Cincuenta sombras del álgebra

Entrenamiento #2 - Rumbo al Nacional
15-18 de septiembre de 2016
Por: Lulú

Resumen

En esta sesión de entrenamientos habrá muchos problemas de álgebra, en el sentido de que tendrán que arrastrar el lápiz (mejor dicho, la pluma) para resolver sistemas de ecuaciones y cosas bonitas como esas. Sin embargo, no todos los problemas de álgebra salen solos. A veces el ~~lápiz~~ (pluma, perdón) tiene que moverse de una manera inteligente.

1. ¿Cómo que arrastrar el lápiz de forma inteligente?

Primero que nada quiero que, en lugar de cuestionar el título, pasen a ver la cantidad de problemas de la lista; pero también quiero decirles que esto es porque en nacionales pasados o en exámenes de Lechona ha habido problemas de álgebra. Es una herramienta muy útil para poder concluir de una manera más sencilla algunas situaciones difíciles que se puedan topar en diferentes problemas.

No estoy muy seguro de cómo explicar esto. Pero con inteligente me refiero a que no es como esa demostración de la útil en la que sólo sumas la fracción, desarrollas todo, pasas para un lado y acabas. En ese caso todo era bastante *straight-forward*. Pero hay problemas de álgebra que no salen así o que tienen un *straight-forward*.

Hay que hallar el modo correcto de utilizar lo que dice el problema transformando una igualdad con otra, sumando algunas ecuaciones, o con factorizaciones chidas. Les haré unos ejemplitos para que vean a qué me refiero.

1.1. Ejemplo 1

Este primer problema es de una IMO (viejita, es del '63). Así que está relativamente sencillo. Lo modifiqué poquito para fines didácticos. Si quieres la versión original puedes animarte a preguntar. Total, el problema pide todas las soluciones no-negativas del siguiente sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= yx_2 \\ x_2 + x_4 &= yx_3 \\ x_3 + x_5 &= yx_4 \\ x_4 + x_1 &= yx_5 \\ x_5 + x_2 &= yx_1 \end{aligned}$$

Mi solución para este problema fue sumar todas las ecuaciones de manera que quede

$$2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = y(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

De aquí se puede ver que $y = 2$, pero eso sólo sucede si $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ es distinto de 0; hay que analizar ese caso entonces. La única manera en que eso sea 0, siendo que las soluciones son no-negativas, es que $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Dicho esto, retomemos que $y = 2$. De la quinta ecuación se sabe que $x_1 = \frac{x_2+x_5}{2}$. De la primera ecuación se despeja x_2 y se sustituye el valor encontrado de x_1 para tener que $\frac{x_2+x_5}{2} + x_3 = 2x_2 \Rightarrow x_2 + x_5 + 2x_3 = 4x_2 \Rightarrow 3x_2 = x_5 + 2x_3 \Rightarrow x_2 = \frac{x_5+2x_3}{3}$. Luego tomamos la segunda ecuación para decir que $\frac{x_5+2x_3}{3} + x_4 = 2x_3$, de donde $x_3 = \frac{x_5+3x_4}{4}$. Ahora, de la tercera ecuación $\frac{x_5+3x_4}{4} + x_5 = 2x_4$. De aquí se llega a que $5x_5 = 5x_4 \Rightarrow x_5 = x_4$. De aquí, sustituir los valores en las demás incógnitas te deja ver que todas son iguales. Hemos concluido el problema diciendo que las soluciones son $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = a$, donde a es un real no negativo.

1.2. Ejemplo 2

Encuentra las soluciones al sistema

$$\begin{aligned} a+b+c &= 1 \\ b+c+d &= 2 \\ c+d+e &= 3 \\ d+e+f &= 4 \\ e+f+g &= 5 \\ f+g+a &= 6 \\ g+a+b &= 7 \end{aligned}$$

Aquí, si sumamos todo tenemos $3(a+b+c+d+e+f+g) = 28$, de modo que $a+b+c+d+e+f+g = \frac{28}{3}$. Ahora, súmense la primera y la cuarta ecuación y tenemos $a+b+c+d+e+f = 1+4 = 5 = \frac{15}{3}$. Si sumamos g tenemos $\frac{28}{3}$. Así sabemos que $g = \frac{13}{3}$. Análogamente para las demás, y obtendremos que la solución es $\{\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{10}{3}, \frac{4}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{13}{3}\}$.

Una solución alterna sería ver que, a partir de la primera y la segunda ecuación, $d = a+1$. Análogamente para cada pareja de ecuaciones consecutivas se llega a que:

$$\begin{aligned} d &= a+1 \\ e &= b+1 \\ f &= c+1 \\ g &= d+1 \\ a &= e+1 \\ b &= f+1 \end{aligned}$$

De aquí es muy fácil ver que $g = c+6$, $d = c+5$, $a = c+4$, $e = c+3$, $b = c+2$, $f = c+1$. Como ya se sabe que $a+b+c+d+e+f+g = \frac{28}{3}$, se sustituye para que $7c+21 = \frac{28}{3} \Rightarrow c+3 = \frac{4}{3} \Rightarrow c = \frac{-5}{3}$. De aquí ya es cuestión se sumar para obtener los valores de las otras incógnitas.

