Colinealidad y Concurrencia V2.0

Entrenamiento #1 - Rumbo al Nacional
8 - 11 de septiembre de 2016
Por: Favela

Resumen

Bienvenidos a otra lista más de Geo. Antes de empezar a invertir y vernos muy chidos haciendo transformaciones geométricas (que la verdad sí se van a ver bien perros), vamos a recordar algunas cosas de colinealidad y concurrencia, que nos van a ser muy útiles a la hora de resolver un problema que nos pida alguna de estas cosas. Sí, es muy común que nos pidan que demostremos colinealidad o concurrencia, y normalmente pensamos en alguno de estos teoremas, dependiendo de la figura que se forme. No olviden que hay que demostrar todos los teoremas antes de darle a los problemas.¡Arranquen!

1. El espíritu de la concurrencia pasada

Para demostrar que tres líneas concurren, es natural intentar alguno de los siguientes dos caminos:

- Tomar dos líneas, y demostrar que la línea que pasa por su punto de intersección es justamente la tercera línea.
- Tomar dos líneas, suponer que la tercera línea no pasa por su punto de intersección, y llegar a una contradicción.

¿Cómo demostrábamos que las mediatrices concurrían? ¿Y las bisectrices? Demostrar que estas líneas concurrían era relativamente fácil, pues tenían una propiedad fuerte que nos permitía extraer bastante información (ej. en el caso de las mediatrices: los puntos que viven en la mediatriz de un segmento siempre están a la misma distancia de los extremos del segmento).

¿Cómo demostrábamos que las medianas concurrían? ¿Y las alturas? En estas líneas podíamos aplicar alguno de los dos caminos descritos en un inicio, y llegar a una solución exitosa. Aprovechábamos propiedades útiles como teorema de Tales o propiedades de cíclicos.

Ahora, también hemos visto una herramienta poderosa para demostrar concurrencia, pero debe utilizarse con mucho cuidado:

(**Teorema de Ceva**) En $\triangle ABC$, se toman los puntos D, E, F sobre BC, CA, AB, respectivamente. Las líneas AD, BE, CF concurren si y sólo si:

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

2. El espíritu de la colinealidad presente

Por otro lado, para demostrar que tres puntos están sobre la misma línea, los caminos naturales que se pueden intentar son:

- Tomar dos puntos de manera que el tercero quede en medio, unirlos con el tercer punto para formar dos segmentos, y demostrar que el ángulo entre estos segmentos es de $180°$.
- Tomar dos de los puntos, suponer que el tercero no está sobre la línea que une a esos dos puntos, y llegar a una contradicción.

Una de las propiedades demostradas en los entrenamientos fue: *El ortocentro, el circuncentro y el gravicentro son colineales.* La recta que pasa por esos tres puntos se llama **recta de Euler**. ¿Cómo le hacíamos para demostrar que dichos puntos eran colineales?

Así como en concurrencia, en colinealidad también vimos una herramienta muy poderosa, pero hay que recordar ser cautelosos al utilizarla:

- (**Teorema de Menelao**) En $\triangle ABC$, se toman los puntos L, M y N sobre las rectas BC, CA, AB, respectivamente. Los puntos L, M, N son colineales si y sólo si

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1$$

Recuerden que es -1 por que son segmentos dirigidos. Aunque en la realidad no necesitan ponerle el signo negativo.

3. El espíritu de los teoremas futuros

Así como los teoremas clásicos, también tenemos sus variantes trigonométricas y otros teoremas. Si no han demostrado alguno de estos teoremas, su misión es, ~~si deciden aceptarla,~~ demostrarlos.

- (**Ceva Trigonométrico**) Utilizando la notación del teorema de Ceva, se tiene que AD, BE y CF concurren si y sólo si:
$$\frac{\sin \angle ACF}{\sin \angle FCB} \cdot \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle DAC} \cdot \frac{\sin \angle CBE}{\sin \angle EBA} = -1$$
- (**Menelao Trigonométrico**) Utilizando la notación del teorema de Menelao, se tiene que L, M y N concurren si y sólo si:
$$\frac{\sin \angle ACN}{\sin \angle NCB} \cdot \frac{\sin \angle BAL}{\sin \angle LAC} \cdot \frac{\sin \angle CBM}{\sin \angle MBA} = -1$$
- (**Punto de Gergonne**) Si D, E, F son los puntos de contacto de la circunferencia inscrita al triángulo ABC con los lados BC, CA, AB, respectivamente, entonces AD, BE, CF concurren.

  Tip: Transformación de Raví
- (**Punto de Nagel**) Sean D, E, F los puntos de los lados BC, CA, AB del triángulo ABC, tales que D esté a la mitad del perímetro a partir de A, E en la mitad a partir de B, y F en la mitad a partir de C. Entonces las líneas AD, BE, CF concurren.

