Circunferencias y Cuadriláteros Cíclicos

Entrenamiento #7 para 3ª etapa
23-29 de abril de 2016
Por: Lulú

Resumen

Bienvenidos sean de nuevo a Geometría, el área con mayor cantidad de temas en la Olimpiada. En esta ocasión, como podrán haber visto, trataremos un poco más a fondo lo que sabemos de circunferencias y agregaremos a nuestro acervo cultural los conocimientos de cuadriláteros cíclicos. Es muy importante que ya se tenga un buen manejo de los angulitos, por lo que, si se requiere, habrán de hacerse consultas a materiales anteriores.

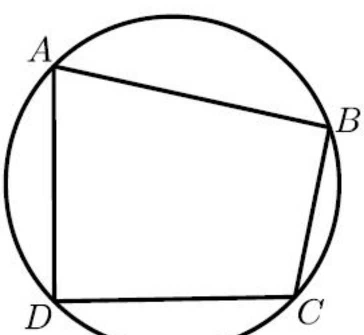
1. Un pequeño preámbulo

Aquellos que son jarcors, y se animaron a hacer los problemas jarcors del entrenamiento de angulitos, quizá se hayan dado cuenta de algo importante y que procederemos posteriormente a darle un nombre. Además de pasear ángulos y hacer semejanzas, para este tema es de particular importancia que se comprendan por completo los ángulos inscritos y semi-inscritos. Ya verás por qué.

Se le llama cuadrilátero cíclico a cualquier figura de cuatro lados (cuadrilátero) que se pueda inscribir en una circunferencia. Es decir, que exista una circunferencia que pase por todos los vértices del cuadrilátero. Es muy importante ver este tema porque los cuadriláteros cíclicos cumplen varias propiedades tremendamente útiles:

- Opuestos suplementarios
- Moñitos
- Potencias
- Ptolomeo
- Brahmagupta

Lamentablemente, todos ellos son si y sólo sís. Y aunque suenen raro, aprenderás todos ellos. Menos el último. Es una cosa horrible de áreas. Lo demás lo veremos aquí. Mientras tanto, te dejo una imagen para que vayas viendo cómo se ve un cuadrilátero cíclico.



2. Propiedades de los cuadriláteros cíclicos

Te prometí que veríamos todo menos Brahmagupta. Pero para que no pienses que soy cruel y despiadado, te dejaré aquí qué dice Brahmagupa, aunque probablemente no lo utilicemos jamás. Además, sirve para llenar un poco más de espacio. Para un cuadrilátero cíclico de lados a, b, c y d, donde se nombra al semiperímetro como s, el área del cuadrilátero es

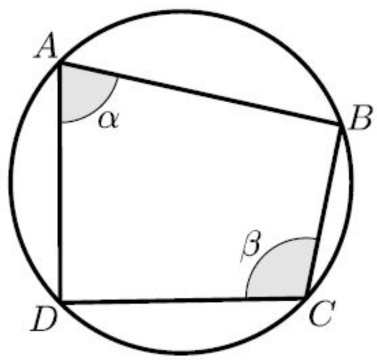
$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

.

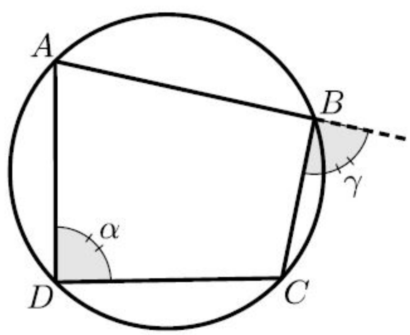
Te dije que era horrible. Pero espero que estés contento. Sigamos con las demás propiedades.

2.1. Opuestos suplementarios

Un cuadrilátero es cíclico si y sólo si cumple que la suma de sus ángulos opuestos es 180°. Entonces, si es cíclico, esa será la suma de ángulos opuestos. Si sólo sabes que la suma de sus ángulos opuestos es esa, entonces podemos concluir que el cuadrilátero es cíclico. En seguida veremos la demostración.

