COMBINATORIA

Manuel Cortés Izurdiaga

Preparación Olimpiada RSME

COMBINATORIA

Combinatoria

Consiste en contar el número de elementos de un conjunto finito.

COMBINATORIA

Combinatoria

Consiste en contar el número de elementos de un conjunto finito.

¡No tan fácil

1. Los conjuntos definidos por propiedades.
2. Familia de conjuntos: $S_n : n \in \mathbb{N}$.

$$f(n) = \text{Número de elementos de } S_n.$$

COMBINATORIA

Ejercicio

Dado el conjunto $[n] = \{1, \ldots, n\}$, ¿cuántos subconjuntos tiene?

- $S_n =$ Conjunto formado por todos los subconjuntos de $[n]$:

$$S_n = \{A : A \subseteq [n]\}$$

- $f(n) =$Número de elementos de $S_n = |S_n|$.

Solución al problema

Encontrar la expresión de $f(n)$.

1. Explícita, en función de n

$$f(n) = 2^n$$

Solución al problema

Encontrar la expresión de $f(n)$.

1. Explícita, en función de n

$$f(n) = 2^n$$

2. Recursiva:

$$f(n) = 2f(n-1)$$

TÉCNICA 1

1. Buscar una regla de recurrencia.

$$f(n) \text{ en función de } f(n-1), f(n-2), \ldots, f(n-k)$$

2. Resolver la ecuación en diferencias finitas.

CONJUNTOS Y SUBCONJUNTOS

PROBLEMA

Partimos del conjunto $[n] = \{1, \ldots, n\}$. Pretendemos contar el número de elementos de ciertos S_n formados por subconjuntos de $[n]$.

PERMUTACIONES

PROBLEMA 1

¿De cuántas maneras distintas se pueden ordenar los elementos de $[n]$?

PERMUTACIONES

PROBLEMA 1

¿De cuántas maneras distintas se pueden ordenar los elementos de $[n]$?

Solución

Permutaciones de n elementos.

$$P_n = n!$$

donde

$$m! = m(m-1)(m-2)\cdots 2\cdot 1$$

VARIACIONES

PROBLEMA 2

¿Cuántos subconjuntos ordenados de k elementos contiene $[n]$?

VARIACIONES

PROBLEMA 2

¿Cuántos subconjuntos ordenados de k elementos contiene $[n]$?

Solución

Variaciones de n elementos tomados de k en k.

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

COMBINACIONES

PROBLEMA 3

¿Cuántos subconjuntos de k elementos contiene $[n]$?

Solución

Combinaciones de n elementos tomados de k en k.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

VARIACIONES CON REPETICIÓN

PROBLEMA 4

¿Cuántos subconjuntos ordenados de k elementos contiene $[n]$ si se pueden repetir los elementos?

VARIACIONES CON REPETICIÓN

PROBLEMA 4

¿Cuántos subconjuntos ordenados de k elementos contiene $[n]$ si se pueden repetir los elementos?

Solución

Variaciones con repetición de n elementos tomados de k en k.

$$VR_n^k = n^k$$

PERMUTACIONES CON REPETICIÓN

PROBLEMA 5

¿Cuántos subconjuntos ordenados de k elementos ($k \geq n$) de $[n]$ hay sabiendo que 1 se repite m_1 veces, 2, m_2 veces, etc.?

PERMUTACIONES CON REPETICIÓN

PROBLEMA 5

¿Cuántos subconjuntos ordenados de k elementos ($k \geq n$) de $[n]$ hay sabiendo que 1 se repite m_1 veces, 2, m_2 veces, etc.?

Solución

Permutaciones con repetición de n elementos repetido m_1, m_2, etc.

$$P_n^{m_1, m_2, \ldots, m_n} = \frac{k!}{m_1! m_2! \cdots m_n!}$$

donde

$$k = m_1 + \cdots + m_n$$

COMBINACIONES CON REPETICIÓN

PROBLEMA 6

¿Cuántos subconjuntos de k elementos contiene $[n]$ si se pueden repetir los elementos?

Solución

Combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k:

$$RC_n^k = \binom{n+k-1}{k}$$

EN RESUMEN

En resumen...

1. Hay repetición.
   1. Influye el orden: variaciones.
   2. No influye el orden: combinaciones.
2. No hay repetición.
   1. Influye el orden: variaciones con repetición.
   2. No influye el orden: combinaciones con repetición.

APLICACIONES: COMPOSICIONES DE UN NÚMERO

Composiciones

Una composición de n es una suma ordenada de naturales no nulos cuya suma es n.

APLICACIONES: COMPOSICIONES DE UN NÚMERO

Composiciones

Una composición de n es una suma ordenada de naturales no nulos cuya suma es n.

Composiciones de 4.

APLICACIONES: COMPOSICIONES DE UN NÚMERO

Composiciones

Una composición de n es una suma ordenada de naturales no nulos cuya suma es n.

Composiciones de 4.

$$\begin{array}{ll} 1+1+1+1 & 3+1 \\ 2+1+1 & 1+3 \\ 1+2+1 & 2+2 \\ 1+1+2 & 4 \end{array}$$

Problema

¿Cuántas composiciones tiene n?

