Olimpiada Básica de Matemáticas en Guanajuato

@OBMGuanajuato | 11 de septiembre del 2022

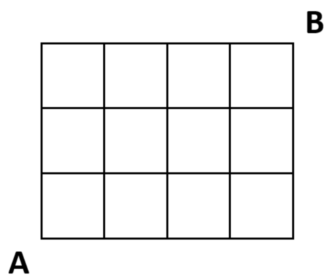
Caminos

Eduardo Jaziel Juárez Martínez

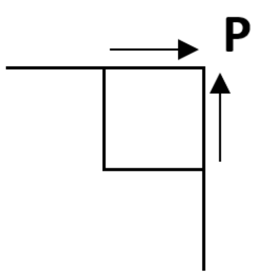
Veremos una aplicación de las combinaciones.

Comenzamos con un problema:

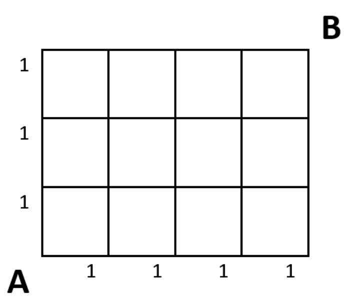
> ¿Cuantos caminos posibles existen de A a B, si solo se pueden seguir las lineas de la cuadricula y solo se puede avanzar hacia arriba y hacia la derecha?



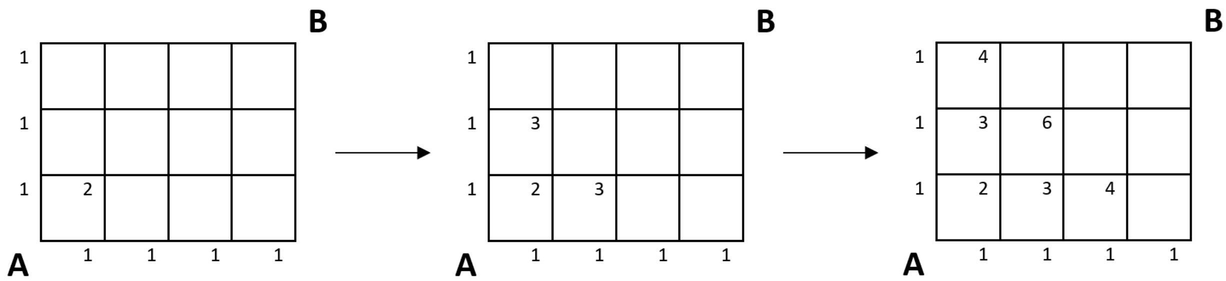
¿Como podemos resolver éste problema? Una posible solución y muy intuitiva es ver que para cada intersección, un camino solo puede llegar del vértice de abajo o del vértice de la izquierda como se muestra en la figura.



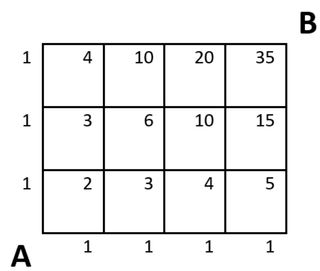
Entonces podemos ir rellenando la cantidad de caminos de cada intersección sabiendo que en toda la base del rectángulo y todo el lado izquierdo hay un solo camino para llegar desde A.



Ahora rellenamos los demás utilizando la regla anterior, es decir, sumando la cantidad de caminos de abajo y el de la izquierda para encontrar los de cada intersección:

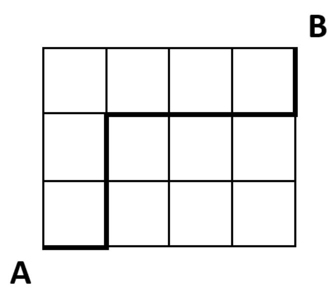


Al final nos queda la siguiente cuadricula:



Entonces hay 35 caminos para llegar de A a B.

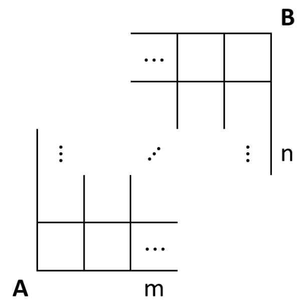
Ahora, ¿cómo podemos hacer un método para cualquier tamaño de cuadricula? Podemos ver cada camino como una sucesión de flechas, por ejemplo, el siguiente camino se puede escribir como la sucesión $\rightarrow, \uparrow, \uparrow, \rightarrow, \rightarrow, \rightarrow, \uparrow$:



Ahora, para contar todos los caminos vemos que siempre tenemos que subir 3 veces y avanzar hacia la derecha 4 veces. Entonces el total de caminos es la cantidad de reordenamientos de $\rightarrow, \rightarrow, \rightarrow, \rightarrow, \uparrow, \uparrow, \uparrow$.

Para contar los reordenamientos basta contemplar $3 + 4 = 7$ espacios y elegir los 3 que correspondan a las 3 flechas hacia arriba (los demás quedan definidos). Entonces hay $\binom{7}{3} = 35$ caminos posibles.

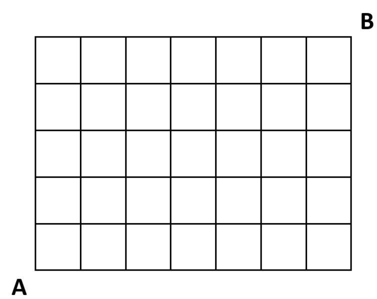
Entonces podemos crear una fórmula para cualquier cuadrícula de $m \times n$.



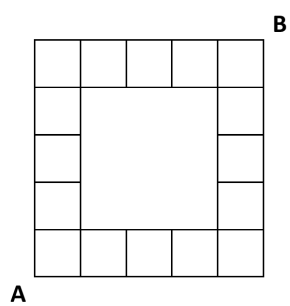
Tenemos $m \to$ y $n \uparrow$, entonces hay $m+n$ espacios y elegimos n flechas hacia abajo. Obtenemos que hay $\binom{m+n}{n}$ posibles caminos.

Ejercicios:

1. Encuentra la cantidad de caminos que hay de A a B.



2. Encuentra la cantidad de caminos que hay de A a B.



3. Demuestra que

$$\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}.$$