PREPARACIÓN DE OLIMPIADAS RSME BLOQUE GEOMETRÍA I

Almería, 3 de noviembre de 2017

David Crespo Casteleiro

Índice de la sesión

1. ¿Porqué hay que prepararse para unas Olimpiadas?
2. Resultados de gran utilidad.
3. Bibliografía y recursos

¿Porqué hay que prepararse para unas Olimpiadas?

- Si duda, detrás de un atleta, hay miles de horas de entrenamiento, sin las cuales el resultado de una prueba sería un desastre (agujetas incluidas)
- Un *olímpico en Matemáticas*, debe entrenarse en una *pista* que es su mesa de trabajo, siendo el esfuerzo intelectual el equivalente al físico, pero en base a la resolución de problemas.
- Con los contenidos que se estudian en la Secundaria y el Bachillerato, no se puede alcanzar *el podio*.

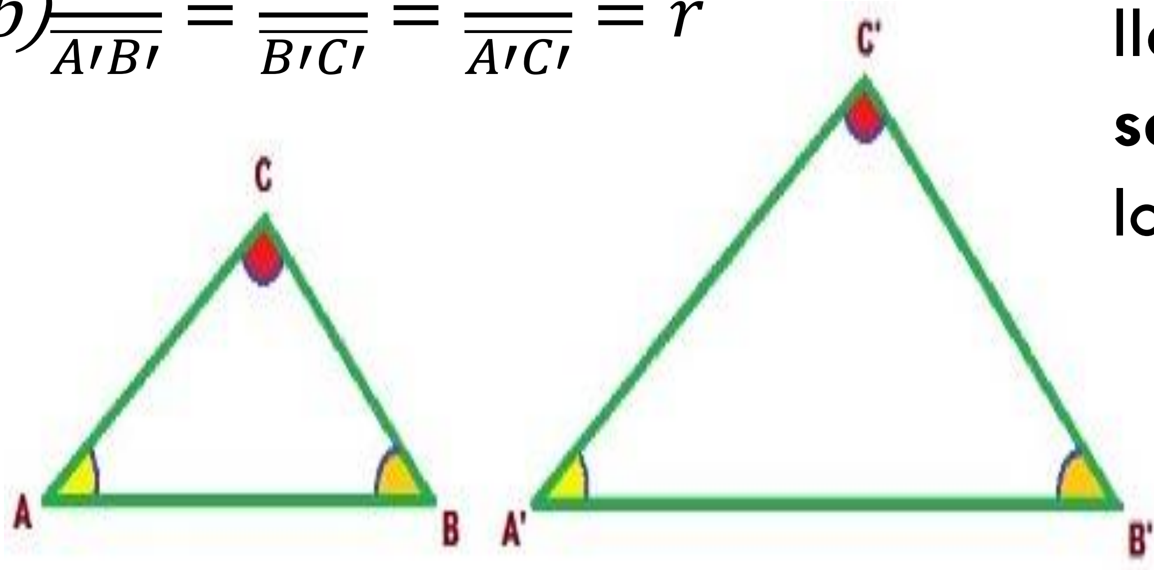
Semejanza y Teorema de Tales

Definición: Dos **triángulos** ABC y A'B'C' son **semejantes**, si tienen los mismos ángulos y los lados opuestos a ángulos iguales, son proporcionales, esto es:

$$a)\hat{A} = \widehat{A'}, \hat{B} = \widehat{B'} \text{ y } \hat{C} = \widehat{C'}$$

$$b)\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = r$$

Al valor r, se le llama **razón de semejanza** entre los triángulos



Consecuencias

Para no tener que comprobar todas las condiciones de la definición, veamos unos criterios más cómodos desde el punto de vista funcional.

Criterio 1: Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales, son semejantes.

Criterio 2: Si dos triángulos tienen un mismo ángulo y los lados adyacentes al mismo, son proporcionales, entonces son semejantes.

