Coloración II

Entrenamiento #1 para el nacional
16-20 de Septiembre del 2015
Por: Argel

Resumen

En esta ocasión haremos un repaso de una de las herramientas o estrategias empleadas para resolver problemas, la coloración, que se usa principalmente en problemas de combinatoria. Como podrán recordar, la coloración consiste en colorear de cierta manera tableros o puntos. Los problemas en algunas ocasiones indicaran una coloración en particular, en otras está la tendrán que determinar que puede ser una coloración sencilla o una que implique cierto grado de creatividad o complejidad.

1. El señor de la combinatoria: el retorno de la coloración

Existen diversos problemas en los cuales el realizar una coloración nos puede ser útil para encontrar alguna propiedad que permita llegar a la solución del problema. En realidad no existe una solo coloración que sea útil para todos los problemas, aunque algunas de ellas pueden resultar útiles en mayor cantidad de problemas. A continuación les presentaremos algunas recomendaciones y sin más que decir ¡éxito!.

2. Tips

1. ¿No tienes alguna idea fija para atacar el problema? Quizá puedes intentar una coloración de ajedrez.
2. Hacer uso del teorema de casillas, paridad o invarianza(algo que no cambia).
3. Hacer una coloración de acuerdo al peor de los casos o intentar de llegar a lo contrario a lo que pide el problema y llegar a una contradicción.
4. En los problemas de puntos en el plano, buscar arreglos con figuras geométricas que sean útiles dado a sus características.

3. Agregados culturales

1. Clemente además de ser "El chico del metro" también fue por cierto tiempo un *bodegato*, un nuevo tipo de especia.
2. El chicle de choclo no se gasta.
3. Dado que en el entrenamiento de esta semana hubo repaso de Ceva, se podría decir que se armaron las Cevas.
4. Las flechas de Pit son lo mejor.
5. $\frac{6}{2} = 3$
6. Hay una ciudad en España que se llama Guadalajara. El nombre proviene del árabe wadi al hyara que se traduce a "Valle de la piedra" aunque algunas traducciones lo refieren como "Río de piedras".
7. Chouza quería un agregado cultural (The chouzan one).
8. Diana le ganó a Chouza en jenga.

4. Problemas

1. Se tiene un círculo dividido en 6 sectores iguales y se escriben los números $1, 0, 1, 0, 0, 0$ uno en cada sección de manera ordenada, Si un movimiento consiste en sumar o restar 1 a dos secciones adyacentes, ¿se puede llegar, después de una cantidad finita de movimientos, a tener todas las secciones del círculo con un mismo número?

2. Se colocan caballos en cada cuadrado de un tablero de $7x7$. ¿Es posible para cada caballo hacer de manera simultánea un movimiento permitido?

3. Probar que un tablero cuadriculado de $8x8$ no puede cubrirse con 15 tetraminós T y un tetraminó cuadrado.(Nota: un tetraminó es una figura por cuatro cuadrados iguales)

4. Todos los vértices de un pentágono convexo son puntos lattice, y sus lados tienen magnitud entera. Muestra que el perímetro es par.

5. Demuestra que n puntos ($n > 5$) del plano pueden ser coloreados por dos colores de manera que no haya línea que pueda separar los puntos de un color, de los del otro color.

6. En un tablero de 9x9 se colocan 65 insectos en los centros de algunos de los cuadrados. Los insectos se empiezan a mover al mismo tiempo y llegan a un cuadrado que comparte un lado con el que cuadrado en el que estaban antes. Cuando alcanzan el centro de ese cuadrado, dan una vuelta de 90 grados y siguen caminando (sin dejar el tablero). Demuestre que en algún momento se tienen dos insectos en el mismo cuadrado.

7. Probar que un tablero de $10x10$ no se puede cubrir con fichas de $1x4$.

8. Se coloca un caballo en un tablero de $4xn$. ¿Es posible después de 4n movimientos de caballo consecutivos, el visitar cada cuadrado del tablero y regresar al original?

9. Prueba que si cada punto del plano se pinta de rojo o azul, forzosamente habrá un segmento de longitud 1 cuyos extremos sean del mismo color

10. Cada punto en el espacio está coloreado de rojo o azul. Muestra que entre los cuadrados de lado 1 en este espacio, hay al menos uno que tiene tres vértices rojos o al menos uno con sus cuatro vértices azules.

11. Los puntos en el plano son coloreados con tres colores. Muestra que existen dos puntos con distancia 1 ambos del mismo color.

