Combinatoria. Taller 1

E.Delgado, I. Gómez, A. Ibarra, D. Rodríguez

Marzo 2018

1 Conceptos Básicos

En este material presentaremos varios conceptos matemáticos y principios de combinatoria. Los cuales ilustraremos mediante ejemplos y problemas.

Conjuntos y Funciones

Definición 1. Dados dos conjuntos A y B, una función entre ellos es una asociación $f : A \to B$ que a cada elemento a de A le asigna un único elemento $f(a)$ de B. Se dice entonces que A es el dominio (también conjunto de partida o conjunto inicial) de f y que B es su codominio (también conjunto de llegada o conjunto final).

Ejemplo 1. En un salón de clases hay 50 bancas (conjunto B) y tenemos un conjunto A de n alumnos, con n siendo un número mayor igual que 50. Podemos asociar a cada banca a un alumno que se puede sentar en ella, $f : B \to A$, o sea $f(b)$ es el alumno sentado en la banca b.

En este ejemplo n representa un número natural, o sea un elemento del conjunto de los numeros naturales

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots, 1000, 1001, 1002, \ldots, \infty\}$$

Ejemplo 2. En una fiesta se tienen 100 pasteles, si cada invitado comió un pastel, y no sobraron pasteles ¿Cuantos invitados asistieron a la fiesta?

La condición "cada invitado comió un pastel" indica que podemos asociar el conjunto I de Invitados al conjunto P de Pasteles, $f : I \to P$. Mientras que la condición "no sobraron pasteles" indica que podemos asociar los pasteles en la fiesta con los invitados, $g : P \to I$. Así podemos asegurar que asistieron 100 invitados.

Definición 2. Una función $f : A \to B$ es *inyectiva* si para todo par de elementos x, y diferentes ($x \neq y$) en A tenemos que sus imagenes $f(x), f(y)$ son distintas($f(x) \neq f(y)$). La función $f : A \to B$ es *sobreyectiva* si para cualquier elemento b en B existe un elemento a en A tal que $f(a) = b$. Finalmente, una función es *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva. A una función biyectiva se le llama también *biyección*.

Notemos que si en el Ejemplo 1 n es mayor que 50 tenemos que f es inyectiva y si n es igual que 50 entonces es biyectiva. En el caso del Ejemplo 2 tenemos que las funciones f y g son biyectivas.

Ejemplo 3. Sea un grupo de n niños (N) que tienen una bolsa con k manzanas (M). Sabemos que hay al menos una manzana por niño. Entonces podemos repartir todas las manzanas de manera que a cada niño le toque una manzana, lo que define una función $f : M \to N$ que es al menos sobreyectiva.

Ejemplo 4. ¿Cuántos números de 5 dígitos se pueden hacer con los dígitos 1, 1, 1, 8, 9?

Notemos que los números de 5 dígitos están definidos por la posición de los dígitos 8 y 9 de izquierda a derecha. Entonces a cada uno de estos números puedo asociarle un número que describa la posición del 8 y 9; por ejemplo, en las decenas pongo la posición del 8 y en la unidades el del 9:

$$19118 \leftrightarrow 52$$
$$89111 \leftrightarrow 12.$$

Observemos que un número que describe posición sólo puede contener los dígitos $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y sin repetir. Notemos que una vez que sabemos dónde están el 8 y el 9, no hay necesidad de decir la posición de los 1. De esta forma establecemos una biyección entre el conjunto de nuestros números de 5 dígitos y el conjunto de números de dos dígitos; el cual es más fácil de contar. Entonces tenemos que el dígito de las decenas lo puedo elegir de 5 dígitos y como no puedo repetir en las unidades sólo puedo elegir 4 dígitos. Por lo tanto tenemos $5 \times 4 = 20$ números de 2 dígitos que sólo usa los dígitos $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (estamos usando el principio del producto que veremos a continuación). Y por la biyeccón sabemos que sólo hay 20 números con los dígitos $\{1, 1, 1, 8, 9\}$.

Principio de la Suma y del Producto

Principio de la Suma. Si cierto objeto x_1 se puede elegir de n_1 maneras diferentes, otro objeto x_2 de n_2 maneras diferentes y así para cada objeto x_i se puede elegir de n_i maneras diferentes con i en $\{1, 2, \ldots, m\}$. Entonces la elección de x_1 o x_2 o $\ldots$ o x_m se puede realizar de $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m$ modos.

Ejemplo 5. En una pizzería escribieron los paquetes de descuentos en un tablero rectangular, hay 8 paquetes familiares, 9 paquetes de parejas, 5 paquete para niños, y solo un paquete individual. ¿Cuántos paquetes puede elegir?