Criterio 3: Si dos triángulos tienen sus lados proporcionales, entonces son semejantes.

Consecuencias

- Los triángulos equiláteros, son semejantes.
- Los triángulos isósceles que tienen el mismo ángulo desigual, son semejantes.
- Los triángulos rectángulos con los ángulos agudos iguales, son semejantes.
- Los triángulos rectángulos con catetos proporcionales, son semejantes.
- Todos los triángulos, cuyos lados son proporcionales a tres números, son semejantes.

Consecuencias

Consideremos un triángulo rectángulo ABC, con A=90°, b y c sus catetos y denotemos por a la hipotenusa. Al trazar la altura, h, sobre la hipotenusa, esta queda dividida en dos segmentos m y n, que son las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

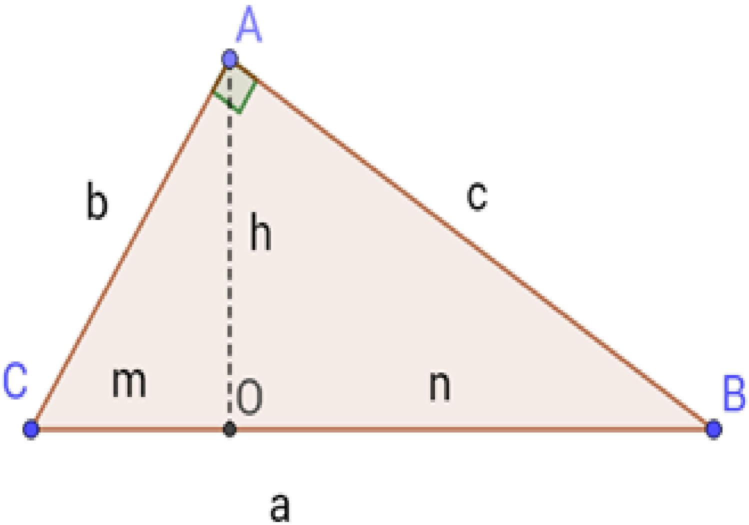
Consecuencias

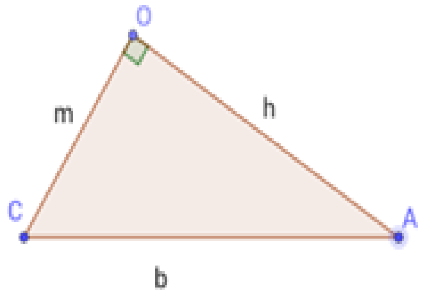
Los triángulos siguientes son semejantes, luego:

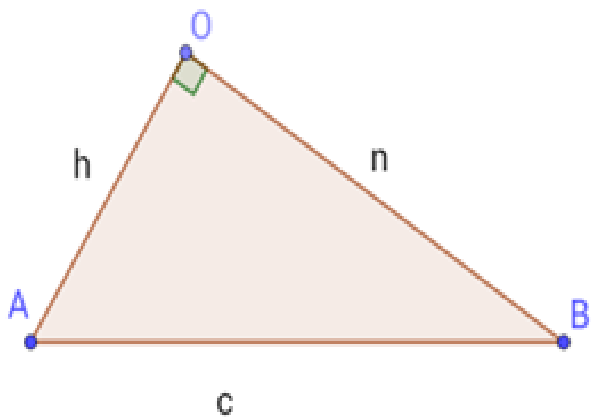
$$COA \sim AOB \Rightarrow \frac{m}{h} = \frac{h}{n} \Rightarrow \boxed{h^2 = m \cdot n} \quad (1)$$

$$CAB \sim COA \Rightarrow \frac{b}{m} = \frac{a}{b} \Rightarrow \boxed{b^2 = m \cdot a} \quad (2)$$

$$CAB \sim AOB \Rightarrow \frac{c}{n} = \frac{a}{c} \Rightarrow \boxed{c^2 = n \cdot a} \quad (2)$$







Consecuencias: Teoremas de la altura y el cateto

La expresión (1) se conoce con el nombre de **Teorema de la altura** y establece que el cuadrado de la altura trazada sobre la hipotenusa es igual que el producto de las proyecciones de los catetos.