  Tip: Usar la notación $s - a$
- (**Teorema de Pascal**) Sean A, B, C, D, E, F puntos sobre una misma circunferencia. Sean P, Q, R los puntos de intersección de AB con DE, BC con EF, y CD con FA, respectivamente. Entonces los puntos P, Q, R son colineales.

  Tip: $X = AB \cap CD, Y = CD \cap EF, Z = EF \cap AB$. Demostrar Menelao externo de triángulo XYZ con P, Q, R. Usar 3 Menelaos y potencia externa desde X, Y, Z.
- (**Teorema de Newton**) Un círculo está inscrito en un cuadrilátero $ABCD$, tocando a los lados AB, BC, CD, DA en los puntos E, F, G, H, respectivamente. Entonces las líneas AC, EG, BD, FH concurren.

  Tip: $P = EF \cap GH, O = EG \cap FH, A = EE \cap HH, C = GG \cap FF$. Usar 2 Pascales de 4 puntos para demostrar que P, O, A, C son colineales.

- (**Teorema de Desargues**) Si se tienen dos triángulos ABC y $A'B'C'$, de manera que las líneas AA', BB', CC' concurren en un punto O, entonces los puntos P, Q, R son colineales, en donde P, Q, R son los puntos de intersección de BC con $B'C'$, CA con $C'A'$, y AB con $A'B'$. (El converso también es cierto.)

  Tip: Ida: Colinealidad. Tomar triángulos $\triangle OAB, \triangle OBC, \triangle OAC$. Multiplicar Menelaos externos. Regreso: Concurrencia. Usar la ida para demostrar que OBB' son colineales.

- (**Teorema de Pappus**) Si A, B, C son tres puntos en una recta, D, E, F tres puntos en otra recta, y si las rectas AE, BF, AF cortan a las rectas DB, EC, DC, respectivamente, entonces los tres puntos de intersección L, M, N son colineales.

  Tip: Considera $X = AE \cap DC, Y = AE \cap BF$, $Z = CD \cap BF$. 5 Menelaos con el triángulo $\triangle XYZ$.

- (**Teorema de Brianchon**) Las líneas AB, BC, CD, DE, EF, FA son tangentes a un círculo en los puntos G, H, I, J, K, L. Entonces las líneas AD, BE, CF concurren.

4. Agregados culturales

1. Algunos de los teoremas aquí mencionados, pueden resultar muy útiles al momento de resolver un problema por inversión.

2. Muchas veces la variante trigonométrica de alguno de los teoremas es mucho más útil que la original

3. En el nacional, como en la cuarta etapa, son dos exámenes de 3 problemas cada uno, y cada problema se califica en base 7. Los delegados del estado reciben copias en blanco y negro de los exámenes de sus chamacos, para revisarlos con los criterios del comité. Luego tienen sesiones donde discuten los puntajes con los coordinadores de cada problema hasta que se llega a un acuerdo. Es decir, se pelean los puntos hasta que quedan de acuerdo, o se van a jurado. Por eso es muy importante que no hagan referencia a colores, que dejen todo bien escrito y bien claro y que apunten todas sus ideas.

4. Acapulco, viene del náhuatl (*acatl*, carrizo; *polli*, aumentativo; *co*, lugar) y significa "Lugar donde abundan carrizos gigantes".

5. Lista de problemas

1. Sean C_1, C_2, C_3 tres circunferencias de centros A, B, C y radios a, b, c, respectivamente. Sean P, Q, R los puntos donde se cortan las tangentes externas comunes de C_1 y C_2, C_2 y C_3, y C_3 y C_1, respectivamente. Demuestra que P, Q, R son colineales.

   Tip: Encuentra la razón del punto de intersección de las tangentes a cada uno de los círculos. (r/R)

2. Sea P un punto sobre la mediana AD de un triángulo ABC. Sean M y N los puntos donde los rayos CP y BP cortan a los lados AB y AC, respectivamente. Demuestra que MN es paralelo a BC.

   Tip: Una de las razones de ceva es 1, queda un Tales.

3. Sean AD, BE, CF tres cevianas concurrentes del triángulo ABC, y sea la circunferencia que pasa por D, E, F tal que corte a los lados BC, CA, AB nuevamente en D', E', F'. Demuestra que AD', BE', CF' concurren.

   Tip: Utilizar potencia de un punto para llegar al Ceva.

4. Demuestra que las bisectrices de los ángulos externos de un triángulo cortan a los lados opuestos en tres puntos colineales.

   Tip: Menelao trigonométrico.

5. Dos paralelogramos $ACBD$ y $A'CB'D'$ tienen un ángulo común en C. Demuestra que DD', $A'B$, AB' concurren.

   Tip: Encontrar las razones del Ceva en el triángulo $\triangle A'B'C'$ usando las paralelas.

6. En el triángulo ABC las bisectrices externas de A y B se cortan en D. Demuestra que el circuncentro de ABD y los puntos C y D son colineales.