Lo que sabemos es que tenemos 8 paquetes familiares, 9 de parejas, 5 para niños y 1 individual. Usando el principio de la suma observamos que tenemos 23 elecciones posibles de paquetes.

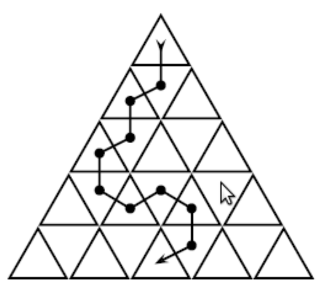
En la notación del enunciado del Principio de la Suma podemos escribir como objetos x_1 =paquete familiar, x_2 =paquete de pareja, x_3 =paquete para niño y x_4 =paquete individual donde de cada uno puedes elegirlo $n_1 = 8, n_2 = 9, n_3 = 5, n_4 = 1$ y efectivamente $23 = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$.

Principio del Producto Si el objeto x_1 se puede elegir de n_1 maneras diferentes y si, después de cada una de estas elecciones, el objeto x_2 se puede elegir de n_2 maneras diferentes, entonces las dos elecciones juntas (en ese orden) pueden realizarse de $n_1 \times n_2$ formas diferentes.

Ejemplo 6. Calvin quiere ir a Puerto Vallarta. Para esto puede elegir entre 3 compañias de autobús o 2 aerolíneas para ir de su casa a Guadalajara. Desde allí, puede elegir entre 2 compañias de autobús o 3 aerolíneas para ir a Puerto Vallarta. ¿Cuántas formas hay para que él llegue a Puerto Vallarta?

Como Calvin puede tomar un autobús o un avión hacia Guadalajara, tiene $3+2 = 5$ (Principio de la Suma) formas de dirigirse a Guadalajara. Después de lo cual, puede tomar un autobús o un avión a Puerto Vallarta, y por lo tanto, tiene otras $5 = 2 + 3$ formas de dirigirse a Puerto Vallarta (Principio de la Suma). Por lo tanto, en total, él tiene $5 \times 5 = 25$ formas de ir de casa a Puerto Vallarta (Principio del Producto).

Ejemplo 7. Considere un triángulo equilátero de longitud lateral 5, que es dividido en triángulos unitarios, como se muestra en la figura de abajo. ¿Cuál es el número de caminos desde el triángulo en la fila superior hasta el triángulo medio en la fila inferior, de modo que los triángulos adyacentes en el camino comparten un borde común y la ruta nunca sube (desde una fila inferior a una fila más alta) o vuelve a visitar un triángulo anterior?. Un ejemplo de uno de estos caminos se ilustra en la figura de abajo.



Podemos hacer la biyección entre caminos válidos y las listas ordenadas $(a_1, a_2, \ldots, a_5)$, donde $1 \leq a_i \leq i$. Esencialmente, a_i indica donde la ruta "sale" de la fila i y "entra" a la fila $i + 1$. Para cualquier ruta válida, esta lista ordenada existe; y para cualquier lista ordenada, podemos reconstruir el camino de manera única. a_1 sólo puede ser elegido de 1 manera, a_2 de 2 maneras, a_3 de 3 maneras, a_4 de 4 maneras y a_5 de 5 maneras. En total tenemos $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ caminos para elegir.

El número $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ se denota 5! y se llama 5 factorial. En general, el número $1 \times 2 \times 3 \cdot \times (n - 1) \times n$ se llama *n factorial* y se denota $n!$. Por convención $0! = 1$.

2 Problemas

Problema 1. ¿Cuántos números de 6 dígitos se pueden hacer con los dígitos 3, 3, 3, 5, 7, 9?

Problema 2. En una circunferencia se marcan 8 puntos. Pruebe que el número de triángulos que se pueden formar con vértices en esos puntos es igual al número de pentágonos que se pueden formar con vértices en esos puntos.

Problema 3. Un alumno estudió Álgebra y/ó Cálculo cada día durante el mes de Octubre. Si estudió 23 días Álgebra y 17 días Cálculo, ¿Cuántos días estudió:
a) Álgebra y Cálculo?
b) Álgebra pero no Cálculo?
c) Cálculo pero no Álegebra?

Problema 4. ¿Cuántos enteros del 1 al 100 no son múltiplos ni de 3 ni de 7?

Problema 5. En un campeonato de béisbol jugado por el sistema de eliminatorias se enfrentan 30 equipos. En cada ronda los equipos perdedores salen del torneo. Al formar los pares de equipos que se van a enfrentar puede eventualmente quedar un equipo sin jugar; éste descansa y pasa a la ronda siguiente. ¿Cuántos juegos se realizarán durante el campeonato?