Por su parte, las expresiones que aparecen en (2) constituyen el **Teorema del cateto** y nos indican que el cuadrado de un cateto es el producto de su proyección y la hipotenusa.

Consecuencias: Teorema de Pitágoras

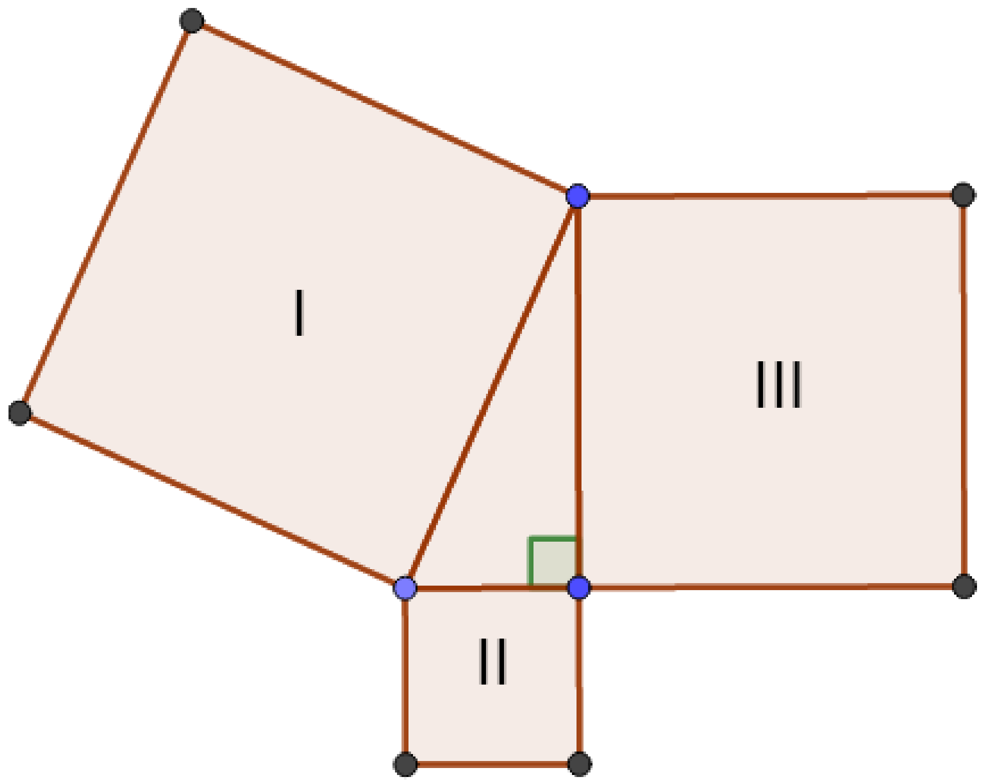
Sumando miembro a miembro las expresiones de (2) tenemos:

$$b^2 + c^2 = m \cdot a + n \cdot a = (m + n) \cdot a = a \cdot a = a^2$$

$$\Rightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

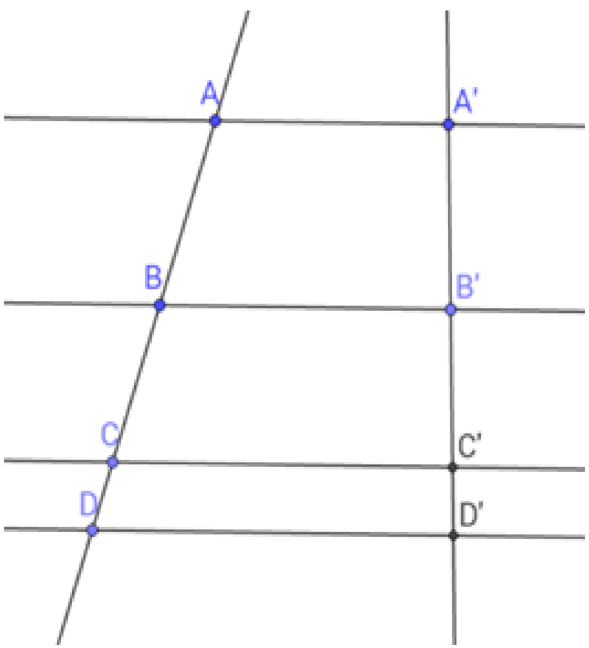
Teorema de Pitágoras

$$\boxed{\text{Área }(I) = \text{Área }(II) + \text{Área }(III)}$$

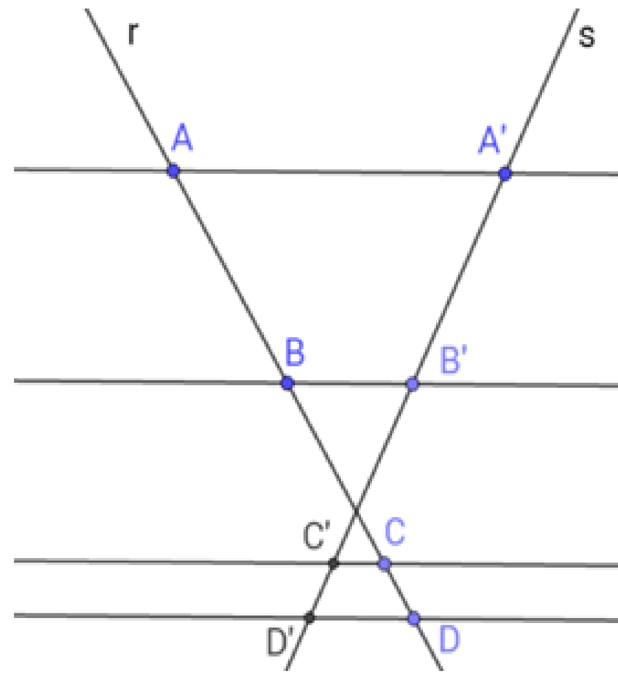


Consecuencias: Teorema de Tales

Teorema: Si dos rectas r, s se cortan por un sistema de paralelas, los segmentos determinados por los puntos de intersección sobre r, son proporcionales a los determinados por los puntos correspondientes sobre s.

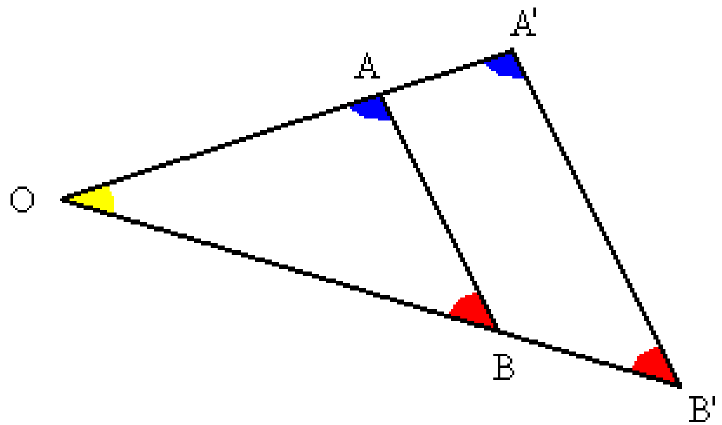


$$\boxed{\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}}$$



Consecuencias

1. Los triángulos en posición de Tales (comparten un ángulo y los lados opuestos paralelos) son semejantes.



2. Si dos triángulos son semejantes, entonces:
   - La razón de los perímetros, es la razón de semejanza.
   - La razón de las áreas, es la razón de semejanza al cuadrado.