1.3. Ejemplo 3

Intenta factorizar el polinomio $n^4 - 22n^2 + 9$. Por los métodos usuales de complementar trinomio tendríamos $(n^2-11)^2-112$, pero eso ya no es factorizable. Tendremos que recurrir a otro modo de hacerlo. ¿Has considerado que $22 = 6+16$? Es decir, $n^4 - 6n^2 + 9 - 16n^2 = (n^2-3)^2 - 16n^2$. Como eso es una diferencia de cuadrados ya es factorizable.

2. Pero antes de que empieces...

Si no te quedaron claros los ejemplos o te pareció que dejé algunos huecos (a propósito) intenta llenarlos para asegurarte de terminar de entender lo que hice. No significa que siempre sumes todo, pero fíjate cómo usar una ecuación en otra: a veces es importante dividir una ecuación entre otra (esta estrategia en particular también me ha sido tremendamente útil en Geometría). Y sé creativo(a) para factorizar.

Por si las moscas les dejaré una lista de factorizaciones justo antes de los agregados y los problemas.

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ac + 2ab + 2bc$

- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
- $(a-b)(c-b) = ac - ab - bc + b^2$
- $(a+1)(b+1) = ab + a + b + 1$
- $(a-1)(b-1) = ab - a - b + 1$ (ésta es MUY importante)
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$
- $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$
- Ojalá se acuerden de las factorizaciones Wakala.

Espero no haber olvidado ninguna. Ahora sí, ¡a darle!

3. Agregados culturales

1. En los principios de la OMMBC, los entrenamientos eran sólo en Mexicali (COBACH, de hecho) y los seleccionados siempre eran exclusivamente de ese municipio infernal.
2. A Yee le tocó ser de esas delegaciones.
3. ¿Alguna vez has visto los libros de colores de la olimpiada? Son la colección de cuadernos de olimpiada. En el nacional los venden como a 70 pesos. Ve haciendo tu cochinito y ve contando con espacio en tu maleta si los quieres y no los tienes. Actualmente la colección es de 14 cuadernos. También se venden cuadernitos conocidos como Tzaloas y otro tipo de ejemplares.
4. Acapulcoco es una marca de agua de coco, con sede en Monterrey.
5. Los cocos que usan sí son de Acapulco.

4. Lista de problemas

Si les parecen poquitos o muy fáciles, puedo prepararles una lista más complicada con 50 sombras más oscuras.

1. Hallar todas las soluciones reales del sistema de ecuaciones

$$x^3 + y^3 = 1$$
$$x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2$$

2. Resolver el sistema de ecuaciones

$$x^2 + xy + y^2 = 4$$
$$x + xy + y = 2$$

3. Hallar las soluciones reales del sistema de ecuaciones
$$x^3 + y^3 = 5a^3$$
$$x^2y + xy^2 = a^3$$

4. Resolver el sistema de ecuaciones
$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 12$$
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$$

5. Resolver el sistema de ecuaciones
$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91$$
$$x^2 - xy + y^2 = 7$$

6. Resolver el sistema de ecuaciones
$$x^3 - y^3 = 19(x - y)$$
$$x^3 + y^3 = 7(x + y)$$

7. Hallar todas las soluciones reales del sistema de ecuaciones
$$2(x + y) = 5xy$$
$$8(x^3 + y^3) = 65$$

8. Hallar las soluciones reales del sistema de ecuaciones
$$(x + y)(x^2 - y^2) = 9$$
$$(x - y)(x^2 + y^2) = 5$$

9. Factoriza $a^4 + 4b^4$.
10. Demuestra que el polinomio $x^2 + 1$ es irreducible en $\mathbb{R}$
11. Demuestra que la expresión $a^4 + 4b^4$ es primo sólo cuando $a = b = 1$.
12. Factoriza la expresión $x^4 + \frac{1}{4}y^4$ para los reales.
13. Si n es la suma de dos cuadrados, entonces $2n$ también lo es.
14. ¿Puedes encontrar enteros m, n con $m^2 + (m + 1)^2 = n^4 + (n + 1)^4$?
15. ¿Es primo el número $4^{545} + 545^4$?
16. Calcula la suma
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^4 + 1}$$
17. Demuestre que hay una infinidad de enteros positivos de manera que para cualquier n, el número $n^4 + a$ no es primo.