Problema 6. Supongamos que se lanzan 10 dados. Cada dado es un dado regular de 6 caras con números etiquetados a los lados. ¿Cuántas sumas diferentes de los 10 números son posibles? Nota que las sumas $5 = 1 + 4$ y $5 = 2 + 3$ son la misma suma (es decir, 5), y sólo deben contarse una vez.

Problema 7. Vas a buscar tres libros en la biblioteca y quieres un libro de historia, un libro de ciencia y un libro de fantasía. La biblioteca tiene 50 libros de historia, 95 novelas de fantasía y 30 libros sobre ciencia. ¿De cuántas combinaciones de libros puedes elegir?

Problema 8. Un restaurante ofrece 5 opciones de entrada, 10 opciones del plato principal y 4 opciones de postre. Un cliente puede elegir comer solo en un tiempo (entrada, plato fuerte o postre), en dos tiempo, o en los tres tiempos. Suponiendo que todas las opciones de alimentos están disponibles, ¿cuántas comidas posibles diferentes ofrece el restaurante?

Nota: Cuando comes en un tiempo, solo eliges una de las opciones de cada tiempo.

Problema 9. (Canguro 2014, 1o y 2o) Hay 60 árboles en una fila, numerados de1 a 60. Los que tienen números pares son mezquites. Los que tienen números múltiplos de 3 son sbinos o mezquites. Los árboles restantes son alamos. ¿Cuántos alamos hay en la fila?

Problema 10. Mi teclado de piano de juguete tiene 7 teclas blancas que son 7 notas distintas digamos A, B, C, D, E, F, G. Voy a crear una melodía de tres notas al azar. No puedo repetir ninguna nota y la melodía no se puede finalizar con las notas E, F o G. ¿Cuántas melodías diferentes puedo tocar? Observemos que la melodia CGA está permitida, AFA no está permitida debido a la repetición, ABE no está permitida debido a la regla referente a la última nota.

Problema 11. Considere un triángulo equilátero de longitud lateral n, que es dividido en triángulos unitarios (ver figura del Ejemplo 7). Sea $f(n)$ el número de caminos desde el triángulo en la fila superior hasta el triángulo medio en la fila inferior, de modo que los triángulos adyacentes en el camino comparten un borde común y la ruta nunca sube (desde una fila inferior a una fila más alta) o vuelve a visitar un triángulo anterior. Da una formula para $f(n)$.

Problema 12. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar cuatro cartas de un mazo de 52, de modo que haya una de cada palo?

Problema 13. ¿De cuántas maneras pueden colocarse una torre blanca y una torre negra en un tablero de ajedrez de 8×8 de modo que no se ataquen?

Problema 14. ¿Cuántos números de tres dígitos tienen el primer dígito impar, el segundo par y el tercero igual a la suma de los dos primeros?

Problema 15. En un acto deben hablar Luis, María, Pedro, Pablo y Luisa. ¿De cuántas maneras se puede confeccionar la lista de oradores? Y si se pone la condición de que se alternen oradores de distinto sexo? ¿Y si la condición es que María hable inmediatamente después que Luis? ¿Y si es que Luis hable antes que Pedro?

Problema 16. ¿Cuántos números naturales tienen exactamente k dígitos?

Problema 17. Para escribir todos los números naturales de k dígitos, ¿cuántos ceros se necesitan?

Problema 18. Para escribir todos los números naturales desde 1 hasta 1000000, ¿cuántos ceros se necesitan?

Problema 19. Los números naturales se escriben uno a continuación del otro:

$$1234567891011121314151617181920212223\cdots$$

¿Qué dígito se encuentra en la posición 2014?

Problema 20. ¿De cuántas maneras pueden colocarse en un tablero de ajedrez tres torres blancas idénticas de modo que no se ataquen?

Problema 21. En el asta bandera de un barco se pueden izar tres banderas rojas, dos azules y cuatro verdes. ¿De cuántas formas distintas pueden izarse las banderas?

Referencias

J. H. Nieto Said, **Combinatoria para Olimpiadas Matemáticas**, Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas, Caracas, Mayo 2014

Ma. Luisa Pérez Segui, **Combinatoria**, Instituto de Matemáticas, UNAM. Cuadernos de olimpiadas. 2000.

N. VILENKIN, **¿De cuantas formas? Combinatoria**. Libro de la editorial MIR, Moscú, 1972.Ed. en español, traducción por Juan José Tolosa.