Problema 1: Consideremos un triángulo de vértices ABC. Sobre cada uno de sus lados, marcamos sus puntos medios A', B' y C'. Demostrar que los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes y encontrar su razón de semejanza.

Problema 2: Sea ABC un triángulo acutángulo con $\hat{A} = 45°$, y sea P el pie de la altura por B. Trazamos la circunferencia de centro P que pasa por C y que vuelve a cortar a AC en el punto X y a la altura PB en el punto Y. Sean r y s las rectas perpendiculares a la recta AY por P y X, respectivamente, y L, K las intersecciones de r, s con AB. Demostrar que L es el punto medio de KB.

Problema 3: Sea P un punto cualquiera del lado BC de un triángulo ABC. La recta paralela por P a AB corta al lado AC en un punto Q, y la paralela por P a AC corta al lado AB en el punto R. La razón entre las áreas de los triángulos RBP y QPC es k^2. Determínese la razón entre las áreas de los triángulos ARQ y ABC.

Problema 4: Al trazar las diagonales de un pentágono regular, se forma en su interior otro pentágono regular ¿Qué relación hay entre sus áreas?

Puntos notables del triángulo

Nombre	Corte de	Notación	Circunferencia	Radio
Baricentro	Medianas	G		
Ortocentro	Alturas	O		
Incentro	Bisectrices	I	Inscrita	Inradio (r)
Circuncentro	Mediatrices	C	Circunscrita	Circunradio (R)

- Las medianas dividen al triángulo en dos triángulos de igual área.
- La distancia de G a un vértice es el doble que a la mitad del lado opuesto.
- En un vértice, las bisectrices de los ángulos interiores y exteriores son perpendiculares.
- En todo triángulo O, G y C están alineados, denominándose recta de Euler la que los contiene.

Resultados útiles

- **Fórmulas trigonométricas**

$$sen(\alpha \pm \beta) = sen\ \alpha \cdot cos\beta \pm cos\ \alpha \cdot sen\ \beta$$
$$cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta \mp sen\ \alpha \cdot sen\ \beta$$
$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\ \alpha \pm tg\ \beta}{1 \mp tg\ \alpha \cdot tg\ \beta}$$

$$cos(2\alpha) = cos^2\alpha - sen^2\alpha \qquad sen(2\alpha) = 2sen(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$$
$$tg(2\alpha) = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\alpha}{2}} \qquad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + cos\alpha}{2}} \qquad tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\alpha}{1 + cos\alpha}}$$

Problema 5: Demostrar que si en un triángulo ABC se cumple

$$sen^2(A) + sen^2(B) + sen^2(C) = 2$$

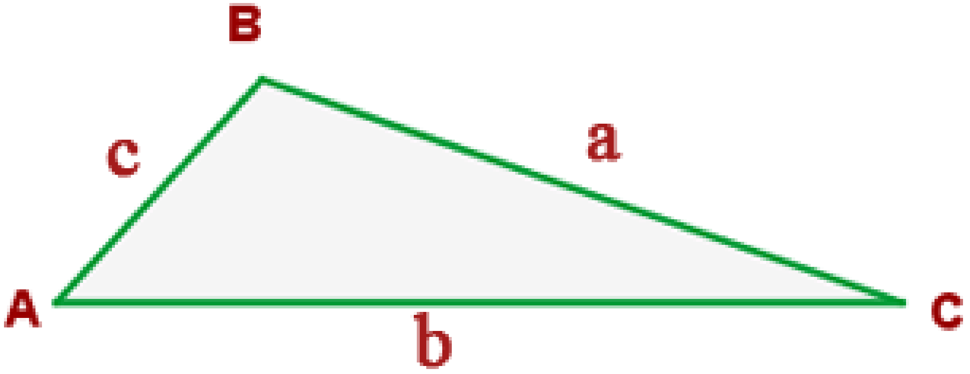
el triángulo es rectángulo.