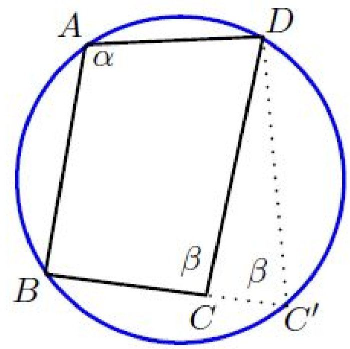


En la imagen anterior, podemos ver que α cubre al $\widehat{BD}$ y que β cubre al $\widehat{DB}$. Además, sabemos que $\widehat{BD}+\widehat{DB}=360°$. Al ser α y β ángulos inscritos tenemos que $\alpha+\beta=\frac{\widehat{BD}}{2}+\frac{\widehat{DB}}{2}=\frac{\widehat{BD}+\widehat{DB}}{2}=\frac{360}{2}=180$. Queda demostrada la ida. Ahora falta el regreso. Pero antes divaguemos un poco en las utilidades y propiedades de ésto.



En la imagen anterior, se extendió AB, de manera que hay un ángulo externo. Dado que $ABCD$ es un cíclico, $\alpha+\angle ABC=180$. Y como AB es una línea la suma $\gamma+\angle ABC$ también es 180, por lo que $\alpha=\gamma$. Ésto y lo anterior son "la misma gata pero revolcada". Si encuentras ya sea ésta situación o la anterior, puedes garantizar que el cuadrilátero es cíclico. A esta última en particular solemos llamarla aquí en Baja: "la iraní".

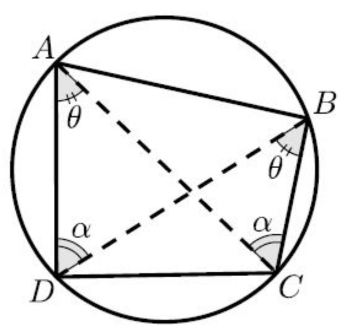
Ahora sí. A darle al regreso. Supongamos que (regresando al primer dibujo de esta sección) $\alpha + \beta = 180°$. Hagamos entonces un dibujo como el de la figura siguiente:



Como sólo sabemos la suma de ángulos opuestos pero tenemos que demostrar que $ABCD$ es cíclico, supongamos que no lo es: como en el dibujo. Extendemos BC hasta que choque a la circunferencia en un punto llamado C'. Dado que el cuadrilátero $ABC'D$ sí es cíclico sabemos (porque ya lo demostramos) que $\alpha + \angle BC'D = 180$, por lo que $BC'D = \beta$. Entonces las líneas DC y DC' son paralelas; lo cual es una contradicción porque las paralelas no se intersecan como éstas lo hacen en D. Esto nos dice que hicimos mal en suponer que C no estaba en la circunferencia. Queda, ahora sí, demostrado lo de la suma de ángulos.

2.2. Moñitos

Quizá te saque de onda pero yo no tengo la culpa. Si en un cuadrilátero cíclico trazamos las diagonales, tendremos una figura como la que se muestra más adelante. Dado que el cuadrilátero tiene sus vértices en una circunferencia, y que al arco $\widehat{AB}$ llegan dos ángulos inscritos, entonces esos dos ángulos son iguales. Es decir que, por ser un ángulo inscrito, $\angle ADB = \frac{\widehat{AB}}{2} = \alpha$; y, por otra parte, $\angle ACB = \frac{\widehat{AB}}{2} = \alpha$.



Haciendo el mismo análisis para los otros ángulos, se sabe que:

$$\angle DAC = \angle DBC = \frac{\widehat{CD}}{2} = \theta$$
$$\angle BDC = \angle BAC = \frac{\widehat{BC}}{2}$$
$$\angle ABD = \angle ACD = \frac{\widehat{AD}}{2}$$

De esa manera es muy fácil y cómodo pasear angulitos de manera rápida. Espero que lo encuentre útil, porque lo es. Y mucho. Pero como dije, esto también es un si y sólo si. Hemos hecho sólo la ida.

Consideremos en el mismo dibujo, que el cruce se llama P. Es fácil ver que $\triangle APD \sim \triangle BPC$ y que sus razones de semejanza son: $\frac{AP}{BP} = \frac{DP}{CP}$. Manipulando un poco, eso es lo mismo que $\frac{AP}{DP} = \frac{BP}{CP}$, con lo que ahora hemos establecido razones de semejanza entre $\triangle APB$ y $\triangle DPC$.

