Concurrencias y Colinealidades

Juan Carlos Salazar

Introducción:

Presentamos algunos casos de concurrencias de tres rectas con sus demostraciones aplicando eventualmente el teorema de Desargues conjuntamente con el teorema de Menelao y Ceva en sus diversas formas.

Teorema 1: Punto de Clawson

Sea el triángulo UVW formado por los ejes radicales entre el circuncírculo (O) y los excírculos del triángulo ABC. Si (O_1), (O_2), (O_3) son los excírculos opuestos a los vértices A, B, C y U, V, W son los centros radicales entre los tríos de círculos (O, O_2, O_3); (O, O_1, O_3); (O, O_1, O_2) respectivamente. Probar que UA, VB, WC son concurrentes en un punto P (punto de Clawson del triángulo ABC) [1] (Ver Fig. 1).

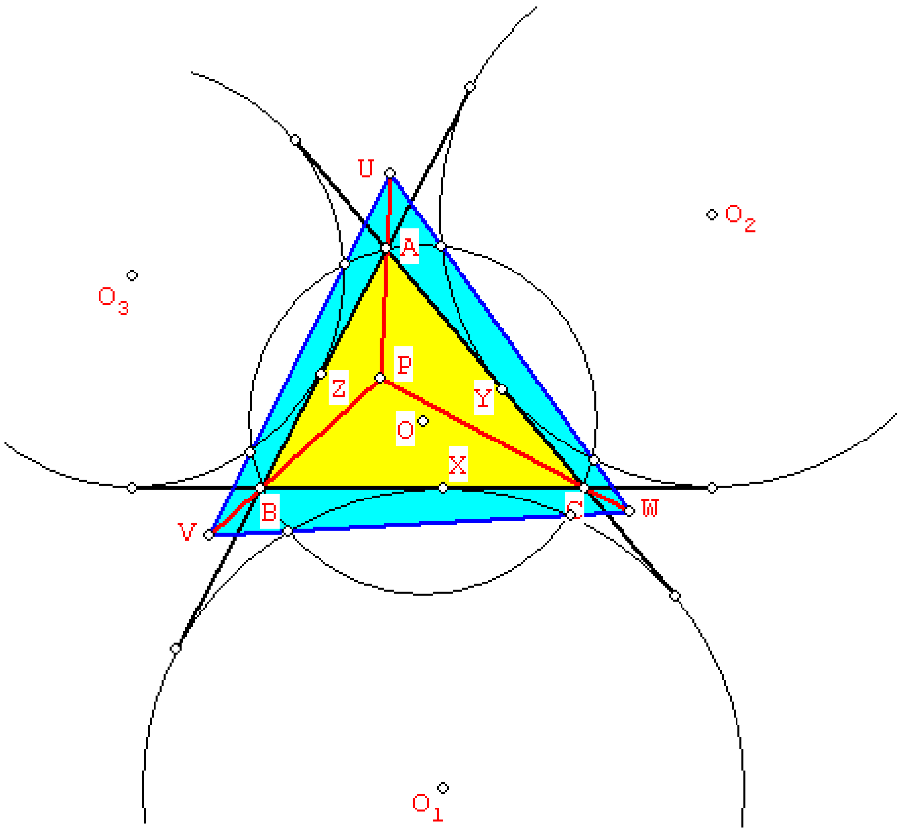

Fig. 1

Demostración:
Sin pérdida de generalidad consideramos que D, E, F son los puntos de corte entre (BC, VW) ;(AC, UW) ;(AB, UV) y X, Y, Z son los puntos de tangencia de los excírculos (O_1), (O_2), (O_3) con BC, AC, AB respectivamente (Ver Fig. 2).

