TALLER DE ENTRENAMIENTO PARA FINAL
Sábado 1° de julio

Elaborado por: Gustavo Meza García

Combinatoria

Biyecciones e introducción a las demostraciones formales.

Empecemos con una historia

Flavio fue a una fiesta con sus amigos y al terminar se preguntaron ¿Cuántas botellas de "refresco" habían tomado? Pero por desgracia habían tirado ya las botellas. Entonces, Toño en un momento de iluminación dijo "42, hay 42 tapas tiradas en el suelo, entonces fueron 42 las botellas que nos tomamos", a lo que Flavio respondió "Bueno, eso podría ser, pero no estamos 100% seguros, estás asumiendo algo que puede no ser cierto".

¿A qué se refería Flavio?

"Asumes que la cantidad de tapas corresponde con la cantidad de botellas" dijo Flavio, a lo que Toño respondió "Pero eso es obvio, ¿No? ¿Cómo podríamos asegurarnos de la correspondencia?". Flavio dijo entonces "Hay 2 cosas que debemos revisar. Hay que asegurarnos que todas las tapas que están en el suelo sean de nuestras botellas y también que todas nuestras tapas están ahí"

¿Por qué son suficientes estas 2 condiciones?

"Verás Toño, cuando nos aseguramos de que las 42 tapas que están en el suelo son nuestras, aseguramos que tomamos al menos 42 botellas y al asegurarnos de que todas nuestras tapas están en el suelo aseguramos que tomamos a lo más 42 botellas, si nos aseguramos de ambas, entonces la cantidad de botellas debe ser al menos 42 y a lo más 42, entonces habríamos tomado 42 botellas". - Dijo Flavio.

"Esto me recuerda a algo que decía mi abuela. No todos los que están en la cárcel son culpables, ni todos los que son culpables están en la cárcel. Pero si nos aseguramos que todos los culpables están en la cárcel y que todos los que están en la cárcel son culpables entonces estarán encerrados exactamente los culpables, no más no menos". - Respondió Toño

"Así es Toño, como solamente nuestras tapas cayeron al suelo y todas nuestras tapas cayeron al suelo, entonces ahora podemos estar seguros de que la cantidad de botellas que tomamos fueron 42" dijo Flavio, a lo que dieron fin a su problema.

Moraleja 1: Cuando queremos contar algo, podemos contar otras cosas y demostrar que hay una correspondencia entre los 2 objetos que estamos contando, esta correspondencia se denomina "biyección".

Moraleja 2: Para demostrar la biyección hay que asegurarnos de dos cosas.

1) Que para cada objeto del primer tipo hay uno del segundo tipo. (A cada botella le corresponde una tapa del suelo) (Todas nuestras tapas están en el suelo)

2) Que para cada objeto del segundo tipo hay uno del primer tipo. (A cada tapa del suelo le corresponde una botella) (Todas las que están en el suelo son nuestras)

Ejemplo La cantidad de subconjuntos que tiene un conjunto de N elementos es 2^N.

Demostración Conjetura: Hay una biyección entre los subconjuntos y las palabras con N letras que solo pueden ser 0 y 1.

Si tenemos una palabra, podemos hacer lo siguiente, si la primera letra es 1 entonces incluimos al primer elemento en el subconjunto, de caso contrario no lo haremos, de igual forma con el resto de la palabra.

Si tenemos un subconjunto, podemos hacer lo siguiente, si el primer elemento del conjunto está en el subconjunto escribimos 1, de forma contraria 0, de igual forma con el resto del conjunto.

Como hemos demostrado que para cada palabra hay un subconjunto y viceversa, entonces hemos demostrado la biyección. Ahora bien, hay 2^N palabras de longitud N en la que cada letra solo puede ser 0 ó 1, entonces hay 2^N subconjuntos de un conjunto con N elementos.

Ejemplo (Caminos) Hay una cuadrícula con 3 renglones y 5 columnas, partiendo de la esquina inferior izquierda se quiere llegar a la esquina superior derecha, moviéndose solamente a través de las líneas de la cuadrícula, y solamente hacia arriba y hacia la derecha. ¿De cuántas formas puede hacerse esto?

Solución Conjetura: Hay una biyección entre los caminos del problema y las palabras que tienen 3 A's y 5 D's.

Si tenemos una palabra entonces vemos la primera letra si es A entonces nos movemos una unidad hacia arriba, en caso contrario nos movemos una unidad a la derecha, como hay 3 A's y 5 D's al final nos habremos movido 3 veces hacia arriba y 5 veces a la derecha por lo que habremos llegado a la meta.

Si tenemos un camino entonces vemos el primer movimiento unitario, si es hacia arriba escribimos A, en caso contrario es a la derecha y escribimos D. Al final tendremos una palabra con 3 A's y 5 D's.