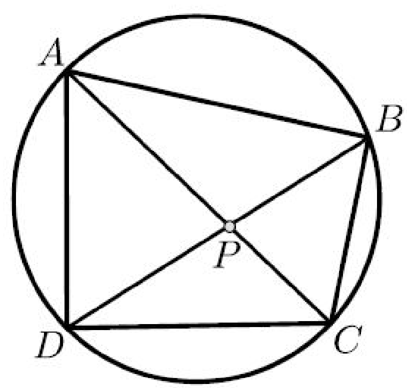
De aquí en adelante tienes permiso de hacer unos cuantos trazos con lápiz en caso de que te pierdas. Con ese nuevo par de triángulos semejantes, se sabe que $\angle DCA = \angle DBA = \beta$ y que $\angle CDB = \angle CAB = \Omega$. Si nos fijamos en los ángulos del $\triangle BCD$, tenemos que $\theta + \alpha + \beta + \Omega = 180$. Pero la suma de los ángulos opuestos (digamos A y C) también es $\theta + \alpha + \beta + \Omega$, por lo que la suma de ángulos opuestos es 180 y hemos demostrado que con moñitos cumple ser cíclico.

2.3. Potencias

Este amiguito también es un si y sólo si, pero ya no se los demostraré yo. Les toca a ustedes. Y para que no se les olvide se los puse en la sección de problemas (buajajá). Bueno, ¿qué dice potencias? Primero que nada que existen dos casos que son casi tres.

2.3.1. Potencias internas

En un cuadrilátero de diagonales AC y BD que se cruzan en P sucede que $AP \cdot PC = BP \cdot PD$ si y sólo si el cuadrilátero es cíclico.



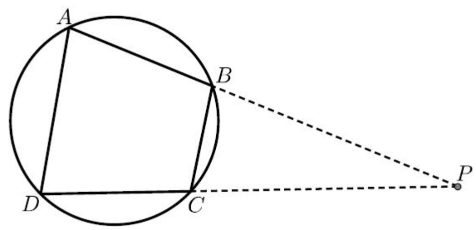
Además, una vez que se sabe que el cuadrilátero es cíclico (como en la figura anterior) y que el centro de esa circunferencia es O y que R es el radio, se puede ir un poco más lejos y tratar de demostrar que:

$$AP \cdot PC = BP \cdot PD = R^2 - PO^2$$

Claro que, deberías poder demostrar que sucede para cualquier línea que pasa por P. Ello significa que la potencia de un punto es constante, y sólo depende de dónde está el punto, no de qué líneas lo atraviesan.

2.3.2. Potencias externas

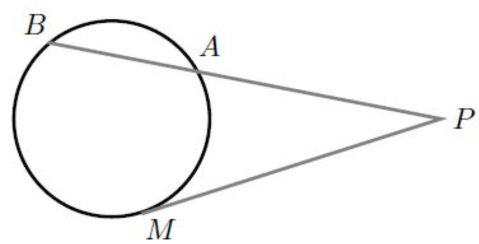
Si se extienden los lados AB y CD de un cuadrilátero $ABCD$ hasta que se intersequen en P, entonces $PA \cdot PB = PD \cdot PC \iff ABCD$ es cíclico.



Igual que en potencias externas, si ya se sabe que es cíclico el cuadrilátero, entonces la ecuación se lleva un poquito más lejos:

$$PA \cdot PB = PD \cdot PC = PO^2 - R^2$$

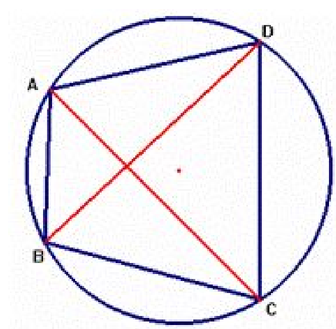
De nuevo, si trazan cualquier secante desde P, debería de seguirse manteniendo la relación para el nuevo par de puntos. Y aquí viene la razón por la que dije que eran dos casos casi tres.



Para este último dibujo, tienes que demostrar que $PA \cdot PB = PM^2$, que es la potencia de un punto para una tangente. Ahora sí, eso es todo lo de potencias. Pero lo tienes que demostrar tú.

