Algunas Estrategias Básicas para la Resolución de Problemas de Olimpíadas Matemáticas

José H. Nieto (jhnieto@luz.ve)

Resumen

En estas notas se enuncian cuatro estrategias básicas para la solución de problemas matemáticos y se ilustra su aplicación con varios ejemplos, muchos de ellos tomados de olimpíadas realizadas en el ámbito latinoamericano.

1. Introducción

Para resolver problemas matemáticos no existen recetas infalibles. Aunque los conocimientos y la técnica juegan un rol importante, no son suficientes: para ser un buen solucionista también hacen falta ingenio, creatividad,control, motivación y otras cualidades y habilidades.

Muchos expertos afirman que la única manera de aprender a resolver problemas es... ¡resolviendo muchos problemas! Así como un buen deportista debe dedicar muchas horas a su entrenamiento, quien desee llegar a ser un hábil solucionista de problemas debe dedicarle suficiente tiempo a esta actividad.

Sin embargo existen algunos principios y estrategias que los buenos solucionistas aplican, de manera consciente o inconsciente. A ese conjunto de nociones útiles para resolver problemas se le llama *heurística*, y su conocimiento y aplicación puede ser de mucha utilidad para los que se inician. El primero en llamar la atención sobre la importancia de la heurística fue George Polya [2].

En estas notas se enuncian cuatro estrategias básicas para la solución de problemas matemáticos de tipo olímpico y se ilustra su aplicación a la solución de problemas tomados de varias competencias matemáticas realizadas en el ámbito latinoamericano.

2. Estrategias

En esta sección enunciaremos algunos de los principios heurísticos más útiles (según la experiencia del autor), ejemplificando su aplicación en la solución de problemas de tipo olímpico.

2.1. Figuras y diagramas

El proverbio *una figura vale más que mil palabras* tiene plena validez en la resolución de problemas matemáticos. Por eso nuestra primera estrategia es:

Estrategia 1. ***Siempre que sea posible dibuje una figura.***

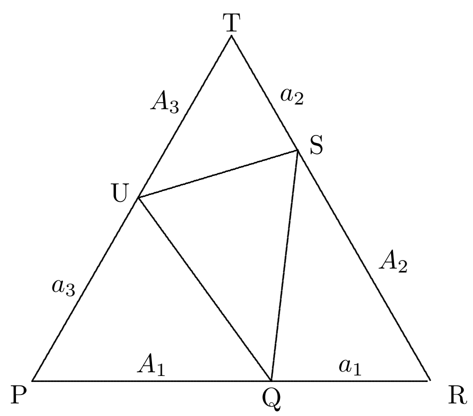
La importancia de este principio es obvia cuando se trata de resolver un problema de geometría. Pero hay muchos problemas que sin ser de geometría admiten una interpretación geométrica, lo cual amplía mucho el verdadero alcance de esta estrategia. Los siguientes ejemplos ilustran lo dicho.

Problema 2.1 (Olimpiada Bolivariana 2000).
Sean a_1, A_1, a_2, A_2, a_3, A_3 números reales positivos tales que $a_i + A_i = k$, donde k es una constante dada.

a) Demostrar que
$$a_1A_2 + a_2A_3 + a_3A_1 < k^2.$$

b) Sean a_1, A_1, a_2, A_2, a_3, A_3, a_4, A_4 reales positivos tales que $a_i + A_i = k$, donde k es una constante dada. Si $a_i \geq A_i$, demostrar que
$$a_1A_2 + a_2A_3 + a_3A_4 + a_4A_1 \leq k^2,$$
y determinar cuándo se tiene la igualdad.

Solución. Cada igualdad $a_i + A_i = k$ puede representarse mediante un segmento de longitud k dividido en dos partes de longitudes a_i y A_i. Con estos tres segmentos podemos construir un triángulo equilátero como se muestra en la figura:



El producto a_1A_2 está relacionado con el área del triángulo QRS, que denotaremos $|QRS|$. De hecho como $\angle QRS = 60°$ se tiene que $|QRS| = a_1A_2\sqrt{3}/4$.