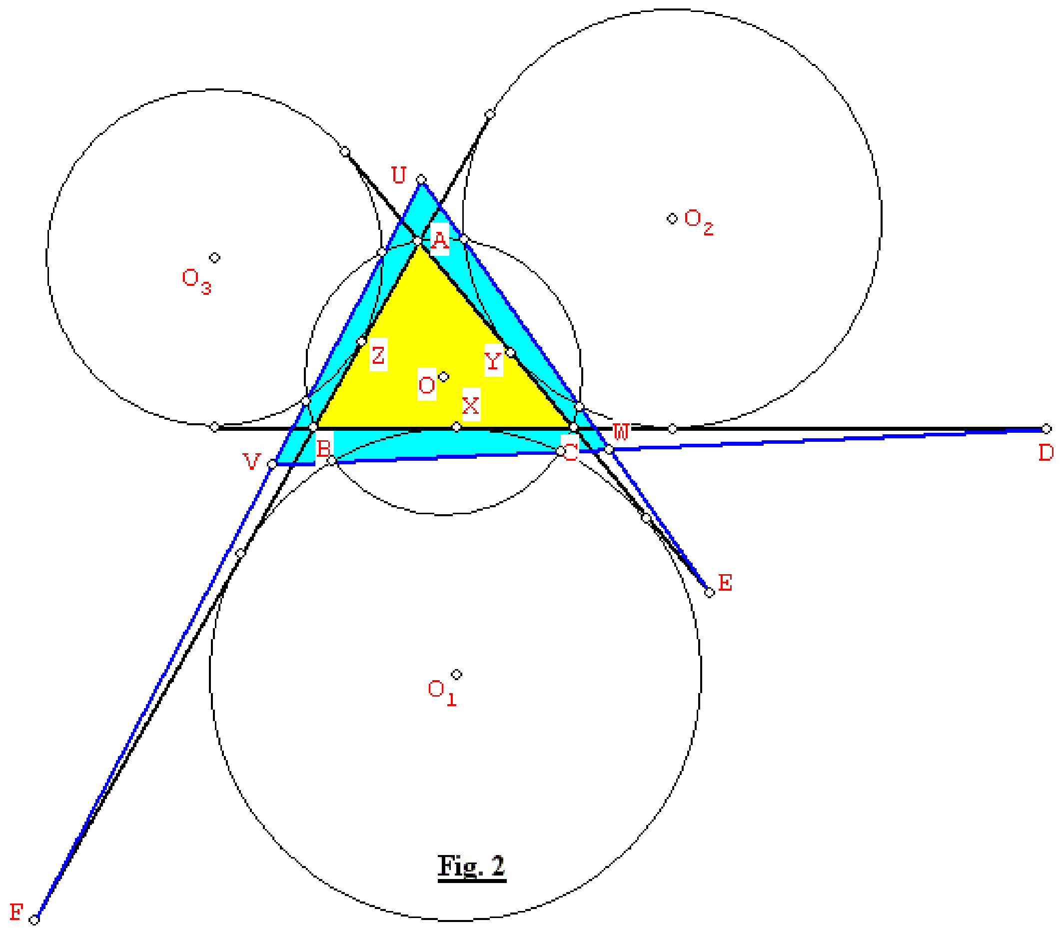

Fig. 2

En la recta BC, considerando los puntos: B, X, C y D, tomamos la potencia del punto D con respecto a los círculos (O) y (O_1):

$DX^2 = DC.DB$.... (1)

Luego:

$DX.DX = (DB - BX). (DC + CX) = DC.DB$

$DB.DC + DB.CX - DC.BX - BX.CX = DC.DB$

$DB.CX = BX.DX$

$$\left(\frac{DX}{DB}\right) = \left(\frac{CX}{BX}\right)$$

También a partir de (1): $\left(\frac{DC}{DB}\right) = \left(\frac{DX}{DB}\right)^2$

Por lo tanto: $\left(\frac{DC}{DB}\right) = \left(\frac{CX}{BX}\right)^2$ ..... (2)

Análogamente,

Para los círculos O y O_2: $\left(\frac{EA}{EC}\right) = \left(\frac{AY}{CY}\right)^2$ ..... (3)

Para los círculos O y O_3: $\left(\frac{FB}{FA}\right) = \left(\frac{BZ}{AZ}\right)^2$ ...... (4)

Entonces, sin considerar los signos, combinando (2), (3) y (4):

$$\left(\frac{DC}{DB}\right)\cdot\left(\frac{EA}{EC}\right)\cdot\left(\frac{FB}{FA}\right)=\left(\frac{CX}{BX}\right)^2\cdot\left(\frac{AY}{CY}\right)^2\cdot\left(\frac{BZ}{AZ}\right)^2$$

Debido a que las cevianas AX, BY y CZ son concurrentes en el punto de Nagel, tenemos que: $\left(\frac{CX}{BX}\right)\cdot\left(\frac{AY}{CY}\right)\cdot\left(\frac{BZ}{CZ}\right)=1$

Entonces: $\left(\frac{DC}{DB}\right)\cdot\left(\frac{EA}{EC}\right)\cdot\left(\frac{FB}{FA}\right)=1$

Por lo tanto, considerando el teorema de Menelao, para los puntos D, E, F respecto al triángulo ABC, tenemos que los puntos D, E, F son colineales. Entonces, la recta DEF es la perspectriz de los triángulos ABC y UVW (Ver Fig. 3).

