Combinatoria

Julio 2022

1 Combinaciones

Consideremos el siguiente problema. Tenemos 12 personas en un equipo de Basquetbol, y queremos saber cuantos equipos de 5 personas podemos formar. Primero elegimos las 5 personas que forman parte del equipo (12*11*10*9*8) y dividimos entre 5*4*3*2*1, pues cada elección de personas se repite esa cantidad de veces. En general de m cosas, podemos elegir n sin importar su orden de $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ maneras, esto lo denotamos como $\binom{n}{m}$

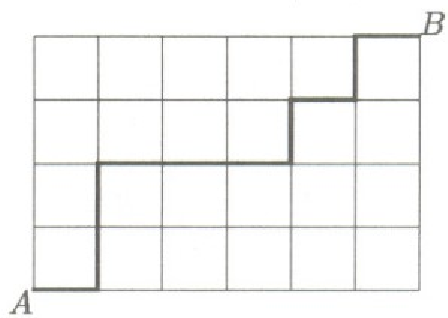
1. Cierto profesor tiene una lista de 20 ejercicios que podría poner en un examen. 7 de estos ejercicios son difíciles, 8 son de dificultad media y los 5 restantes son fáciles. ¿De cuantas formas puede elegir 5 ejercicios para elaborar su examen en cada uno de los siguientes casos? (Consideramos que no importa el orden de las preguntas)

   - No hay condiciones.
   - Exactamente un ejercicio debe ser fácil.
   - Ningún ejercicio debe ser fácil.
   - Al menos dos ejercicios deben ser fáciles.

2. Jonás tiene 5 discos de musica distintos fuera de sus cajas y decide meter cada disco en una caja al azar. ¿De cuántas formas puede hacer esto, de forma que al menos tres discos queden en su caja correspondiente?

2 Caminos

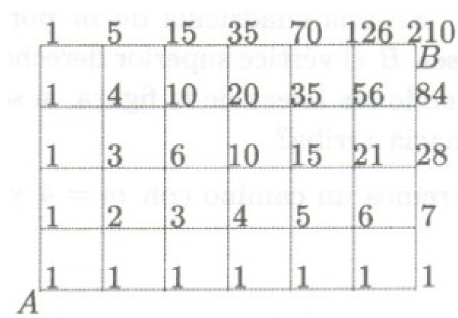
Consideremos el siguiente ejercicio. En una cuadrícula de 4 por 6, sea A el vértice inferior izquierdo y sea B el vértice superior derecho. ¿Cuántos caminos hay de A a B siguiendo las líneas de la figura, si sólo se puede avanzar hacia la derecha y hacia arriba?



Ejemplo de un posible camino.

Primera forma. Notemos que para todos los caminos tenemos que recorrer 4+6 segmentos, de los cuales 6 se recorren horizontalmente y 4 verticalmente. Entonces cada camino se puede identificar con una "palabra" de 10 letras que usa 6 letras H (horizontal) y 4 letras V (vertical). (Por ejemplo, el camino de la figura está representado por la palabra HVVHHHVHVH.) Tenemos 10 letras de modo que hay 10! maneras de ordenar las letras, cada palabra se repite 4!6! veces, luego hay $\frac{10!}{4!6!} = 210$ caminos posibles.

Segunda forma. Hay dos maneras para llegar a cada vértice que no forme parte del lado izquierdo o del lado de abajo de la cuadrícula (a los cuales sólo hay una forma de llegar): verticalmente (desde el vértice inmediatamente abajo de él) y horizontalmente (desde el vértice inmediatamente a la izquierda de él). Entonces, el número de caminos que llegan a uno de esos vértices es la suma de los caminos que llegan a los vértices adyacentes a la izquierda y abajo de él. Así podemos poner en la figura, junto a cada vértice, el número de caminos que llegan a él:



1. Generaliza el problema anterior para n filas y m columnas. En esta situación, determina el número de caminos que hay de A a B si éstos tienen que pasar por el punto P de coordenadas (p, q) (A tiene coordenadas $(0, 0)$ y B coordenadas (n, m)).

2. Dentro de un cubo de alambre C de dimensiones $5 \times 5 \times 5$ se colocan alambres dividiendo C en cubos de dimensiones $1 \times 1 \times 1$. Llámese A al vértice inferior izquierdo de la cara anterior de C y sea B el vértice opuesto a A en C (es decir, B es el vértice superior derecho de la cara posterior de C). ¿Cuántos "caminos" diferentes llegan del punto A al punto B siguiendo los alambres del cubo, si las únicas direcciones permitidas son: hacia atrás, hacia la derecha y hacia arriba?

3 Separadores

Mostraremos esta técnica con el siguiente ejercicio. ¿De cuántas formas pueden comprarse 10 helados de una tienda que vende helados de chocolate, fresa y vainilla?

Cada colección de helados puede representarse por 12 casillas (10 casillas $(-)$ y 2 casillas $(\mid)$). Las casillas que quedan entre los separadores $(\mid)$ nos dicen el número de helados de cada tipo. El número de casillas $(-)$ antes del primer $(\mid)$ será el número de helados de chocolate; luego el número de casillas $(-)$ antes del siguiente $(\mid)$ corresponde al siguiente sabor y así sucesivamente. Por ejemplo 5 helados de chocolate 2 de fresa y 3 de vainilla puede representarse como

$$- \; - \; - \; - \; - \mid - \; - \mid - \; - \; -$$

Finalmente el problema se reduce a elegir en que casillas colocar los separadores, esto es $\binom{12}{2}$.

1. En una tienda se venden 6 tipos de dulces. ¿De cuantas formas se pueden comprar 15 dulces?

2. ¿De cuantas maneras se pueden distribuir m pelotas en n cajas distinguibles, de manera que en cada caja haya al menos una pelota?

3. ¿De cuántas formas pueden escogerse 8 enteros $a_1, a_2, \cdots, a_8$, no necesariamente distintos, tales que $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_8 \leq 8$?

4 Ejercicios extra

1. ¿De cuántas formas se pueden elegir 3 letras de la palabra ABCDEFG?
2. De un grupo de veinticinco libros queremos escoger tres para leer durante las vacaciones. ¿De cuántas maneras podemos hacer esto?
3. Juan tiene 15 libros y Ale tiene 19. ¿De cuántas formas pueden intercambiar 5 libros?
4. En un juego de dominó, ¿de cuántas maneras podemos escoger una mano? (Un juego de dominó tiene 28 piedras y cada mano consiste de 7 piedras.)
5. ¿Cuántas palabras (con o sin sentido) pueden formarse usando todas las letras de la palabra "INTENCION"?
6. Encuentra el total de ternas ordenadas de enteros positivos (x, y, z), tales que $x + y + z = 300$.
7. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir m pelotas en n cajas distinguibles, de manera que en cada caja haya al menos una pelota?