Del mismo modo $|STU| = a_2 A_3 \sqrt{3}/4$ y $|UPQ| = a_3 A_1 \sqrt{3}/4$, mientras que $|PRT| = k^2\sqrt{3}/4$. Observando la figura es obvio que

$$|QRS| + |STU| + |UPQ| < |PRT|,$$

y multiplicando por $4/\sqrt{3}$ resulta la desigualdad de la parte (a).

La parte (b) es tal vez más fácil: basta dibujar un cuadrado de lado k y dentro del mismo cuatro rectángulos correspondientes a los productos del miembro izquierdo de la desigualdad. □

Problema 2.2 (Olimpiada Bolivariana 2000).
Sea n un entero positivo par. Halle todas las ternas de números reales (x, y, z) tales que

$$x^n y + y^n z + z^n x = xy^n + yz^n + zx^n.$$

Solución. A primera vista parece difícil dibujar una figura que corresponda a este problema. Sin embargo si escribimos la condición en la forma equivalente

$$x^n(y - z) + y^n z = xy^n + z^n(y - x)$$

y restamos y^{n+1} a ambos miembros resulta

$$x^n(y - z) + y^n(z - y) = (x - y)y^n + z^n(y - x)$$

o bien

$$(y^n - x^n)(z - y) = (z^n - y^n)(y - x). \tag{1}$$

De aquí es claro que si dos de las tres cantidades x, y, z son iguales la tercera también debe serlo, por lo tanto todas las ternas (x, x, x) cumplen la condición. Para las ternas con las tres componentes distintas, luego de dividir ambos miembros de (1) entre $(z - y)(y - x)$ resulta

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = \frac{y^n - z^n}{y - z}. \tag{2}$$

Esta ecuación se puede interpretar como una igualdad entre la pendiente de la recta que pasa por los puntos (x, x^n), (y, y^n) y la pendiente de la recta que pasa por los puntos (y, y^n),(z, z^n), es decir que la condición equivale a que los tres puntos (x, x^n), (y, y^n), (z, z^n) estén alineados. Pero como n es par la función $f(x) = x^n$ es convexa (su gráfica es una parábola para $n = 2$ y una curva parecida pero más achatada cerca del origen para $n = 4, 6, \ldots$) por lo cual no puede tener tres puntos diferentes alineados. □

2.2. Problemas con un parámetro entero

En muchos problemas se pide hallar todos los valores de un entero positivo n para los cuales determinada afirmación (dependiente de n) es verdadera. A falta de una idea brillante que solucione el problema de inmediato, una buena recomendación es la siguiente:

Estrategia 2. ***Estudie lo que sucede para los primeros valores de*** n ***hasta ver si emerge algún patrón característico, entonces formule una conjetura y trate de probarla.***

El siguiente problema es un buen ejemplo para aplicar esta estrategia.

Problema 2.3 (Olimpiada de Centro América y el Caribe 2001).
Al escribir un entero $n \geq 1$ como potencia de 2 o como suma de potencias de 2, donde cada potencia aparece a lo más dos veces en la suma, se tiene una *representación buena* de n. ¿Qué enteros positivos admiten un número par de representaciones buenas?

Solución. Sea $b(n)$ el número de representaciones buenas (r.b.) del entero n. Es fácil ver que $b(1) = 1$, $b(2) = 2$, $b(3) = 1$, $b(4) = 3$, $b(5) = 2$, $b(6) = 3$, $b(7) = 1$, $b(8) = 4$, $b(9) = 3$, $b(10) = 5$, $b(11) = 2$. El patrón aparente es que $b(n)$ es par si y sólo si n es de la forma $3k + 2$. El paso siguiente es probar esta conjetura por inducción. Ya sabemos que se cumple para los enteros del 1 al 11. Supongamos que es cierto para los enteros menores que $3k$ y tratemos de probarlo para $3k$, $3k + 1$ y $3k + 2$. Para esto sería bueno disponer de una relación de recurrencia que vincule cada valor de $b(n)$ con los valores anteriores.

Es claro que las r.b. de $2n+1$ deben incluir exactamente un 1, y si cada uno de los sumandos restantes se divide entre 2 resulta una r.b. de n. Por lo tanto $b(2n+1) = b(n)$. Las r.b. de $2n$ deben incluir dos unos o ninguno. Estas últimas son tantas como las r.b. de n, mientras que las primeras son tantas como las r.b. de $n-1$, es decir que $b(2n) = b(n) + b(n-1)$. Armados con estas dos relaciones de recurrencia consideremos ahora dos casos, según que k sea par o impar.

