Coloración

Entrenamiento #2 para 4ª etapa
24-26 de junio de 2016
Por: Favela

Resumen

La coloración es una herramienta o estrategia utilizada para atacar problemas mayormente en el área de combinatoria. Se trata de colorear tableros o puntos de manera estratégica o arbitraria, tal que demuestre o contradiga una proposición. Espero que recuerden los conceptos de Teorema de Casillas, Combinaciones y Permutaciones, que serán necesarios para resolver los problemas. Su dificultad varía mucho entre los muy fáciles y los que necesitan una coloración ingeniosa y una solución un poquito más compleja. Así que hoy dejaremos volar la creatividad con colores y todo.

1. ¿Cómo funciona?

Es común encontrar, entre los problemas de combinatoria, que se habla de tableros, de figuras que se colorean, de cubrir cosas con fichas o cuadros, etc. Y hay ocasiones en que es muy útil utilizar colores y pintar cuadros estratégicamente, de tal manera que te permitan utilizar alguna observación o herramienta para demostrar alguna proposición. También hay ocasiones en que las coloraciones te son dadas por el problema, lo cual puede llegar a facilitarte las cosas o permitirte observar ciertos detalles. No hay un camino definido para estos problemas, ni una coloración que funcione para todos. Hay ocasiones en que es conveniente pintar un tablero como si fuera de ajedrez, hay ocasiones en que es más conveniente pintar una fila completa y dejar otra sin pintar.

Ejemplo 1.
A un tablero de 8×8 se le han quitado dos esquinas contrarias. ¿Se puede cubrir ese tablero con fichas de 2×1?

Solución.
Pintemos el tablero como si fuera de ajedrez, es decir, alternando los colores blanco y negro. Con esto, nos quedan (originalmente) 32 cuadros negros y 32 cuadros blancos. Ahora, cuando le quitamos las dos esquinas contrarias, le estamos quitando dos cuadros del mismo color, ya sea blanco o negro; digamos que le quitamos dos cuadros negros. Por lo tanto, nos quedan 32 cuadros blancos y 30 cuadros negros. Pero, una ficha de 2×1 está conformada por un cuadro blanco y un cuadro negro, siempre, de acuerdo a la coloración que asignamos. Entonces, dado que para poder cubrir el tablero se tiene que tener la misma cantidad de cuadros blancos que negros, hemos demostrado que no es posible cubrir ese tablero con fichas de 2×1.

○

Entonces, algunos tips para esta clase de problemas:

- Colorear el tablero de ajedrez o de algun otro arreglo especial, de acuerdo a las características del problema. (*Ya lo mencioné varias veces, así que debe ser importante...*)
- Hacer uso del teorema de casillas, invarianza o incluso de paridad. - Invarianza es un tema que veremos luego más a detalle, pero se trata de observar algo que no cambia (*que la cantidad de casillas de cierto color siempre sea constante o alguna cosa así*).

- Intentar colorear de acuerdo al peor de los casos o intentar demostrar lo contrario a lo que se te pide, y llegar a una contradicción. - *Esta es una estrategia básica de demostración*.

- En los problemas de puntos en el plano, buscar arreglos con figuras geométricas que sean útiles dado a sus características. - Estos problemas de puntos en el plano generalmente son considerados difíciles porque requieren de una idea muy creativa y específica, pero yo confío en ustedes.

2. Agregados culturales

1. Para muchos de los problemas de tableros, es útil colorearlo de ajedrez. (*Sí, otra vez*)

2. Pese a que todo el año se les recuerda a los participantes la utilidad de pintar de ajedrez, en 2014 más de la mitad de la selección olvidó colorear de ajedrez en pleno examen nacional.

3. Si en el concurso nacional a alguien se le ocurre utilizar coloración y pintar literalmente un tablero o puntitos de colores o lo que sea, consideren que no se van a ver los colores en las copias para evaluar.

4. Esta lista la realizó mayormente Adrian. Prácticamente él solo. Los cambios de agregados y fechas los hizo Lulú.

5. Las ardillas son de los pocos animales salvajes que aprenden a confiar en los humanos lo suficiente como para comer de su mano.

6. Esta lista, a diferencia de la anterior, sí existía y sólo se le hicieron cambios menores.

3. Lista de problemas

1. Demuestra que un rectángulo de $a \times b$ puede ser cubierto por rectángulos de $1 \times n$ si y sólo si $n|a$ ó $n|b$.

2. Se tiene un círculo dividido en 6 sectores iguales y se escriben los números 1, 0, 1, 0, 0, 0, uno en cada sección de manera ordenada. Si un movimiento consiste en sumar o restar 1 a dos secciones adyacentes, ¿se puede llegar, después de una cantidad finita de movimientos, a tener todas las secciones del círculo con un mismo número?

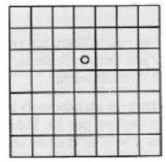
3. Un ratón se quiere comer un queso en forma de cubo de la siguiente manera: Lo parte en 27 cubitos iguales de lados paralelos al cubo original y quiere ir comiendo cada cubito iniciando por un cubito de la orilla y terminando en el cubito central. Además, cada que come un cubito, el siguiente cubito que se come es uno de los adyacentes (no en diagonal). ¿Podrá el ratón comerse el queso de esta manera?