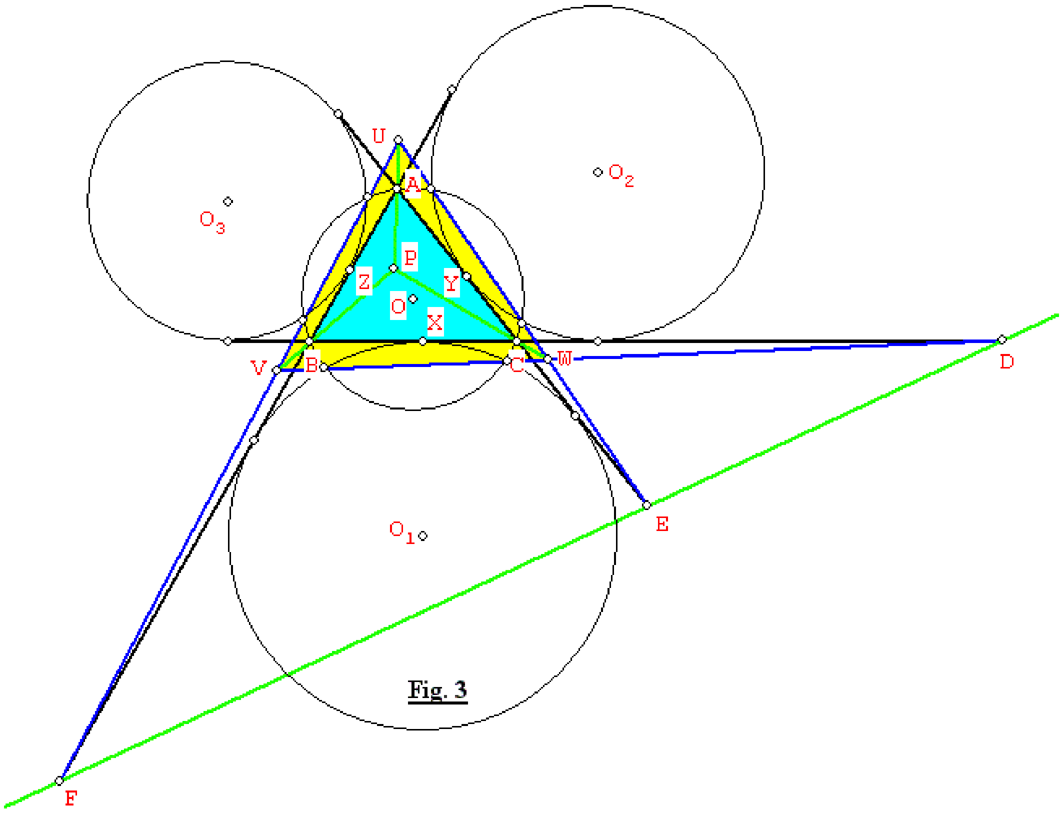

Fig. 3

Por el teorema de Desargues aplicado a los triángulos ABC y UVW, que están en perspectiva , ya que sus pares de lados se cortan en los puntos D, E, F, ubicados sobre la perspectriz, concluimos que las rectas UA, VB y WC concurren en el punto P (centro de perspectiva) denominado punto de Clawson del triángulo ABC. QED

Teorema 2:

Sea el triángulo ABC y el triángulo UVW formado por las polares DE, FG, JL de los vértices A, B, C con respecto a los excírculos opuestos (O_1), (O_2), (O_3), donde (D, E); (F, G) ; (J, L) son los puntos de tangencia de los excírculos (O_1), (O_2), (O_3) con las rectas (AB, AC); (BC, AB) ; (BC, AC) y además U, V, W son los puntos de corte correspondientes entre (FG, JL); (DE, JL); (DE, FG) respectivamente. Probar que UA, VB, WC son concurrentes en el ortocentro H del triángulo ABC [1] (Ver Fig. 4).