Si $k = 2r$ entonces $b(3k) = b(6r) = b(3r) + b(3r - 1)$, que es la suma de un impar y un par por la hipótesis inductiva, por lo tanto es impar. Por su parte $b(3k+1) = b(6r+1) = b(3r)$ es impar, y $b(3k+2) = b(6r+2) = b(3r)+b(3r+1)$ es par por ser suma de dos impares.

Si $k = 2r + 1$ entonces $b(3k) = b(6r + 3) = b(3r + 1)$ es impar, $b(3k + 1) = b(6r + 4) = b(3r + 1) + b(3r + 2)$ es impar, y $b(3k + 2) = b(6r + 5) = b(3r + 2)$ es par. □

Problema 2.4 (Olimpiada Bolivariana 2000).
Encontrar el número de formas de escribir enteros no negativos en cada casilla de un tablero de $n \times n$, de modo que la suma de los números en cada fila y cada columna sea igual a 3 y en cada fila y en cada columna sólo haya uno o dos números diferentes de cero.

Solución. Es fácil ver que para $n = 1$ hay una una sola forma (3) y para $n = 2$ hay cuatro formas, a saber:

$$\begin{matrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

Para $n = 3$ hay 6 formas usando tres 3, 18 formas usando un 3, un 2 y un 1 y 12 formas usando tres 2 y tres 1, para un total de 36. Esto nos lleva a conjeturar que para n cualquiera el número de formas es $(n!)^2$. Lo bueno de esta conjetura es que sugiere su propia demostración: como el número de permutaciones de los números del 1 al n es $n!$,si logramos mostrar que cualquier forma de llenar el tablero proviene de la elección, de manera independiente, de dos de estas permutaciones, no habrá más nada que hacer. Pues bien, sean a_i y b_i $(i = 1 \ldots n)$ dos permutaciones de los números del 1 al n y coloquemos en la fila i del tablero un 1 en la columna a_i y un 2 en la b_i si $a_i \neq b_i$, o un 3 en la columna a_i si $a_i = b_i$, rellenando el resto de la fila con ceros. Es fácil ver que la matriz obtenida cumple la condición del problema, y que así pueden obtenerse todas las formas válidas de llenar el tablero. □

2.3. Transformaciones e Invariantes

Muchos problemas están relacionados con *sistemas* cuyo estado se puede cambiar aplicando ciertas *transformaciones.* Los juegos pertenecen a esta categoría, así como muchos otros problemas en los cuales ee aplican en forma reiterada transformaciones geométricas o algebraicas.

Un *invariante* I es una función que a cada estado E del sistema le asocia un valor $I(E)$ de tal manera que, si de un estado E_1 se puede pasar a otro estado E_2 mediante una transformación válida, entonces $I(E_1) = I(E_2)$.

Enunciemos ahora nuestra siguiente estrategia:

Estrategia 3. ***Si en su problema hay un sistema que cambia de estado al aplicarle ciertas transformaciones, trate de hallar un invariante.***

Los invariantes son muy útiles para probar la imposibilidad de pasar de un estado a otro: si un invariante toma valores diferentes en dos estados, entonces es imposible pasar de uno al otro mediante transformaciones válidas. Comencemos por un ejemplo sencillo:

Problema 2.5. Considere la matriz de 100×100

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & \ldots & 99 & 100 \\
2 & 3 & 4 & \ldots & 100 & 1 \\
3 & 4 & 5 & \ldots & 1 & 2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\
99 & 100 & 1 & \ldots & 97 & 98 \\
100 & 1 & 2 & \ldots & 98 & 99
\end{array}$$

en la cual se permite sumar o restar un mismo número a todos los elementos de una fila o de una columna. Aplicando operaciones de este tipo, ¿será posible obtener una matriz con todos los elementos iguales?