   Tip: La bisectriz interna es perpendicular a la bisectriz externa. ($BICI_E$ es cíclico, con diámetro II_E)

7. Si P y Q son puntos en AB y AC del triángulo ABC de tal forma que PQ es paralelo a BC, y si BQ y CP se cortan en O, demuestra que AO es una mediana.

   Tip: Inverso al 3.

8. Sean los puntos L, M, N en los lados BC, CA, AB de un triángulo ABC, respectivamente. Si AL, BM, CN concurren en O, demuestra que:

$$(a)\ \frac{OL}{AL}+\frac{OM}{BM}+\frac{ON}{CN}=1; \qquad (b)\ \frac{AO}{OL}=\frac{AN}{NB}+\frac{AM}{MC}$$

   Tip: Áreas y áreas o dos menelaos.

9. Si P, Q y R son puntos en los lados BC, CA y AB del triángulo ABC, de tal forma que AP, BQ y CR son concurrentes, y si QR, RP, PQ cortan a BC, CA y AB en P', Q' y R', prueba que:

   (a) P', Q' y R' son colineales.
   (b) AP, BQ', CR' son concurrentes.

   Tip: Demostrar Menelao externo de $\triangle ABC$, con 3 Menelaos. Las razones que faltan son las razones de ceva al cuadrado. El segundo punto es un Ceva externo.

10. Por un punto O de una circunferencia, se tienen tres cuerdas que sirven como diámetros de tres circunferencias. Además del punto común O, las circunferencias se cortan por parejas en otros tres puntos. Demuestra que tales puntos son colineales.

    Tip: Utilizar los angulos de los cíclicos y la propiedad iraní.

11. En un triángulo ABC, sean P y P' puntos sobre el segmento BC, Q en el segmento CA y R sobre el segmento AB, de forma que: $\frac{AR}{RB}=\frac{BP}{PC}=\frac{CQ}{QA}=\frac{CP'}{P'B}$. Sea G el centroide del triángulo ABC y sea K el punto de intersección de las rectas AP' y RQ. Demuestra que los puntos P, G y K son colineales.

    Tip: Las razones que te dan revelan un paralelogramo ($ARP'Q$)

12. Sean C_1 y C_2 dos circunferencias tangentes exteriormente en un punto A. Se traza una recta tangente a C_1 en B y secante a C_2 en C y D; luego se prolonga el segmento AB hasta cortar a $C2$ en un punto E. Sea F el punto medio del arco CD sobre C_2 que no contiene a E y sea H la intersección de BF con C_2. Muestra que CD, AF y EH son concurrentes.

    Tip: Trazar tangente común en A y pasar ángulos con cíclicos y arcos. Ceva Trigonométrico.

13. Sea ABC un triángulo acutángulo con sus vértices sobre la circunferencia $\mathcal{C}$. Sea ℓ la recta tangente a $\mathcal{C}$ en el punto A. La circunferencia con centro en B y radio BA corta a la recta ℓ en D y a la recta AC en E. Muestra que la recta DE pasa por el ortocentro del triángulo ABC.

    Tip:

14. Dado un triángulo ABC, consideremos su circuncírculo, y sean D el punto de intersección de la tangente en A con la línea BC, E el punto de intersección de la tangente en B con línea CA, y F el punto de intersección de la tangente en C con la línea AB. Prueba que los puntos D, E, F son colineales.

    Tip: Pascal de 3 puntos.

15. Sean D y E los puntos medios de los arcos menores AB y AC del circuncírculo del triángulo ABC, respectivamente. Sea P un punto sobre el arco menor BC, y sean Q la intersección de DP con BA, y R la intersección de PE con AC. Prueba que la línea QR pasa por el incentro I de ABC.

16. Sean A, B, C, A', B', C' puntos sobre un círculo, de tal manera que AA' es perpendicular a BC, BB' es perpendicular a CA, y CC' es perpendicular a AB. Sea D un punto sobre el círculo, y sean A'' la intersección de DA' con BC, B'' la intersección de DB' con CA, y C'' la intersección de DC' con AB. Prueba que A'', B'', C'' y el ortocentro del triángulo ABC son colineales.

17. Sea ABC un triángulo y P un punto en su interior. Sean P_1, P_2 los pies de las perpendiculares desde P hacia los lados AC y BC. Se trazan AP y BP, y desde C se trazan perpendiculares a AP y BP. Sean Q_1 y Q_2 los pies de estas perpendiculares. Si $Q_2 \neq P_1$ y $Q_1 \neq P_2$, prueba que las líneas P_1Q_2, Q_1P_2 y AB concurren.

    Tip: Ver el hexágono cíclico. Acomodar el Pascal para demostrar la colinealidad A, O, C.

18. Sea ABC un triángulo. Un círculo que pasa por B y C corta a los lados AB y AC de nuevo en C' y B', respectivamente. Prueba que BB', CC' y HH' concurren, donde H y H' son los ortocentros de los triángulos ABC y $AB'C'$, respectivamente.