18. Prueba que si $n > 1$, entonces el número $n^4 + 4^n$ siempre es compuesto.

19. Calcula el valor de la expresión

$$\frac{(10^4+324)(22^4+324)(34^4+324)(46^4+324)(58^4+324)}{(4^4+324)(16^4+324)(28^4+324)(40^4+324)(52^4+324)}$$

20. Encuentra el mayor divisor primo de $25^2 + 72^2$.

21. Prueba que para todo entero $n > 2$, el número $2^{2^n-2} + 1$ no es un número primo.

22. Factoriza $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$. (Si ya te sabes la factorización, demuéstrala: busca cómo llegar a ella)

23. Calcula la suma

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 - \frac{1}{2}}{k^4 + \frac{1}{4}}$$

24. Evalúa

$$\frac{\left(1^4 + \frac{1}{4}\right)\left(3^4 + \frac{1}{4}\right)\ldots\left((2n-1)^4 + \frac{1}{4}\right)}{\left(2^4 + \frac{1}{4}\right)\left(4^4 + \frac{1}{4}\right)\ldots\left((2n)^4 + \frac{1}{4}\right)}$$

25. Considera el polinomio $P(x) = x^4 + 6x^2 - 4x + 1$. Prueba que $P(x^4)$ puede ser escrito como el producto de dos polinomios con coeficientes enteros, cada uno de grado mayor que 1.

26. Encuentra todas las parejas (x, y) de enteros tales que

$$x^3 + y^3 = (x + y)^2$$

27. Prueba que para cualquier entero n mayor que 1, $n^{12} + 64$ puede ser escrito como el producto de cuatro enteros positivos distintos mayores que 1.

28. Sean m y n enteros positivos. Prueba que si m es par, entonces

$$\sum_{k=0}^{m} (-4)^k n^{4(m-k)}$$

no es un número primo.

29. Encuentra el mínimo entero positivo n para el cual el polinomio

$$P(x) = x^{n-4} + 4n$$

puede ser escrito como el producto de cuatro polinomio no constantes con coeficientes enteros.

30. Si n es un número natural $\Rightarrow f(n) = 2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$ tiene al menos n factores primos distintos.

31. Encuentra todos los primos de la forma $n^n + 1$ que sean menores a 10^{19}.

32. Factoriza en $\mathbb{Z}$.

   a) $x^{10} + x^5 + 1$
   b) $x^4 + x^2 + 1$
   c) $x^8 + x^4 + 1$
   d) $x^9 + x^4 - x - 1$

33. Encuentra los valores de q para los cuales el sistema de ecuaciones siguiente tiene tres soluciones reales:

$$x + y + z = 2$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 2$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = q$$

34. Hallar todas las soluciones reales del sistema de ecuaciones

$$x + y = 1$$
$$x^4 + y^4 = 7$$

35. Resolver el sistema de ecuaciones

$$x + y = 1$$
$$x^5 + y^5 = 31$$

36. Hallar las soluciones reales del sistema de ecuaciones que además satisfacen que $xy \geq 0$.

$$x^4 + y^4 - x^2y^2 = 13$$
$$x^2 - y^2 + 2xy = 1$$

37. Resolver el sistema de ecuaciones

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) = 10$$
$$(x + y)(xy - 1) = 3$$

38. Resolver el sistema de ecuaciones

$$(x^2 + y^2)\frac{x}{y} = 6$$
$$(x^2 - y^2)\frac{y}{x} = 1$$

39. Resolver el sistema de ecuaciones

$$x^2 + y^2 = axy$$
$$x^4 + y^4 = bx^2y^2$$

40. Resolver la ecuación
$$\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^2 + \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\left(\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}\right) = 0$$

41. Resuelve el sistema de ecuaciones

$$x + y + z = a$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = c^3$$

42. Encuentra las soluciones positivas de

$$x + y^2 + z^3 = 3$$
$$y + z^2 + x^3 = 3$$
$$z + x^2 + y^3 = 3$$

43. Prueba que $f(n) = n^5 + n^4 + 1$ no es primo para $n > 1$.

44. Resuelve $3^x + 4^y = 5^z$ en enteros no negativos.

45. ¿Para cuáles enteros positivos m, n podemos factorizar $ma^k + nb^k$?

46. Resuelve el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2z \\ x^2 + 1 &= 2xz \\ xy &= z^2 \end{aligned}$$

47. Sea $n \geq 3$ un entero. Determina todas las soluciones reales al siguiente sistema de n ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n &= \frac{1}{x_1} \\ x_1 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n &= \frac{1}{x_2} \\ &\vdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2} + x_{n-1} &= \frac{1}{x_n} \end{aligned}$$

48. Encuentra todas las soluciones reales para

$$a^2 + bc = b^2 + ac = c^2 + ab$$

49. Determina todas las parejas ordenadas de enteros (a, b) tales que:

$$(a + b + 2)^2 = ab(a + 2)(b + 2)$$

50. Sea $n \geq 3$ un entero positivo. Encuentra todas las soluciones $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de números reales que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_1 - 1 &= a_2 \\ a_2^2 + a_2 - 1 &= a_3 \\ &\vdots \\ a_{n-1}^2 + a_{n-1} - 1 &= a_n \\ a_n^2 + a_n - 1 &= a_1 \end{aligned}$$