2.4. Ptolomeo

Esto nomás lo puse aquí para que vean que los cíclicos tienen un montón de propiedades. Pero, sinceramente, esperaría que no intenten que todos sus problemas se hagan con Ptolomeo. Procuren atacar con cosas sencillas. Ptolomeo es muy útil, pero deberían usarlo para problemas más complicados, que después veremos.



Acorde a la figura anterior, el tal Ptolomeo dice que $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD \iff ABCD$ es cíclico.

3. Agregados culturales

1. Ésta es la primera ocasión en la que no hay ejercicios.

2. Todos los triángulos son cíclicos. ¿Sabes por qué?

3. Dos figuras son concíclicas si todos sus vértices están en una misma circunferencia.

4. Normalmente, al pasear ángulos en un cuadrilátero cíclico, se acostumbra decir "éstos dos son iguales por moñitos" para abreviar. Puedes hacerlo, nosotros entendemos a qué te refieres.

5. Generalmente se utiliza el símbolo $\Longleftrightarrow$ para decir "si y sólo si".

6. Normalmente acostumbramos abreviar expresiones como "haciendo el mismo análisis para los demás" y sólo decimos "análogamente".

7. En el continente americano existen seis razas de vacas en los ganados y granjas: Holstein, Jersey, suiza marrón, Guernsey, Airshire y "Milking Shorthorn".

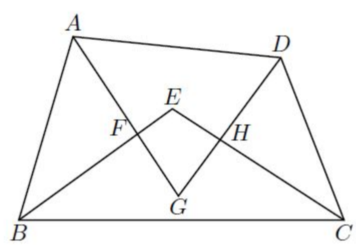
4. Lista de problemas

1. Demuestra:

   a) Potencias Internas

   b) Potencias Externas

2. En la siguiente figura están trazadas las bisectrices de los ángulos interiores del cuadrilátero $ABCD$, las cuales se intersecan en los puntos E, F, G y H, como se muestra. Prueba que el cuadrilátero $EFGH$ es cíclico.



3. Considérese un punto P en la prolongación del diámetro AB de una circunferencia. Desde P se traza una secante que toca a la circunferencia en C y D. ¿Cuántos ángulos rectos puedes encontrar?

4. Están dadas cuatro rectas en el plano de manera que no hay un par de ellas que sean paralelas. Estas rectas determinan cuatro triángulos. Demuestra que los centros de las circunferencias circunscritas a estos triángulos determinan un cuadrilátero cíclico.

5. Por un punto C del $\widehat{AB}$ de un circunferencia se han trazado dos rectas arbitrarias que cortan la cuerda AB en los puntos D y E, y a la circunferencia, en los puntos F y G. ¿Para cuál posición del punto C en el $\widehat{AB}$, el cuadrilátero $DEGF$ es cíclico?

6. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico tal que AB y DC se intersecan en un punto Q y las líneas DA y CB se intersecan en un punto P. Demuestra que las bisectrices de los ángulos $\angle DPC$ y $\angle AQD$ son perpendiculares.

7. Sea ABC un triángulo isósceles con $AB = AC$. Una recta por A corta al circuncírculo del triángulo y a la recta BC en los puntos E y D, respectivamente. Muestra que los circuncírculos de los triángulos DCE y BDE son tangentes a los lados AC y AB, respectivamente.

8. En un cuadrado $ABCD$, M es el punto medio de AB. Una línea perpendicular a MC intersecta a AD en K. Demuestra que $\angle BCM = \angle KCM$.

9. Una línea PQ, paralela al lado BC de un triángulo ABC, corta a AB y a AC en P y Q, respectivamente. La circunferencia que pasa por P y es tangente a AC en Q corta de nuevo a AB en R. Demuestra que el cuadrilátero $RQCB$ es cíclico.

10. Demuestra que si un cuadrilátero cíclico tiene sus diagonales perpendiculares, entonces la perpendicular trazada hacia un lado desde el punto de intersección de las diagonales bisecta el lado opuesto.

11. Demuestra que si un cuadrilátero cíclico tiene sus diagonales perpendiculares, entonces la distancia desde el centro de la circunferencia circunscrita hasta un lado es igual a la mitad de la longitud del lado opuesto.