Problema 6: En un triángulo rectángulo de hipotenusa unidad y ángulos de 30°, 60°, 90°, se eligen 25 puntos cualesquiera. Demuestra que siempre habrá 9 de ellos que podrán cubrirse con un semicírculo de radio 3/10.

Ayuda: Usar el Principio del palomar

Resultados útiles

Consideremos el triángulo de la figura

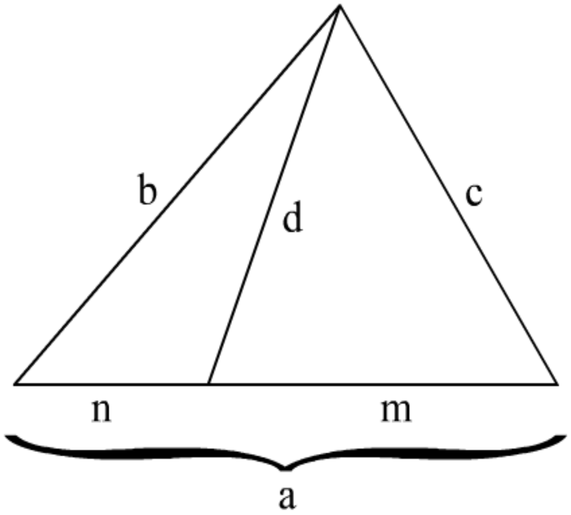


Teorema del coseno
$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\hat{C})$

Resultados útiles

Teorema de Stewart: Para cualquier ceviana de longitud d trazada sobre al lado BC, se cumple

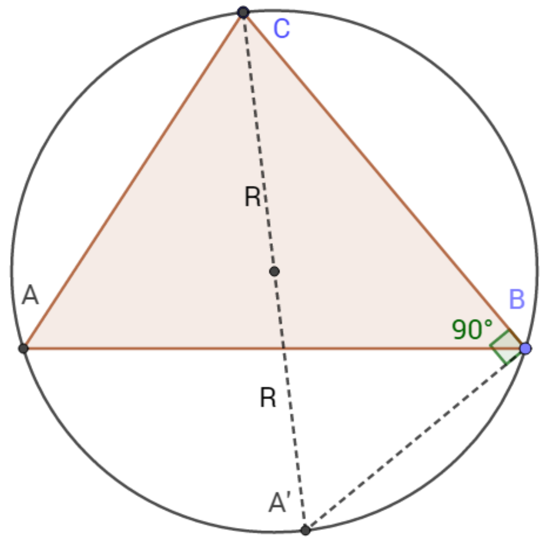
$$\boxed{d^2 \cdot a = b^2 \cdot m + c^2 \cdot n - m \cdot n \cdot a}$$



Demostración: Aplicar el teorema del coseno a los dos triángulos

Resultados útiles

Consideremos el triángulo de la figura



Teorema del seno
$\dfrac{a}{sen(\hat{A})} = \dfrac{b}{sen(\hat{B})} = \dfrac{c}{sen(\hat{C})} = 2R$

Resultados útiles

Teorema de la bisectriz: Si AD es la bisectriz interna del ángulo $\hat{A}$, entonces