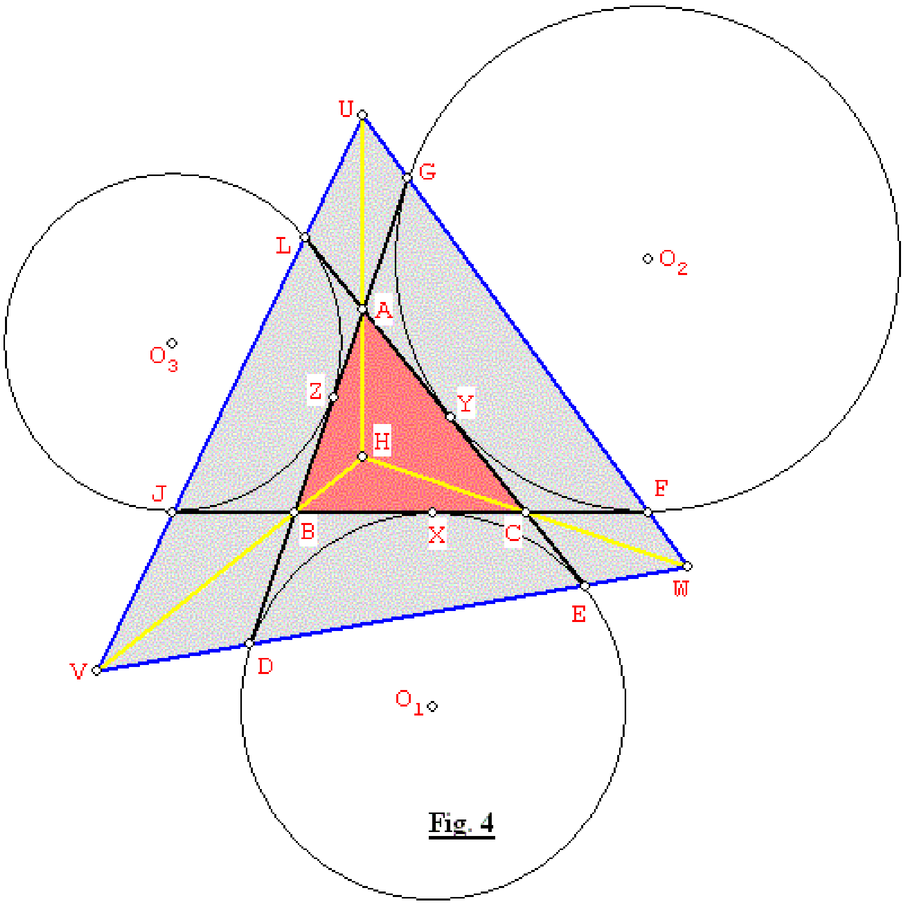

Fig. 4

Demostración:

Para probar que UA, VB y WC son concurrentes, uno de los caminos a seguir es probar que los triángulos UVW y ABC están en perspectiva, siguiendo un procedimiento similar al empleado en el teorema anterior, lo cual se cumple y dejaremos como ejercicio para el estudiante el lograrlo, considerando que se cumple: AD = AE = BF = BG = CI = CJ = s, donde BC = a, CA = b, AB = c y $s = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)$, pero quedaría pendiente el probar que el centro de perspectiva así logrado es el ortocentro del triángulo ABC.

Aunque es conocida una demostración completa utilizando el teorema de Steiner, para la concurrencia de tres perpendiculares a los lados de un triángulo [3], les presentamos un camino algo distinto, con tal propósito consideraremos la configuración que se logra entre el triángulo ABC y sus círculos exinscritos con sus tangentes externas e internas respectivas (ver Fig. 5), donde demostraremos la concurrencia de UA, VB y WC en el ortocentro H al lograr probar que UA, VB y WC son ortogonales a BC, AC y AB respectivamente.