4. Dado un rectángulo de $m \times n$, ¿cuál es el número mínimo de cuadros (de 1×1) que deben colorearse, de manera que no haya espacio en los cuadros restantes para un triminó en forma de L?

5. En cada casilla de un tablero de 9×9 hay una ficha. Cada ficha se mueve exactamente una vez a un cuadrado que comparte un vértice exactamente con el del cuadrado donde está originalmente (algunas casillas pueden quedar con más de una ficha y otras pueden quedar vacías). ¿Cuál es el mínimo número de cuadros que pueden quedar vacíos?

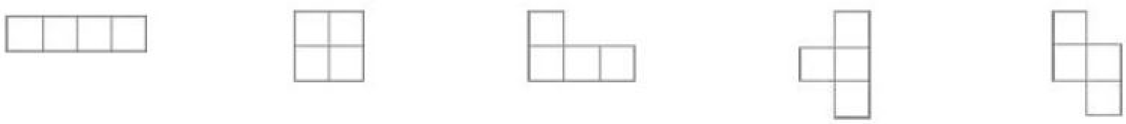
6. En un salón de clase están sentados los alumnos formando un arreglo rectangular de 5×7. La maestra que quiere hacer una dinámica, les pide a todos los alumnos que intercambien de lugar con un compañero vecino, moviéndose un lugar ya sea a la izquierda, a la derecha, adelante o atrás de su lugar. Pepito, que sabe de matemáticas, le dice a la maestra que esto es imposible. ¿Por qué tiene razón Pepito?

7. La figura muestra un laberinto cuadrado de ratón con 49 cuartos. Dos cuartos vecinos (que comparten una pared) están conectados con una puerta. Los cuartos están diseñados de tal manera que cuando el ratón sale de uno de ellos las puertas se cierran automáticamente sin permitir que el ratón pueda entrar de nuevo. Podría el ratón recorrer todos los cuartos si empieza en el cuarto marcado?

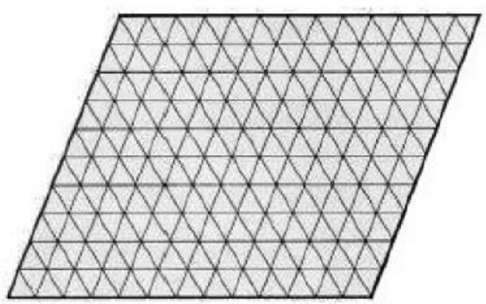


8. En cada cuadrado de una cuadrícula de 6×6 hay una luciérnaga apagada o encendida. Una movida es escoger tres cuadrados consecutivos ya sean los tres verticales o los tres horizontales, y cambiar de estado a las tres luciérnagas que se encuentran en dichos cuadrados. Cambiar de estado a una luciérnaga significa que si está apagada, se enciende y viceversa. Muestra que si inicialmente hay una luciérnaga encendida y las demás apagadas, no es posible hacer una serie de movidas tales que al final todas las luciérnagas estén apagadas.

9. Sea C una cuadrícula de 10×10. Considerando las piezas debajo, con cada cuadro de 1×1, ¿es posible cubrir a C? Demostrar para cada pieza, no en conjunto.



10. Considera el siguiente tablero hecho con 260 triángulos equiláteros.



Determina si es posible llenar dicho tablero con piezas hechas con triángulos equiláteros de las siguientes formas:

Figura 1 Figura 2

11. Un cuadrado está dividido en 16 cuadrados iguales. ¿De cuántas maneras se pueden pintar de blanco, negro, rojo y azul, de modo que en cada horizontal y en cada vertical estén los cuatro colores?

12. En un tablero de $n \times n$ se colocan $2n - 2$ alfiles de ajedrez, de tal manera que no se ataquen mutuamente. ¿De cuántas formas se puede hacer esto?

3.1. Planos y colores

1. Prueba que si cada punto del plano se pinta de *rojo* o *azul*, forzosamente habrá un segmento de longitud 1 cuyos extremos sean del mismo color.

2. Cada punto en el plano se pinta de uno de dos colores. Demuestra que existe por lo menos una línea con sus puntos extremos y su punto medio del mismo color.

3. Todos los puntos del plano están pintados de *rojo* o *azul*. Muestra que existe un rectángulo con los vértices del mismo color. **NOTA:** *Un cuadrado es un rectángulo con todos sus lados iguales.*

4. Todos los puntos del espacio están pintados de *rojo* o *azul*. Muestra que entre los cuadrados de lado 1 en este espacio, hay al menos uno que tiene tres vértices *rojos* o al menos uno con sus cuatro vértices *azules*.

5. En un cuadrado de cuadrícula de 5×5 escribimos -1 y en los otros 24, $+1$. En una movida, puedes cambiar los signos de un subcuadrado de $a \times a$ con $a > 1$. El objetivo es que todos los cuadrados tengan escrito un $+1$. ¿En cuáles cuadros puede estar el -1 inicialmente para que esto sea posible?