Solución. Denotemos por $c(i,j)$ el elemento de la matriz que está en la fila i y en la columna j. Entonces $I = c(1,1) - c(1,100) - c(100,1) + c(100,100)$ es un invariante. En la posición inicial $I = 1 - 100 - 100 + 99 = -100$, pero en cualquier matriz con todos los elementos iguales I sería 0, por lo tanto la respuesta es negativa. □

Problema 2.6 (Olimpiada del Cono Sur, 2000).
En el plano cartesiano, considere los puntos con ambas coordenadas enteras y las rotaciones de 90 grados en sentido antihorario con centro en esos puntos. ¿Es posible, mediante una sucesión de esas rotaciones, transformar el triángulo de vértices (0, 0), (1, 0) y (0, 1) en el triángulo de vértices (0, 0), (1, 0) y (1, 1)?

Solución. Luego de algunos intentos fallidos uno comienza a pensar que es imposible. Si aplicamos las rotaciones permitidas al punto (0,0) vemos que se obtienen los puntos (1,1), (-1,1), (-1,-1), (1,-1), (2,0), (0,2), etc. pero en cambio no pueden obtenerse (1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1), (2,1), (1,2),... Esto nos sugiere que sólo pueden obtenerse puntos con suma de coordenadas par, como el origen. De hecho, la paridad $I(P) = x + y \bmod 2$ de la suma de ambas coordenadas de un punto $P = (x, y)$ es un invariante. En efecto, si se aplica a P la rotación R de centro (a, b) se obtiene $R(P) = (a + b - y, b - a + x)$. La diferencia entre la suma de coordenadas de $R(P)$ y P es $(a+b-y)+(b-a+x)-(x+y) = 2(b-y)$ que es par, luego $I(P) = I(R(P))$. Ahora bien, para el primer triángulo se tiene $I(0, 0) = 0$, $I(1, 0) = I(0, 1) = 1$, es decir que I es 0 en un vértice y 1 en los dos restantes, mientras que para el segundo $I(0, 0) = I(1, 1) = 0$, $I(1, 0) = 1$. Inmediatamente se concluye que es imposible transformar uno en otro. $\square$

Las estrategias ganadoras en juegos bipersonales suelen estar ligadas a invariantes, como en el siguiente problema:

Problema 2.7 (Olimpiada de Centro América y el Caribe 2002).
Dos jugadores A, B y otras 2001 personas forman un círculo, de modo que A y B no quedan en posiciones consecutivas. A y B juegan por turnos alternadamente empezando por A. Una jugada consiste en tocar a una de las personas que se encuentra a su lado, la cual debe salir del círculo. Gana el jugador que logre sacar del círculo a su oponente. Demostrar que uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y describir dicha estrategia.

Solución. Como 2001 es impar, en uno de los arcos que separan A de B hay un número par de personas interpuestas y en el otro una cantidad impar. Si A logra que se repita esa situación cada vez que sea su turno entonces ganará el juego, ya que la reducción del número de personas hará que eventualmente B quede a su lado. Esto lo logra A fácilmente tocando a su vecino en el arco par, dejando así un número impar de personas en cada arco. Al jugar B vuelven a quedar un arco par y otro impar. $\square$

El siguiente problema muestra una aplicación interesante de los invariantes para probar una relación.

Problema 2.8 (Olimpiada de Centro América y el Caribe 2002).
En el plano coordenado se tiene la cuadrícula de $n \times n$, con n entero mayor o igual que 2, cuyos vértices son los puntos de coordenadas enteras (x, y), con $0 \leq x \leq n$ y $0 \leq y \leq n$. Considere los caminos que van de $(0, 0)$ a (n, n) sobre las líneas de esta cuadrícula y que sólo avanzan hacia la derecha o hacia arriba.

Uno de tales caminos se llama *equilibrado* si la suma de los valores de x de todos los puntos por los que pasa es igual a la suma de todos los valores de y de esos mismos puntos. Muestre que todo camino equilibrado divide al cuadrado de lado n en dos figuras de la misma área.