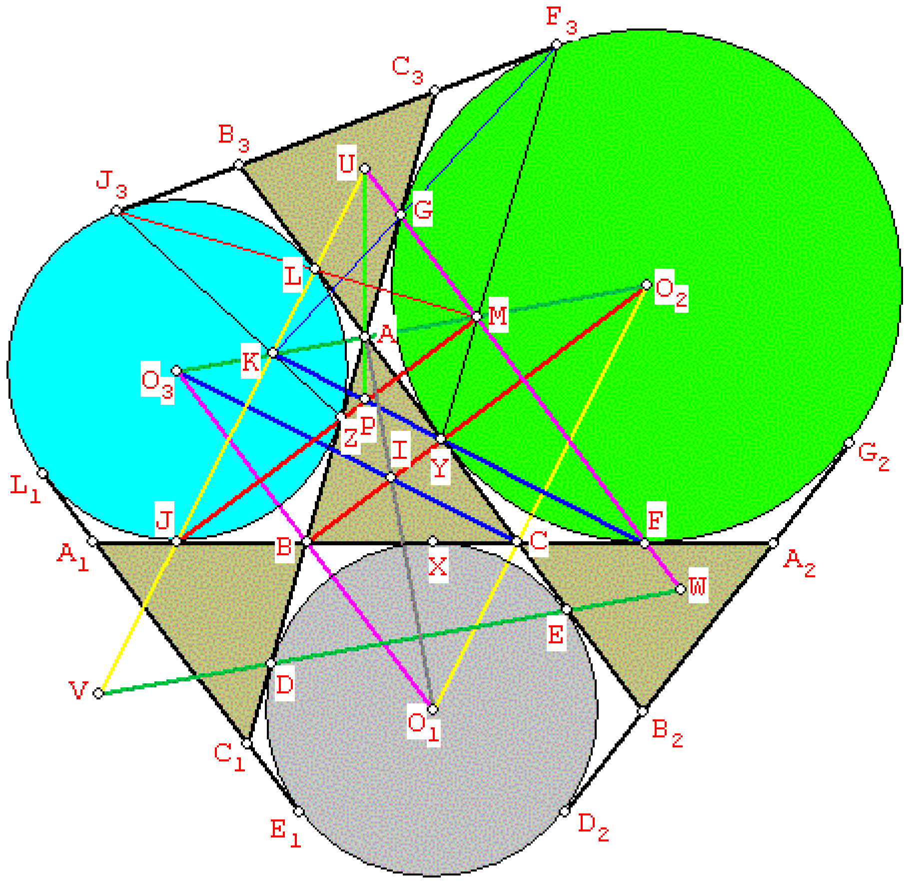

Fig. 5

Tenemos que las polares (lados) que conforman el triángulo UVW son paralelas a los lados del triángulo excentral $O_1O_2O_3$, es decir $UV//O_1O_2$, $VW//O_2O_3$ y $WU//O_1O_3$, debido a que dichos pares son respectivamente perpendiculares a CO_3, AO_1 y BO_2 respectivamente. Además al prolongar los lados del triángulo ABC y considerar las intersecciones con las tangentes externas a los excirculos L_1E_1, D_2G_2 y J_3C_3, se conforman los triángulos congruentes ABC, A_1BC_1, A_2B_2C y AB_3C_3, donde también los pares de rectas (YF, F_3G), (JZ, J_3L) concurren en los puntos K y M respectivamente sobre la recta O_2O_3, por simetría, ya que ésta última recta es bisectriz del ángulo formado por las rectas BC y J_3F_3. Además las rectas JZ y UW son ortogonales ya que ambas son perpendiculares a O_1O_3 y BO_2 respectivamente, cortándose en el punto M sobre la recta O_2O_3, también por el teorema de Pappus aplicado al hexágono O_3JMF O_2B (que no está completamente dibujado) comprobamos que los tres puntos O_2, M y O_3 son colineales, de manera similar podemos concluir que el punto M es el punto de concurrencia de las rectas J_3L, F_3Y y O_2O_3, e igualmente concluimos que el punto K es el punto de concurrencia entre las rectas O_2O_3, J_3Z y UV. Una aplicación similar del teorema de Pappus se puede ver en el excelente trabajo de Jean-Louis Ayme, sobre la demostración del teorema de Sawayama-Thébault [2, Pág.228].