EJEMPLO

Reducción

¿Cuántas composiciones de tamaño k tiene n?

EJEMPLO

Reducción

¿Cuántas composiciones de tamaño k tiene n?

Solución

$$k\text{-composiciones} = \binom{n-1}{k-1}.$$

EJEMPLO

Reducción

¿Cuántas composiciones de tamaño k tiene n?

Solución

$$k\text{-composiciones} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Composiciones totales

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} =$$

EJEMPLO

Reducción

¿Cuántas composiciones de tamaño k tiene n?

Solución

$$k\text{-composiciones} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Composiciones totales

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1}$$

TÉCNICA 2

TÉCNICA 2

Para contar los elementos de S_n puedo:

1. Encontrar otro conjunto T_n del que conozco cuantos elementos tiene.
2. Emparejar los elementos de S_n y T_n de forma que:
   - Elementos distintos de S_n se emparejen con elementos distintos de T_n.
   - Todos los elementos de T_n estén emparejados.

Entonces S_n y T_n tienen el mismo número de elementos.

APLICACIONES BIYECTIVAS

Definición

Una aplicación $f : A \to B$ es biyectiva si:

1. Es injectiva: $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$.
2. Es sobreyectiva: para todo b en B existe a en A tal que $f(a) = b$.

APLICACIONES BIYECTIVAS

Definición

Una aplicación $f : A \to B$ es biyectiva si:

1. Es injectiva: $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$.
2. Es sobreyectiva: para todo b en B existe a en A tal que $f(a) = b$.

Teorema

$f : A \to B$ es biyectiva sí y sólo si existe $g : B \to A$ tal que

- $gf(a) = a$.
- $fg(b) = b$.

APLICACIONES: NÚMERO DE SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN

Problema

¿Cuántas soluciones no negativas tiene la ecuación

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n?$$

APLICACIONES: NÚMERO DE SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN

Problema

¿Cuántas soluciones no negativas tiene la ecuación

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n?$$

Solución

$$\text{Soluciones} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

COMBINACIONES CON REPETICIÓN

PROBLEMA 6

¿Cuántos subconjuntos de k elementos contiene $[n]$ si se pueden repetir los elementos?

Solución

Combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k:

$$RC_n^k = \binom{n+k-1}{k}$$

NÚMEROS COMBINATORIOS

Definición

El número n sobre k con $0 \leq k \leq n$ es

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

PROPIEDADES

Propiedades

1. $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n \\ n-k \end{array} \right)$.
2. $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} n \\ k+1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n+1 \\ k+1 \end{array} \right)$
3. $k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = n \left(\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right)$.
4. $k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = (n-k+1) \left(\begin{array}{c} n \\ k-1 \end{array} \right)$.
5. $\sum_{k=0}^{k} \left(\begin{array}{c} n+k \\ k \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n+k+1 \\ k \end{array} \right)$.

EJEMPLO

Ejercicio

Demostrar

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

EJEMPLO

Ejercicio

Demostrar

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

TÉCNICA 3

Si un conjunto A tiene dos subconjuntos B y C tales que:

1. Todo elemento de A está en B o C.
2. B y C no tienen elementos comunes.

Entonces $|A| = |B| + |C|$.

Cardinalidad de A

$|A| =$ Número de elementos de A.

TRIÁNGULO DE TARTAGLIA

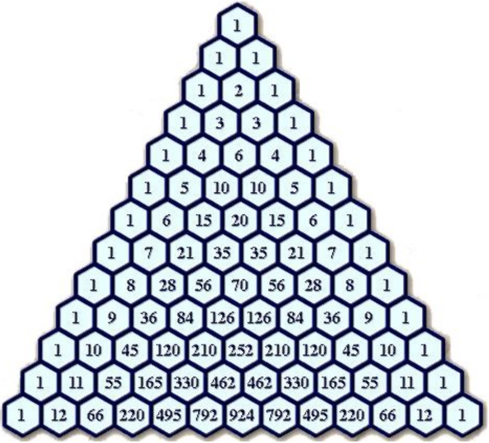

Figura: Triángulo de Tartaglia

BINOMIO DE NEWTON

Binomio de Newton

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots \\
&\cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n
\end{aligned}
$$

Aplicaciones

Ejercicios

1. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$
2. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^n \binom{n}{k} = 0.$
3. $\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$

Ecuaciones en diferencias finitas

Problema

Encontrar la expresión de una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que cumple

$$a_k f(n+k) + a_{k-1} f(n+k-1) + \cdots + a_0 f(n) = g(n)$$

donde

- $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$
- $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es una función.

Ejemplo

Ejercicio

$$f(n+2) - 4f(n) = n, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = \frac{1}{3}$$

Problemas

1. **(2015-2016. Viernes mañana.)**¿De cuántas formas se pueden colorear los vértices de un polígono con $n \geq 3$ lados usando tres colores de forma que haya exactamente m lados, $2 \leq m \leq n$, con los extremos de colores diferentes?
2. Probar que

$$2014^{2013} - 1013^{2013} - 1001^{2013}$$

es múltiplo de

$$2014^3 - 1013^3 - 1001^3$$

.