Solución. Sea P_0, P_1,...,P_{2n} un camino. Pongamos $P_i = (x_i, y_i)$ y llamemos L al área que queda por debajo del camino y U al área que queda por encima. Sean P_{k-1}, P_k, P_{k+1} tres puntos consecutivos tales que el segmento $P_{k-1}P_k$ sea vertical y el segmento P_kP_{k+1} sea horizontal. Construyamos otro camino sustituyendo P_k por $P'_k = (x_k + 1, y_k - 1)$. Es claro que en el nuevo camino la suma de las x's aumenta en 1 respecto al camino original, mientras que el área debajo del camino disminuye en 1. Por lo tanto $I = L + \sum x_i$ es un invariante para estas transformaciones elementales de caminos. Como cualquier camino puede llevarse mediante sucesivas transformaciones de este tipo al camino que tiene n segmentos horizontales seguidos de n segmentos verticales, resulta que $L + \sum x_i = 0 + (0 + 1 + 2 + \cdots + n) + (n + \cdots + n) = n(n + 1)/2 + n^2$. Intercambiando los ejes se prueba del mismo modo que para cualquier camino se cumple $U + \sum y_i = n(n + 1)/2 + n^2$. Por tanto $L + \sum x_i = U + \sum y_i$. Esta igualdad muestra que $L = U$ si y sólo si $\sum x_i = \sum y_i$. □

2.4. El Principio Extremal

En muchos problemas se pide probar la *existencia* de un objeto que cumpla ciertas condiciones. En estos casos suele resultar útil prestar atención a los objetos que maximizan o minimizan alguna función convenientemente relacionada con la condición, y tratar de probar por absurdo que estos objetos cumplen la condición pedida. En resumen:

Estrategia 4. ***Examine los objetos que maximizan o minimizan alguna función relacionada con la condición del problema.***

Veamos esta estrategia en funcionamiento en el siguiente problema:

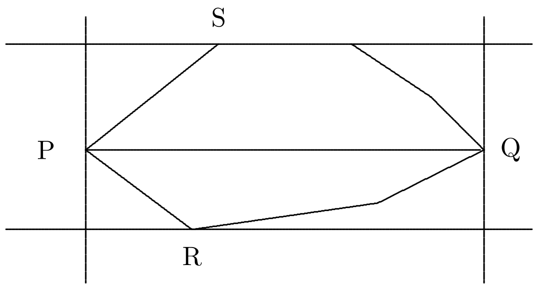
Problema 2.9.
En el parlamento unicameral de cierto país cada diputado tiene a lo sumo tres enemigos. Pruebe que es posible dividir el parlamento en dos cámaras de modo tal que cada diputado tenga, en su propia cámara, a lo sumo un enemigo.

Solución. Para cada partición P del conjunto de todos los diputados en dos cámaras definamos el grado de conflictividad $g(P)$ calculando el número de enemigos que cada diputado tiene en su propia cámara y sumando todos los valores resultantes. Esta función sólo toma valores enteros no negativos, por lo tanto debe existir una partición P en dos cámaras en la cual g toma su valor mínimo. Probemos ahora que en esta partición cada diputado tiene a lo sumo un enemigo en su propia cámara. En efecto, si un diputado tuviese más de un enemigo en su propia cámara, en la otra tendría a lo sumo uno (puesto que en total tiene a lo sumo tres). Entonces cambiándolo de cámara la suma $g(P)$ disminuiría al menos en una unidad, lo cual es absurdo. □

Las demostraciones por reducción al absurdo que resultan al aplicar esta estrategia pueden muchas veces convertirse en demostaciones constructivas. Por ejemplo en este problema podríamos haber comenzado con una partición cualquiera P_0 y si no cumple la condición pedida, cambiando un diputado de cámara se obtiene otra partición P_1 con menor conflictividad. Repitiendo este procedimiento se obtiene una sucesión de particiones P_0 ,P_1, P_2,... con $g(P_0) > g(P_1) > g(P_2) > \dots$ Pero como los $g(P_i)$ son enteros positivos esta sucesión debe detenerse en cierta partición P_k cuya conflictividad ya no se pueda disminuir, y por tanto es una solución al problema.