Como demostramos que para cada palabra hay un camino y viceversa, hemos demostrado la biyección.

Para contar las palabras, veamos que hay que escoger 3 de las 8 letras para que sean A, y las demás serán D's. Lo que nos da un total de ${}_8C_3$.

Ejercicio El problema de los caminos con 8 renglones y 2 columnas

Ejemplo (Separadores) En una tienda venden 5 tipos de dulce, queremos comprar 20 dulces ¿De cuántas formas podemos hacerlo?

Solución Conjetura: Hay una biyección entre las formas de comprar los dulces y las palabras con 4 I's y 20 O's

Si tenemos una palabra, veamos cuantas O's hay antes de la primera I, esa es la cantidad de dulces del primer tipo que tomaremos. la cantidad de O's entre la primera y la segunda I es la cantidad de dulces que tomaremos del segundo tipo y así sucesivamente, la cantidad de O's que hay después de la última I es la cantidad de dulces que tomaremos del 5° tipo. Como hay 20 O's habremos cogido 20 dulces.

Si tenemos una selección de dulces, por cada dulce del primer tipo escribiremos una O, al terminar escribiremos una I, y proseguiremos con el 2° tipo, continuaremos así hasta el 5° tipo en el cual no escribiremos una I al final, habremos escrito una palabra con 20 O's y 4 I's

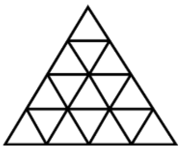
Como demostramos que para cada palabra hay una posible compra y viceversa, hemos demostrado la biyección.

Para contar las palabras, lo haremos igual que en el ejemplo anterior, dando un total de ${}_{24}C_4$

Ejercicio El problema de los separadores con 6 tipos de dulce y 30 dulces a comprar.

TALLER DE ENTRENAMIENTO PARA FINAL
Sábado 1° de julio
Elaborado por: Gustavo Meza García

Problemas



1. Se quiere llegar de la esquina superior a la esquina inferior izquierda, ¿De cuántas formas puede lograrse esto si no puede pasar dos veces por el mismo punto y no puede volver a subir?
2.
3. Una rana quiere llegar al otro lado de un río, para cruzar hay 20 piedras una tras otra, la rana solo puede ir hacia adelante y puede saltar cualquier cantidad de piedras de un solo brinco. ¿De cuántas formas puede llegar a la meta?
4. Partiendo del vértice de un cubo de 5x5x5 hecho de alambre se quiere llegar al vértice opuesto, moviéndose a través del alambre. ¿De cuántas formas puede lograrse esto si en cada movimiento tiene que acercarse más hacia su meta?
5. Se quiere hacer una escalera con 8 escalones, de largo 3m y de altura 2m. ¿De cuántas formas puede construirse dicha escalera si la única restricción es que el ancho y el alto de cada escalón mida un múltiplo de 10cm? (Diferentes escalones pueden tener diferentes medidas)
6. Se va a comprar a lo más 20 gises con 5 posibles colores ¿De cuántas formas puede lograrse esto?
7. Se van a comprar 100 helados de 4 posibles sabores, y se quiere comprar al menos 5 helados de cada sabor ¿De cuántas formas puede lograrse esto?
8. ¿Cuántos términos tiene la expansión de $(a+b+c)^5$ y de qué forma son?
9. Encuentra cuántos enteros $a_1, a_2, \ldots, a_8$ hay tales que $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_8 \leq 8$.
10. (Islandia 2009) Hay una mesa redonda con personas sentadas alrededor. Hay 7 mujeres que tienen una mujer sentada a su derecha. Hay 12 mujeres con un hombre a su derecha. 3 de 4 hombres tienen a una mujer en su derecha. ¿Cuántas personas están sentadas en la mesa?
11. Una araña tiene 8 patas, tiene 8 calcetines diferentes y 8 zapatos diferentes. Encuentra el número de formas en el que la araña puede ponerse los 8 calcetines y los 8 zapatos (Considerando el orden en que se los pone). La única regla es que, para ponerse un zapato, la araña debe tener previamente un calcetín en ese pie.
12. (Brilliant) Hay 100 personas en una fila esperando abordar un avión, a la primera persona se le olvidó su asiento, entonces escogerá un asiento disponible al azar. La segunda persona pasará y si su asiento está disponible se sentará ahí, sino escogerá un asiento al azar y así sucesivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que el último pasajero se siente en su asiento? (La probabilidad son los casos en los que pasa dividido entre los casos posibles)
13. Se hará un intercambio con 5 personas, si nadie puede regalarse a sí mismo ¿De cuántas formas puede hacerse la asignación?