También como: $\measuredangle O_3AB = \measuredangle O_3AB_3 = \measuredangle VUW = \dfrac{(\measuredangle B + \measuredangle C)}{2}$, donde: $\measuredangle A, \measuredangle B, \measuredangle C$ son los ángulos del triángulo ABC, podemos afirmar que el cuadrilátero LAMU es inscriptible ya que: $\measuredangle O_3AB_3 = \measuredangle O_3AL = \measuredangle VUW = \measuredangle LUM$. Además se cumple que: $\measuredangle LUA = \measuredangle AML = \measuredangle O_3MJ_3 = \measuredangle O_3MJ = \measuredangle KMJ = \measuredangle JFK = \measuredangle JCO_3 = \dfrac{\measuredangle C}{2}$. De tal manera

que UV es ortogonal a O_3C y FK, (O_3C//FK), y como $\measuredangle AUJ = \measuredangle AUL = \measuredangle ALM = \frac{\measuredangle C}{2}$, entonces: UA es ortogonal a BC, cuya prolongación pasará necesariamente por el punto P (ortocentro del triángulo UJF).
De una forma similar podemos probar que VB y WC son ortogonales a AC y AB respectivamente, por lo tanto UA, VB y WC concurren en el ortocentro H del triángulo ABC. QED.

Teorema 3:

Sea el triángulo ABC con circuncírculo (O) y el triángulo XYZ formado por las polares DE, FG y MN de los vértices A, B y C con respecto a los círculos (O_1), (O_2), (O_3) tangentes exteriormente al circuncírculo (O) de tal forma que (D, E); (F, G); (M, N) son los puntos de tangencia entre (O_1), (O_2), (O_3) con las rectas (AB, AC); (BC, BA); (CA, CB) respectivamente. Donde X, Y y Z son los puntos de corte entre (FG, MN); (DE, MN) y (DE, FG). Probar que XA, YB, ZC son concurrentes en un punto P (Ver Fig. 6).

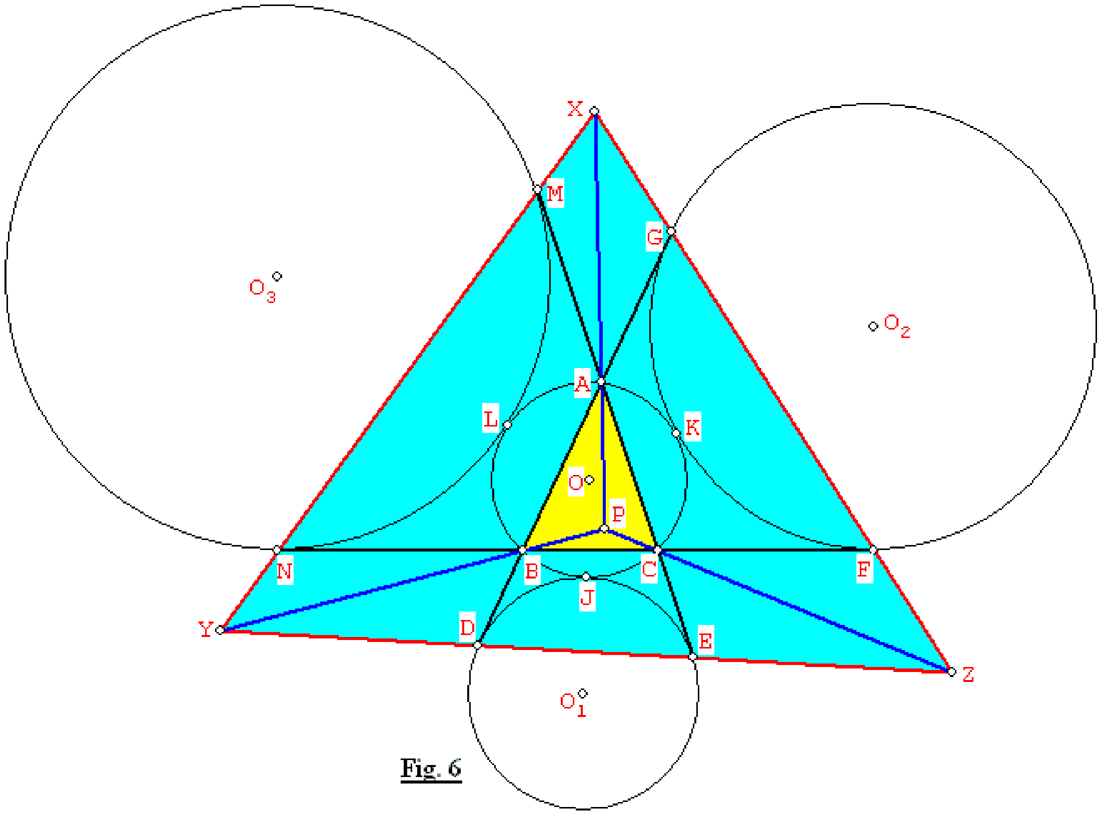

Fig. 6

Demostración:

Probaremos que XA, YB y ZC son concurrentes, logrando probar la colinealidad entre los puntos de corte de sus pares de lados, en este caso consideramos sin pérdida de generalidad que los pares de rectas (AB, XY); (BC, YZ); (AC, XZ) se cortan en los puntos R, Q, S respectivamente (Ver Fig. 7).