Veamos ahora un ejemplo geométrico:

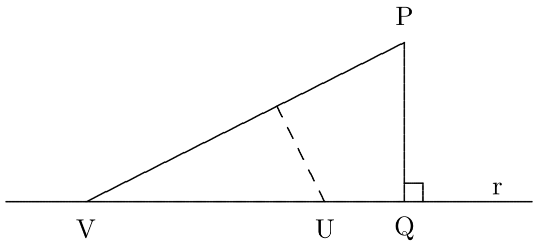
Problema 2.10 (Olimpiada Matemática Iberoamericana 1993).
Demuestre que para cualquier polígono convexo de área 1 existe un paraleogramo de área 2 que lo contiene.



Solución. Tomemos dos vértices P, Q del polígono que estén a la mayor distancia posible entre sí. El polígono debe estar contenido en la franja limitada por las rectas perpendiculares al segmento PQ que pasan por sus extremos (ya que si un vértice X está por ejemplo del otro lado de la recta que pasa por Q, entonces $\overline{PX} > \overline{PQ}$). Tracemos dos paralelas a PQ lo más cercanas posibles y que contengan al polígono entre ellas. Es claro que cada una de ellas debe contener al menos un vértice del polígono (de lo contrario podrían acercarse más). Digamos que una de ellas contiene al vértice R y la otra al vértice S. El rectángulo limitado por las cuatro rectas satisface la condición pedida, ya que su área es el doble del área del cuadrilátero $PQRS$, el cual está contenido en el polígono. $\square$

Para finalizar veamos un famoso problema propuesto por Sylvester en 1893 y que permaneció abierto hasta 1933, cuando T. Gallai publicó una complicada solución. La sencilla solución que expondremos a continuación, usando el principio extremal, fue hallada por L. M. Kelly en 1948.

Problema 2.11 (Sylvester, 1893).
Sea S un conjunto finito de puntos del plano con la propiedad de que la recta determinada por dos puntos cualesquiera de S pasa al menos por un tercer punto de S. Pruebe que entonces todos los puntos de S están alineados.



Solución. Supongamos por absurdo que los puntos no estén todos alineados, y consideremos el conjunto A formado por todos los pares (P, r) tales que $P \in S$ y r es una recta que pasa por dos puntos de S pero no pasa por P. Como A es finito debe haber un par (P, r) para el cual la distancia de P a r sea mínima. Sea Q el pie de la perpendicular de P a r. Como r contiene al menos tres puntos de S debe haber dos de ellos, digamos U y V, de un mismo lado de Q. Supongamos que U es más cercano a Q que V. Entonces la distancia de U a la recta determinada por P y V es menor que la distancia de P a r, lo cual es una contradicción. $\square$

Epílogo

Disponer de un buen repertorio de estrategias es de gran ayuda para el solucionista de problemas matemáticos. Sin embargo es necesario tener presente que las reglas heurísticas no son infalibles. El éxito en su aplicación depende mucho de la experiencia, juicio y buen sentido de quien las use.

Naturalmente que existen muchas estrategias que aquí no se han discutido, sin embargo creemos que no es conveniente tratar de memorizar numerosos principios sin realizar el trabajo necesario para internalizarlos. Es preferible, por el contrario, concentrarse en una estrategia y trabajarla a través de la resolución de numerosos problemas hasta dominarla completamente, antes de pasar a otra. Una excelente fuente de material para quien desee seguir este programa se encuentra en [1].

Quien desee profundizar el estudio de la heurística probablemente debería comenzar por la obra clásica de Polya [2] y su desarrollo posterior [3]. Un punto de vista más reciente es el de Schoenfeld [4, 5].

Referencias

[1] Engel, A., *Problem Solving Strategies*, Springer, New York, 1998.

[2] Polya, G., *How to solve it; a new aspect of mathematical method*, Princeton University Press, Princeton, 1945. Hay traducción castellana: *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas, México, 1965.

[3] Polya, G., *Mathematics and Plausible Reasoning; Vol. 1. Induction and Analogy in Mathematics; Vol. 2. Patterns of Plausible Inference.* Princeton University Press, Princeton, 1954. Hay traducción castellana: *Matemáticas y Razonamiento Plausible*, Tecnos, Madrid, 1966.

[4] Schoenfeld, A. H.,*Mathematical Problem Solving*, Academic Press, Orlando, 1985.

[5] Schoenfeld, A. H., *Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics*, in D. A. Grouws (Ed.), *NCTM Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334–370), Macmillan, New York, 1992.