lo cual es par.

5. Operaciones y resultados usando las formas de los números - Compatibilidad de las formas de los números

Ahora bien, podemos pues realizar algunas operaciones con la forma de los números, sin embargo para hacer esto debemos de estar dividiendo siempre entre el mismo número.

6. Compilación de formas de un número (T. Chino de Residuos)
7. Utilizando el algoritmo de la división con trampa (residuos negativos y mayores al divisor)
8. Las formas de los números primos al dividirlos entre 2, 4, 6, 8
9. La división entre 10 y las operaciones con la última cifra
10. Los criterios de divisibilidad y cálculo rápido del residuo al dividir entre 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 y 10

11. Los residuos de los cuadrados

Problemas

1. Demostrar que si un número primo es de la forma 3k+1 entonces es de la forma 6k+1
2. Demostrar que si un número primo es de la forma 3k+2, entonces es de la forma 6k+5
3. Demuestra (usando el algoritmo de la división) las propiedades de la paridad en la suma, resta y multiplicación.
4. ¿Cuál es el residuo de dividir 2n entre n-1?
5. ¿Cuál es el residuo de dividir $n^2 - 1$ entre n?
6. Demostrar que 3, 5 y 7 es la única terna de números primos que son impares consecutivos.
7. Encuentra todas los enteros positivos n tales que n divide a $3n + 7$
8. ¿Cuántos números n existen tales que el cociente de dividir n entre 100 y el residuo de dividir n entre 100 es múltiplo de 11?
9. Encuentra el menor número tal que al dividirlo entre 2, deja residuo 1; al dividirlo entre 3 deja residuo 1, al dividirlo entre 4 deja residuo 1, al dividirlo entre 5 deja residuo 1, al dividirlo entre 6 deja residuo 1 y al dividirlo entre 7 deja residuo 1.
10. Encuentra el menor número tal que al dividirlo entre 2, deja residuo 1; al dividirlo entre 3 deja residuo 2, al dividirlo entre 4 deja residuo 3, al dividirlo entre 5 deja residuo 4, al dividirlo entre 6 deja residuo 5 y al dividirlo entre 7 deja residuo 6.
11. Encuentra el mayor número de 4 dígitos que al dividirse entre 2, 3, 4, 5, 6, y 7, deja residuo 1 en cada caso.
12. Tres hermanos heredan n piezas de oro, con pesos 1, 2, 3...n. ¿Para qué n pueden repartirse las piezas?
13. Encuentra cinco números primos tales que están en progresión aritmética de diferencia 6, demuestra que no hay otro grupo de cinco primos con esa condición.
14. Demuestra que para todo entero a impar, $a^2 - 1$ es divisible por 4
15. Demuestra que para todo entero a impar, $a^2 - 1$ es divisible por 8
16. ¿Cuáles son los posibles residuos de un número primo al dividirlo entre 4? ¿y entre 6?
17. Demuestra que si dos números enteros a y b cumplen que su producto es 12313942398007, entonces uno de ellos es de la forma 4k+1 y el otro de la forma 4q+3.
18. ¿Cuáles son los dos últimos dígitos de 11^{2010}?
19. Demuestra que 1000000000000000003 tiene un divisor primo de la forma 4k+3
20. ¿Por qué es mejor hacer la criba de Eratóstenes con 6 columnas que con 10?
21. Demuestra que hay un número infinito de números primos de la forma 4k+3 (Sugerencia: observa la demostración de que hay infinitos primos y trata de hacer algo parecido pero garantizando que te resulta un número de la forma 4k+3)
22. Demuestre el criterio de divisibilidad del 11
23. Se define la siguiente función f(n)
    a. Si n es un número de la forma 3k, entonces f(n)= $\frac{n}{3}$
    b. Si n es un número de la forma 3k+1, entonces f(n)= $2n + 1$
    c. Si n es un número de la forma 3k+2, entonces f(n)= $2n - 1$

Demuestre que para todo entero n, se puede llegar al número 1 aplicando sucesivamente la función (es decir, que existe un entero i tal que si aplicamos sucesivamente la función a un número i veces, llegamos al número 1).

24. Demuestre que si m es un número impar, entonces $2m$ es un número de la forma $4k+2$.
25. Se tiene un número de la forma $3k+2$ y de la forma $2q+1$ al mismo tiempo. ¿Qué residuo deja al dividirlo entre 6?
26. Sea N = 20172017 . . . 2017, el número formado al pegar 2017 veces el 2017. ´ ¿Cuál es el número más cercano a N que es múltiplo de tres?.
27. Encuentra todas las parejas de enteros positivos (n, k) que satisfacen $n^3 - 2 = k!$
28. Encuentre todos los números primos p tales que el número $2p+5$ es el cuadrado de un número entero.
29. Justifica porque el producto de cualesquiera 3 números naturales consecutivos es divisible entre 6.
30. Sea p_n el n-ésimo número primo. Demuestre que el número $p_1 \times p_2 \times p_3 \times ... \times p_n + 1$ no puede ser el cuadrado de un número entero.
31. Demuestra que para toda n, existen n enteros consecutivos que son compuestos (Sugerencia: ¿Qué pasa si el primero de ellos fuera $(n+1)!+2$?
32. Sean p_1, p_2, p_3 y p_4 cuatro números primos distintos tales que 2p_1 + 3p_2 + 5p_3 + 7 p_4 = 162, 11p_1 + 7p_2 + 5p_3 + 4p_4 = 162. Encuentra todos los posibles valores del producto $p_1 \times p_2 \times p_3 \times p_4$.
33. Se sabe que para un número natural n, el número $n^3 + 2009n + 27n$ termina en 3. Encuentra los tres últimos dígitos del número (Sugerencia: “Divide” entre 1000 y observa el residuo, ¿qué pasa si le sumas 27 al residuo?)
34. Demuestre que sin importar qué números enteros naturales sean m y n, el número $mn(m+n)(m-n)$ es divisible siempre por 3.
35. ¿De qué forma pueden ser los números cuadrados perfectos al dividirlos entre 2? ¿y entre 3? ¿y entre 4? ¿y entre 5?
36. Demuestra que si a es un número impar y no es múltiplo de 3, entonces $24 \mid a^2 - 1$
37. Demuestre que si el residuo de dividir un número x entre n se denota como $r_n(x)$, entonces:
    a. $r_n(r_n(x) + r_n(y)) = r_n(x+y)$
    b. $r_n(r_n(x) \cdot r_n(y)) = r_n(x \cdot y)$
38. Demuestra que un número es divisible por 9 si y sólo si la suma de sus dígitos en divisible por 9 (criterio del 9).
39. Demuestra que si la suma de los dígitos de un número n es s, entonces $r_9(n) = r_9(s)$
40. Calcula el resto de la división de $(3421098765434566432134567)^2$ entre 9.
41. Sean a, b y c enteros tales que $a^2 + b^2 = c^2$. Prueba que:
    a. a o b es par
    b. a o b es divisible por 3
    c. a o b o c es divisible por 5

    d. a o b es divisible por 4

42. Probar que ningún entero positivo de la forma $8k + 7$ puede expresarse como la suma de tres cuadrados enteros
43. Sean p y q primos distintos, ambos mayores a tres. Probar que si $p - q$ es una potencia de 2, entonces $p+q$ es divisible por 3