6. Todos los puntos del plano están pintados con tres colores. Muestra que existen dos puntos cuya distancia es 1 y que tienen el mismo color.

7. Todos los vértices de un pentágono convexo (De angulos internos menores a $180\,\mathrm{deg}$) son puntos lattice (*Puntos en el plano con coordenadas enteras*), y sus lados tienen magnitud entera. Muestra que el perímetro es par.

8. Demuestra que n puntos ($n > 5$) del plano pueden ser coloreados por dos colores de manera que no haya línea que pueda separar los puntos de un color, de los del otro color.

9. Se tienen muchos cuadros de 1×1. Se pueden colorear sus lados con uno de cuatro colores y pegar cuadrados distintos por el lado con el que compartan color. El objetivo es crear un rectángulo de $m \times n$ con todos sus lados de distinto color. ¿Para cuáles m y n es esto posible?

10. Se tienen muchos cubos de $1 \times 1 \times 1$. Se pueden colorear sus caras con uno de seis colores y pegar cubos distintos por la cara con la que compartan color. El objetivo es crear un cubo de $p \times q \times r$ con todas sus caras de distinto color. ¿Para cuáles p, q, r es esto posible?

11. Un cuadrado de 7×7 está cubierto por dieciseis rectángulos de 3×1 y un cuadro de 1×1. ¿Cuáles son las posiciones permitidas del cuadro de 1×1?

12. El plano está coloreado con dos colores. Prueba que existen tres puntos del mismo color que son los vértices de un triángulo equilátero.

13. Una esfera está coloreada con dos colores. Prueba que existen en esta esfera tres puntos del mismo color, que son los vértices de un triángulo equilátero.

4. Problemas un poco más jarcors

1. Cada uno de los puntos del plano se pinta de rojo o azul. Determina si es posible o no encontrar un triángulo equilátero de lado 1 que tenga todos sus vértices del mismo color, no importando cómo haya sido coloreado el plano.

2. En dos tableros de $m \times n$ se colocan fichas de la siguiente manera:

   a) Si en la casilla (i, j) del primer tablero hay una ficha, en la casilla (i, j) del segundo tablero no la hay.
   b) Si en la casilla (i, j) del primer tablero no hay ficha, en la casilla (i, j) del segundo tablero sí la hay.

En las casillas que terminan sin fichas, se colocan números, de la siguiente manera: Se cuentan las fichas que existen inmediatamente alrededor de la casilla de manera horizontal, vertical y diagonal, y se coloca ese número en dicha casilla. Demuestra que la suma de los números del primer tablero es igual a la suma de los números del segundo tablero

3. En cada casilla de un tablero $n \times n$ hay un foco. Inicialmente, todos los focos están apagados. En un paso se permite cambiar el estado de todos los focos en una fila o de todos los focos en una columna (los focos prendidos se apagan y los apagados se prenden). Muestra que si después de cierta cantidad de pasos hay al uno o más focos prendidos, entonces en ese momento hay al menos n focos prendidos.

4. Según un diseño ya establecido, un piso rectangular se va a cubrir con algunos mosaicos de 2×2 y otros de 1×4. Se rompió un mosaico y el distribuidor lo sustituyó por otro del tipo contrario. Demuestra que no se puede re-diseñar el arreglo.

5. Una galería de arte tiene la forma de un n-ágono. Encuentra el número mínimo de vigilantes que se necesitan para que puedan observar completamente la galería, no importando cuán complicada sea su forma. **NOTA**: Se debe considerar que un vigilante puede ver todo aquello que las paredes le permitan, rotando sobre su propio eje.

6. Cada punto del espacio está pintado con exactamente uno de los colores rojo, verde o azul. Los conjuntos R, V, A consisten de las magnitudes de los segmentos en el espacio cuyos extremos sean *rojos*, *verdes* y *azules* respectivamente. Muestra que al menos uno de estos conjuntos contiene a todos los números reales no negativos.

7. En un tablero de 7×7, dos cuadros son pintados de amarillo y el resto de verde. Dos combinaciones son equivalentes si se puede llegar de una a la otra rotando el tablero. Encuentra el número total de combinaciones diferentes.

8. Un cuadrado de dimensiones $(n-1) \times (n-1)$ es dividido en $(n-1)^2$ cuados unitarios. Cada uno de los n^2 vértices se colorea de *rojo* o *azul*. Determina la cantidad de coloraciones diferentes tales que cada cuadrado unitario tiene exactamente dos vértices rojos.

9. Cada cuadrado de un tablero de ajedrez de 1998×2002 contiene o un 0 o un 1. De tal manera que el número total de cuadros que contienen un 1 es impar para cada fila y columna. Prueba que la cantidad de cuadros blancos que contienen un 1, es impar.

10. Se forma una macro-pantalla con 2000×2002 pantallas unitarias. Inicialmente hay más de 1999×2001 pantallas unitarias encendidas. Si se sabe que en cualquier pantalla de 2×2, tan pronto como haya 3 pantallas apagadas, la cuarta automáticamente se apaga. Demuestra que, sin importar el arreglo inicial, jamás podrán ser apagadas todas las pantallas.