12. Una esfera está coloreada con dos colores. Prueba que existen en esta esfera tres puntos del mismo color, que son los vértices de un triángulo equilátero.

13. En un cuadrado de cuadrícula $5x5$ escribimos -1 y en los otros 24, $+1$. En una movida, puedes cambiar los signos de un subcuadrado de axa con $a > 1$. El objetivo es que todos los cuadrados tengan escrito un $+1$¿En cuáles cuadros puede estar el -1 inicialmente para que esto sea posible?

14. Cada elemento de una matriz de $25x25$ es $+1$ o -1. Sea a_i el producto de todo los elemntos de la i-ésimo renglón y b_j el producto de todos los elementos de la j-ésima columna. Prueba que $a_i + b_i + ... + a_{25} + b_{25} \neq 0$

15. Los puntos en el plano son coloreados de rojo o azul. Entonces alguno de los dos colores contiene puntos con cualquier distancia.

16. En cada casilla de un tablero cuadriculado de $9x9$ hay una ficha. Cada ficha se mueve a un cuadrado que comparte un vértice exactamente con el del cuadrado donde está originalmente (algunas casillas pueden quedar con más de una ficha y otras pueden quedar vacías). ¿Cuál es el mínimo número de cuadrados que quedarán vacíos?

17. En un tablero de mxn un camino es una secuencia de cuadrados tales que cualesquiera dos cuadrados consecutivos comparten un lado. Muestre que en un tablero de mxn existe un camino tal que empieza y termina en el mismo cuadrado y pasa por el resto de los cuadrados exactamente una vez si y solo si al menos uno de los m, n es par y ambos son mayores o iguales a dos.(Nota: En este problema, si $m = n = 1$, no se le considera al cuadrado como un camino válido)

18. Probar que si cada punto del plano se colorea con uno de los colores rojo o azul, entonces forzosamente hay tres puntos del mismo color que son los extremos de un triángulo rectángulo con ángulos agudos de 30 y 60 y con hipotenusa de longitud 1.

19. En cada cuadrado de una cuadrícula de 6 x 6 hay una luciérnaga apagada o encendida. Una movida es escoger tres cuadrados consecutivos ya sean los tres verticales o los tres horizontales y cambiar de estado a las tres luciérnagas que se encuentran en dichos cuadrados. Cambiar de estado a una luciérnaga significa que si está apagada, se enciende y viceversa. Muestra que si inicialmente hay una luciérnaga encendida y las demás apagadas, no es posible hacer una serie de movidas tales que al final todas las luciérnagas estén apagadas.

20. Un cuadrado está dividido en 16 cuadrados iguales. ¿De cuántas maneras se pueden pintar de blanco, negro, rojo y azul, de modo que en cada horizontal y en cada vertical estén los cuatro colores?

21. En un tablero de nxn se colocan $2n - 2$ alfiles de ajedrez, de tal manera que no se ataquen mutuamente. ¿De cuántas formas se puede hacer esto?

22. En dos tableros de mxn se colocan fichas de la siguiente maneera:

    a) Si en la casilla (i,j) del primer tablero hay una ficha, en la casilla (i,j) del segundo tablero no la hay
    b) Si en la casilla (i,j) del primer tablero no hay ficha, en la casilla (i,j) del segundo tablero si la hay.

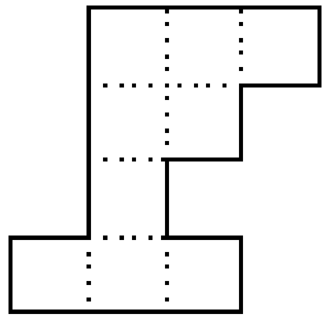
    En las casillas que terminan sis fichas, se colocan números, de la siguiente manera: Se cuentan las fichas que existen inmediatamente alrededor de la casilla de manera horizontal, vertical y diagonal, y se coloca ese número en dicha casilla. Demuestra que la suma de los números del primer tablero es igual a la suma de los números del segundo tablero.

23. Cada uno de los puntos en el plano se pinta de rojo o azul. Determina si es posible o no encontrar un triángulo equilátero de lado 1 que tenga todos sus vértices del mismo color, no importando cómo haya sido coloreado el plano.