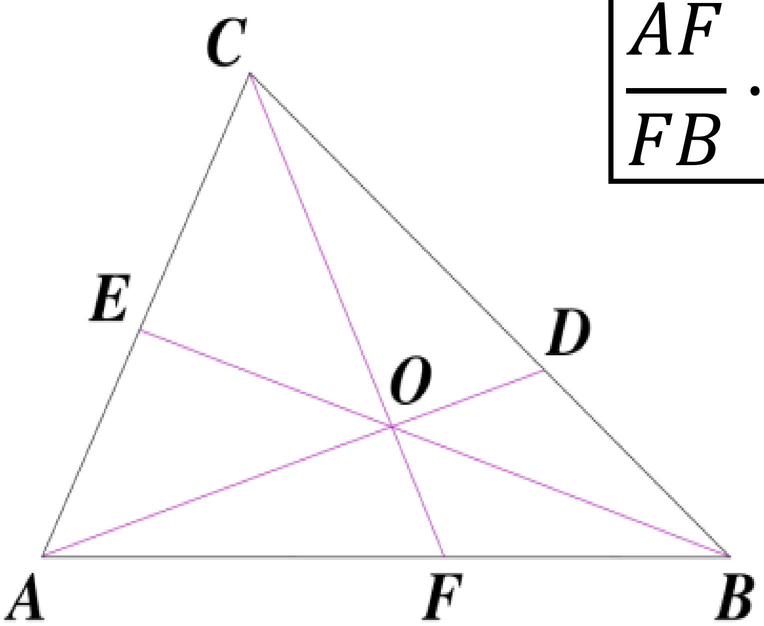
$$\boxed{\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}}$$

Demostración: inmediata al aplicar el teorema de los senos

Resultados útiles

Teorema de Ceva: Consideremos un triángulo ABC y sean D, E y F puntos situados sobre los lados BC, CA y AB (respectivamente). Entonces las cevianas AD, BE y CF son concurrentes si y sólo si

$$\boxed{\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1}$$



Área de un triángulo

- $\boxed{S = \frac{b \cdot h}{2}}$
- $\boxed{S = \frac{1}{2} ab \cdot sen(C)}$
- $\boxed{S = \frac{abc}{4R}}$
- $\boxed{S = r \cdot p}$
- $\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$

Donde $p = \frac{a+b+c}{2}$

Problema 7: Se considera un triángulo equilátero de altura 1. Para todo punto P interior al triángulo sean x, y, z las distancias de P a los lados del triángulo. Probar que $x + y + z = 1$ para todo punto P interior al triángulo.

Relaciones entre R y r

- **Teorema de Euler:** Si $d = d(C, I)$, entonces:

$$\boxed{d^2 = R^2 - 2R \cdot r}$$

- **Desigualdad de Euler:** $\boxed{R \geq 2r}$

Ángulos en la circunferencia

ÁNGULO CENTRAL: Es el ángulo que tiene su vértice en el centro de la circunferencia y los lados son radios de ella. Si el radio de la circunferencia es la unidad, la medida del arco corresponde con el valor del ángulo expresada en radianes. Es decir:

$$\alpha = Longitud\ arco\ AB$$

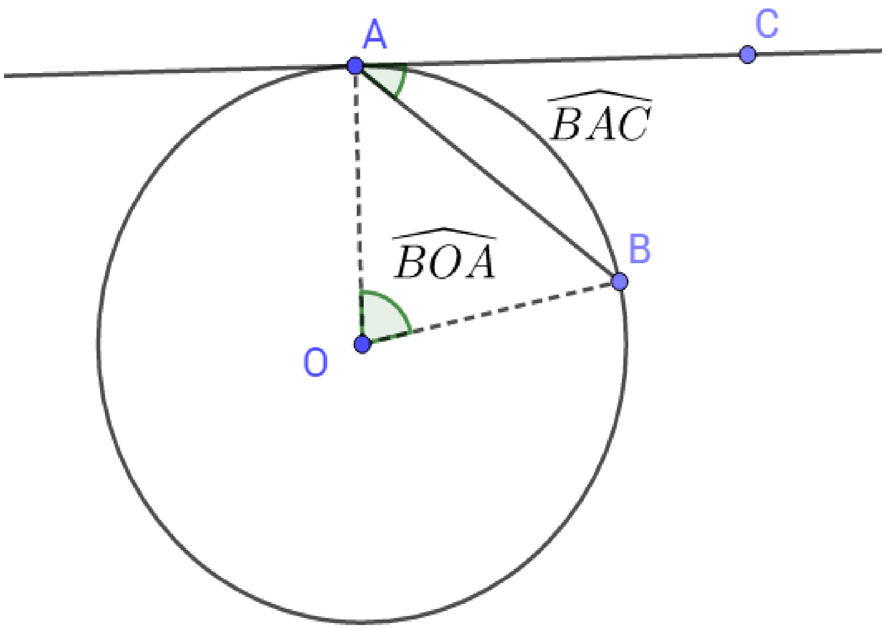
Ángulos en la circunferencia

ÁNGULO INSCRITO: Es el que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son dos rectas secantes. Su valor es la mitad del central correspondiente

$$\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BOC}}{2}$$

Ángulos en la circunferencia

ÁNGULO SEMIINSCRITO: Es el que tiene el vértice en la circunferencia, un lado secante y el otro tangente. Su valor es la mitad del central correspondiente



$$\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BOA}}{2}$$

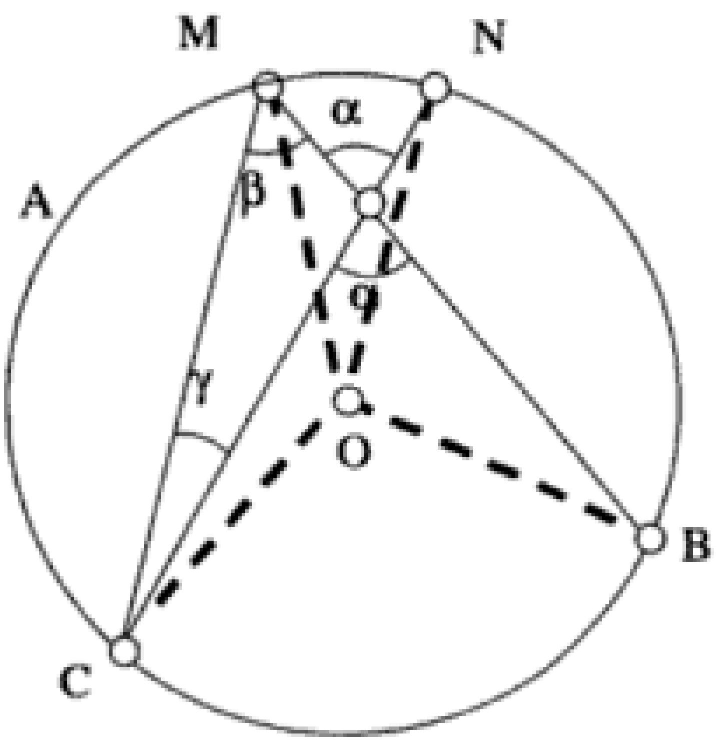
Ángulos en la circunferencia

ÁNGULO EXTERIOR: Es el que tiene el vértice fuera de la circunferencia y los lados son dos secantes. Su valor es la semidiferencia de los dos arcos centrales. Este resultado sigue siendo válido si los lados del ángulo son tangentes a la circunferencia.

$$\alpha = \beta - \gamma \Leftrightarrow \widehat{CAB} = \frac{\widehat{CMB} - \widehat{NBM}}{2}$$

Ángulos en la circunferencia

ÁNGULO EXTERIOR: Es el que tiene el vértice dentro de la circunferencia y los lados son dos secantes. Su valor es la semisuma de los dos arcos centrales



$$\frac{\widehat{COB}+\widehat{MON}}{2}$$

Bibliografía y recursos

- Página web de la preparación en Almería

https://w3.ual.es/eventos/OMERSMEALMERIA/index.html

- Página web de las Olimpiadas RSME

http://www.olimpiadamatematica.es/platea.pntic.mec.es/_csanchez/olimmain.html

- Sánchez-Rubio, C. Ripollés, M. Manual de matemáticas para preparación olímpica. Universitat Jaume I
- Blog personal

http://matesdedavid.blogspot.com.es/