Combinaciones y Permutaciones

Entrenamiento #6 para 3ª etapa
16-22 de abril de 2016
Por: Lulú

Resumen

Para bien o para mal, hemos regresado a Combinatoria. Esta vez se profundizará en los conceptos de combinación y permutación, que se explicaron brevemente en el episodio anterior de Combinatoria. Veremos algunos problemas un poco más avanzados y las aplicaciones directas de estos útiles conocimientos.

1. Un pequeño preámbulo

Houston, tenemos un problema. Es probable que no te haya sido posible asistir, por alguna razón, a los entrenamientos que se dieron con la temática del principio aditivo y multiplicativo. De ser así, te recomiendo que leas primero ese material para que sea más fácil comprender lo que se está haciendo acá. Mucha de la teoría que explica lo que se usará aquí está ahí, incluyendo las definiciones. Pero eso no significa que no podamos tener un lindo agregado cultural (¡Yupi!).

Bueno, para refrescarnos un poco la memoria, repasemos qué es eso de combinación y permutación. Una combinación es un conjunto de elementos. Fin. Una permutación es un arreglo formado por el mismo conjunto de elementos, pero que difiere por el orden en el que se colocan. Veamos un pequeño ejemplo:

En un salón de clases un profesor quiere elegir tres niños para que les hagan el anti-doping. Eso es una combinación. Pero si el profesor quiere elegir tres niños para que sean el jefe de grupo, el sub-jefe y el tesorero, estamos hablando de una permutación porque, aunque sean los mismos niños, el "gabinete" cambia si se cambian los puestos. Otro ejemplo, en caso de que alguien entienda la diferencia, Nightmare Cinema es una permutación de Dream Theater.

Normalmente se utiliza $\binom{n}{r}$ para denotar la cantidad de COMBINACIONES que existen de tamaño r en un conjunto n elementos. Es decir, en el caso del maestro que quiere elegir alumnos para el anti-doping, si el salón es de 20 alumnos, tiene $\binom{20}{3}$ formas distintas de elegir a esos tres alumnos.

Y antes de seguir con el tema, considero prudente explicar que no habrán más explicaciones. Sólo ejercicios (por si requieren repasar eso en particular) y más problemas. El punto es que no te encierres a encontrar valores numéricos. En estos casos basta con las expresiones de los coeficientes binomiales, sobre todo si son números grandes. Ahora sí, sin más que decir: ¡a darle!

2. Ejercicios

1. ¿De cuántas formas se puede elegir un grupo de 3 personas entre un grupo total de 10?
2. En una competencia de matemáticas participan 50 estudiantes. ¿De cuántas maneras se pueden repartir los primeros tres lugares?
3. De un grupo de 5 estudiantes quiere elegirse una comisión de 3 para que cada uno visite uno de 3 museos. ¿Cuántas comisiones distintas pueden hacerse?
4. ¿Cuántas comisiones de 10 estudiantes se pueden hacer de un salón de 20? ¿Y cuántas comisiones de 3 en un salón de 4?

5. En un sombrero se colocan seis tarjetas numeradas del 1 al 6. ¿Cuántas combinaciones distintas pueden salir si un persona saca dos tarjetas, sabiendo que el orden de las tarjetas no importa? ¿Y si saca 4?
6. Paco tiene diez canicas numeradas del 1 al 10. Se sabe que la canica 1 es roja, y las demás son azules; además, la canica favorita de Paco es la roja. Paco necesita escoger tres canicas. ¿De cuántas formas puede hacerlo si se le prohibe elegir su canica favorita? ¿Y de cuántas si ya la escogió?
7. Se marcan diez puntos en una hoja de papel, de manera que cualesquiera tres de ellos no están sobre la misma línea. ¿Cuántos triángulos con vértices en estos puntos se pueden dibujar?
8. Diez puntos se marcan en un línea, y once puntos en otra línea que es paralela a la primera. ¿Cuántos triángulos se pueden dibujar con esos puntos? ¿Y cuántos cuadriláteros?
9. Hay seis letras en el lenguaje hermitiano. Una palabra es cualquier secuencia de seis letras entre las cuales hay (al menos) dos iguales. ¿Cuántas palabras diferentes existen en este lenguaje?
10. ¿Cuántas maneras distintas hay de colocar una torre blanca y una negra en un tablero de ajedrez de modo que no se ataquen entre sí?

3. Agregados culturales

1. Se considera que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. ¿Sabes por qué?
2. No hay una simbología particular para denotar las permutaciones, así como los coeficientes binomiales con las combinaciones.
3. Normalmente las calculadoras (y algunas personas raras) utilizan la notación ${}_nC_r$ para representar las combinaciones de r elementos dentro de un conjunto de n.
4. Bajo esa notación también se utiliza ${}_nP_r$ para indicar las permutaciones.
5. Por la forma en que están constituidas sus rodillas, las vacas pueden subir escaleras pero jamás bajarlas de nuevo. A menos que alguien las empuje o algo así.