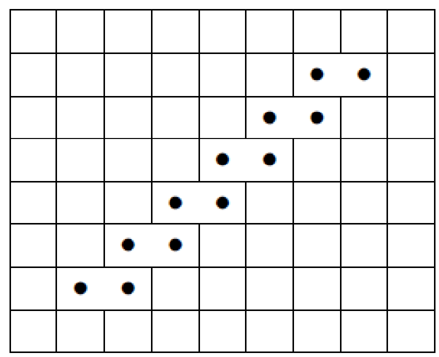
24. Según un diseño ya establecido, un piso rectangular se va a cubrir con algunos mosaicos de $2x2$ y otros $1x4$. Se rompió un mosaico y el distribuidos lo sustituyó por otro del tipo contrario. Demuestra que no se puede re-diseñar el arreglo.

25. En cada casilla de un tablero nxn hay un foco. Inicialmente todos los focos están apagados. En un paso, se permite cambiar el estado de todos los focos en una fila o de todos los focos en una columna (los focos prendidos se apagan y los focos apagados se prenden). Muestra que si después de cierta cantidad de pasos hay uno o más focos prendidos entonces en ese momento hay al menos n focos prendidos.

26. Un polígono se dice que es ortogonal si todos sus lados tienen longitudes enteras y cada dos lados consecutivos son perpendiculares. Demuestra que si un polígono ortogonal puede cubrirse con rectángulos de $2x1$ (sin que éstos se traslapen), entonces al menos uno de sus lados tiene longitud par.



27. ¿Cuál es el máximo número de dominoes que se pueden colocar en un tablero de 8*x*9 si seis ya han sido colocados como se muestra en la siguiente figura?



28. Un 99-ágono dado con lados pintados de rojo, azul o amarillo. Inicialmente están pintados de la siguiente manera: rojo, azul, rojo, azul, ..., rojo, azul, amarillo. En un movimiento se puede cambiar de color a cualquiera de los lados siempre cuando no se generen dos lados adyacentes del mismo color. ¿Es posible llegar a la coloración rojo, azul, rojo, azul ..., rojo, amarillo, azul después de una cantidad finita de movimientos? (Nota: Las coloraciones se consideran en orden de las manecillas del reloj)

29. Los enteros positivos son coloreados de negro y blanco. La suma de dos números de distinto color es negra y su producto es blanco. ¿Cuál es el producto de dos números blancos? Encuentre estas coloraciones.

30. (El problema de la galería de arte) Una galería de arte tiene la forma de un n-ágono. Encuentra el número mínimo de vigilantes que se necesitan para que puedan observar completamente la galería, no importando cuán complicada sea su forma. **NOTA**: Se debe considerar que un vigilante puede ver todo aquellos que las paredes le permitan, rotando sobre su propio eje.

31. Cada punto del espacio está pintado con exactamente uno de los colores rojo, verde o azul. Los conjuntos R, V, A consisten de las magnitudes de los segmentos en el espacio cuyos extremos sean rojos, verdes y azules respectivamente. Muestra que al menos uno de estos conjuntos contiene a todos los números reales no negativos.

32. En un tablero de 7*x*7 dos cuadros son pintados de amarillo y el resto de verde. Dos combinaciones son equivalentes si se puede llegar de una a la otra rotando el tablero. Encuentra el número total de combinaciones diferentes.

33. En cada cuadrado de un tablero de $5x5$ hay una lámpara apagada. Si se toca una lampara entonces esa lámpara y las que se encuentran en los cuadrados vecinos cambian sus estados. Después de una cierta cantidad de movimientos hay exactamente una lámpara prendida. Encuentre todos los cuadrados en los cuales la lámpara se puede encontrar.

34. Un cuadrado de dimensiones $(n-1)x(n-1)$ es dividido en $(n-1)^2$ cuadros unitarios. Cada uno de los n^2 vértices se colorea de rojo o azul. Determina la cantidad de coloraciones diferentes tales que cada cuadrado unitario tiene exactamente dos vértices rojos.

35. Cada cuadrado de un tablero de ajedrez de $1998x2002$ contiene 0 o un 1. De tal manera que el número total de cuadros que contienen un 1 es impar para cada fila y columna. Prueba que la cantidad de cuadros blancos que contienen 1, es impar.

36. Se forma una macro-pantalla con $2000x2002$ pantallas unitarias. Inicialmente hay más de $1999x2001$ pantallas unitarias encendidas. Si se sabe que en cualquier pantalla de $2x2$, tan pronto como haya 3 pantallas apagadas, la cuarta automáticamente se apaga. Demuestra que sin importar el arreglo inicial, jamás podrán ser apagadas todas las pantallas.