12. Demuestra la Ley de Senos:
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$
donde a, b y c, son los lados opuestos a los ángulos A, B y C, respectivamente; y R es el radio de la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$.

13. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico, una circunferencia ς_1 que pasa por A y D corta a la recta AB en E y otra circunferencia ς_2 que pasa por C y por D corta a la recta BC en F. Sea G el segundo punto de intersección de ς_1 y ς_2. Muestra que E, F y G son colineales.

14. Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en A, tal que $AB < AC$.Sea M el punto medio de BC y D la intersección de AC con la perpendicular a BC por M. Sea E la intersección de la paralela a AC que pasa por M con la perpendicular a BD que pasa por B. Demuestra que $\triangle AEM \sim \triangle MCA \iff \measuredangle ABC = 60$.

15. Una recta que pasa por un punto K en el interior de un cuadrado $ABCD$, interseca a los lados opuestos AB y CD en los puntos P y Q, respectivamente. Se dibujan dos circunferencias que pasan por los vértices de los triángulos KBP y KDQ, respectivamente. Prueba que el segundo punto de intersección de las dos circunferencias está sobre la diagonal BD.

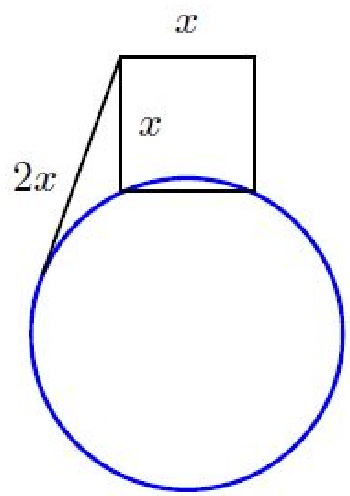
16. Sea AD el diámetro de un semicírculo. Se toman puntos B y C sobre el arco, de tal manera que $AB = BC$. Sea P el punto de intersección de AC y BD. Demuestra que
$$AD \cdot BC + BD \cdot PC = BD \cdot AC$$

17. Sea $ABCD$ un rectángulo y sea P un punto en su interior de tal manera que $\angle APD + \angle BPC = 180°$. Encuentra el valor de $\angle PAD + \angle PCB$.

18. Considérese un $\triangle ABC$ equilátero, y un punto P en la circunferencia circunscrita. Demuestra que la suma de las distancias de P hacia los vértices del $\triangle ABC$ que son los extremos del arco en el que se encuentra es igual a la distancia hacia el otro vértice.

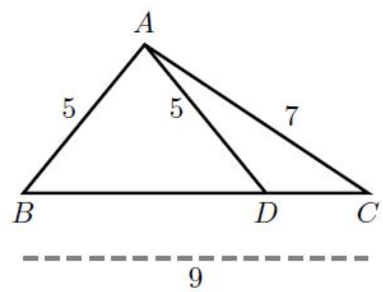
5. Problemas más jarcors

1. En la siguiente figura, desde un vértice del cuadrado está trazada una tangente, la cual tiene una longitud igual al doble del lado del cuadrado. Encuentra el radio de la circunferencia en función del lado del cuadrado.



2. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico con $AB = AD$. Las diagonales se intersectan en E. Si F es un punto sobre AB tal que $\angle BFC = \angle BAD = 2\angle DFC$, determina el valor de $\frac{BE}{DE}$.

3. En la siguiente figura $AB = AD = 5$, $BC = 9$ y $AC = 7$. Encuentra $\frac{BD}{DC}$.



4. Demuestra el Teorema de Ptolomeo.

5. Dado un triángulo ABC con ángulo recto en A, sean M un punto cualquiera del segmento BC, y P un punto tal que PC es perpendicular a BC y que el cuadrilátero $APCM$ es cíclico. Demostrar que

$$\frac{BM}{PC} = \frac{BC}{PM} \cdot \frac{AM}{AC}$$

6. Sea M el punto de intersección de las diagonales AC y BD del cuadrilátero convexo $ABCD$. La bisectriz del ángulo ACD intersecta a BA en el punto K. Si $MA \cdot MC + MA \cdot CD = MB \cdot MD$, demuestra que $\angle BKC = \angle BDC$.