4. Lista de problemas

En caso de que acaben los problemas, nos dicen. Tenemos de dónde sacar muchos más.

1. Cinco muchachas y tres muchachos juegan a la pelota. ¿De cuántas formas pueden dividirse en dos equipos de cuatro personas con la condición de que en cada equipo haya por lo menos un muchacho?
2. ¿De cuántas maneras se pueden reacomodar las letras de la palabra "HUMANOS" de tal manera que tanto las vocales como las consonantes estén en orden alfabético entre sí? Ejemplo: HAOMNUS (A-O-U, H-M-N-S)
3. En un salón de clases hay 20 estudiantes, entre ellos dos hermanas que siempre se la pasan platicando cuando trabajan juntas en equipo. ¿De cuántas formas puede el profesor formar un solo de 10 personas si las dos hermanas no deben estar juntas? ¿De cuántas formas si se quiere dividir al salón en dos equipos de 10 y las hermanas no deben estar en el mismo equipo?
4. ¿De cuántas formas se pueden sentar al rededor de una mesa redonde a 5 hombres y 5 mujeres de modo que no haya dos personas juntas de un mismo sexo?
5. ¿De cuántas formas pueden elegirse tres enteros dentro de un conjunto formado por $3n$ números enteros consecutivos si se quiere que la suma de los tres números sea divisible entre 3?

6. Un domador de fieras quiere sacar a la arena del circo 5 leones y 4 tigres. Un tigre no puede ir de tras de otro. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir las fieras?

7. En una fiesta seis amigos se van a dar regalos entre sí de manera que cada uno de un regalo y reciba otro (desde luego, nadie debe regalarse a si mismo). ¿De cuántas formas es posible hacer la distribución?

8. En una fila hay 6 fichas. Cada ficha tiene una cara negra, N, y la otra cara blanca, B. Al principio se encuentran en la posición: NBNBNB. Lulú puede hacer lo siguiente tantas veces como quiera: Escoge dos fichas y las voltea (por ejemplo, si se escoge la primera y la cuarta, las fichas quedan en la posición BBNNNB). Haciendo esto, ¿cuántas posiciones distintas puede lograr?

9. ¿Cuántos números enteros existen entre 0 y 999 que no sean divisibles ni por 5 ni por 7?

10. El marido tiene 12 conocidos, 5 mujeres y 7 hombres y la mujer 7 mujeres y 5 hombres. ¿De cuántas maneras se puede formar un grupo de 6 mujeres y 6 hombres, de modo que 6 personas sean invitadas por el marido y 6 por la esposa?

11. De un grupo formado por 7 hombres y 4 mujeres hay que escoger 6 personas de forma que entre ellas haya no menos de dos mujeres. ¿De cuántas formas puede efectuarse la elección?

12. ¿De cuántas maneras es posible ordenar los números del 1 al 10 de manera que del primero al séptimo vayan en orden ascendente, que el séptimo sea mayor que el octavo y que del octavo al décimo vayan creciendo otra vez?

13. ¿De cuántos modos se pueden dividir $m+n+p$ objetos en tres grupos, de forma que en uno haya m objetos, en otro n y en el tercero p.

14. ¿De cúantas maneras se puede poner en un tablero de damas dos fichas, una blanca y una negra, de tal forma que la blanca pueda comer a la negra? (considere el tablero de 8X8)

15. Se tiene un número n con 2009 dígitos, tal que sus dígitos sólo pueden ser 1, 2 o 3 y la diferencian entre cualesquiera dos dígitos consecutivos es 1. ¿Cuántos números así se pueden tener?

16. En una reunión intervienen n oradores entre los que se encuentran j e i. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir en una lista de forma que j no puede intervenir primero que i?

17. ¿Cuántos números distintos de cuatro dígitos, que no sean divisibles entre 4, pueden formarse a partir de las cifras 1,2,3,4,5, si cada cifra puede emplearse varias veces?

5. Problemas más jarcors

1. Seis cajas están numeradas del 1 al 6. ¿De cuántas formas se pueden repartir 20 pelotas idénticas entre las cajas de tal manera que ninguna de ellas quede vacía?

2. Llamemos "cruces" a la intersección entre dos diagonales de un polígono convexo. ¿Cuál es la cantidad máxima de cruces que puede tener un polígono convexo de n lados?

3. ¿De cuántas maneras es posible acomodar los números del 1 al 10 de manera que del primero al séptimo vayan creciendo, que el séptimo sea mayor que el octavo, y que del octavo al décimo vayan creciendo otra vez? (Por ejemplo, una posibilidad es 1,2,3,5,6,8,10,4,7,9)

4. Se tiene una cuadrícula de $m \times n$. ¿Cuántos caminos hay de la esquina superior izquierda a la inferior derecha si sólo se permite hacer movimientos hacia abajo o hacia la derecha?

5. Demuestra que
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

6. Demuestra que la cantidad de soluciones entera no-negativas para el sistema $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k = n$ es
$$\binom{n+k-1}{k-1}$$