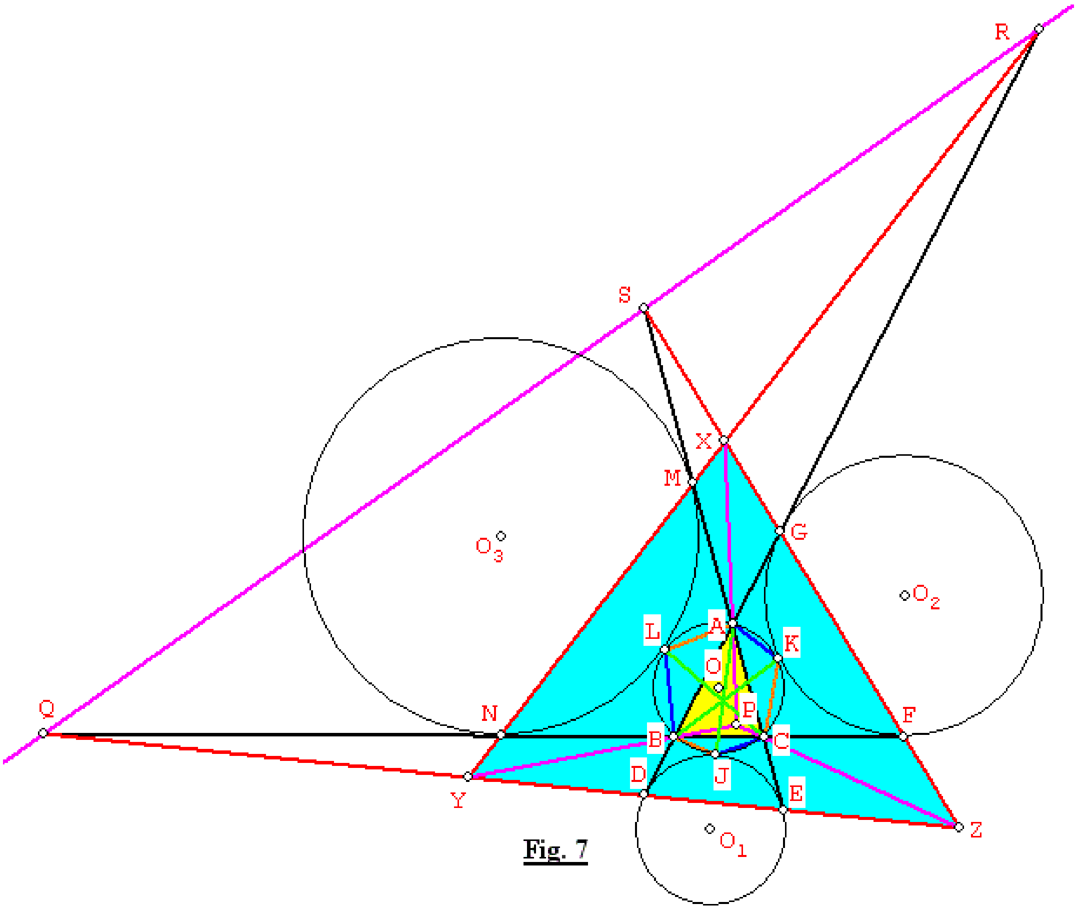

Fig. 7

Aplicamos el teorema de Menelao reiteradamente tomando como referencia al triángulo ABC y las siguientes transversales:

Para la transversal QDE: $\left(\frac{QB}{QC}\right).\left(\frac{DA}{DB}\right).\left(\frac{EC}{EA}\right)=1$, donde: DA = EA,

luego: $\left(\frac{QB}{QC}\right).=\left(\frac{DB}{EC}\right)$…… (1)

Para la transversal RMN: $\left(\frac{RA}{RB}\right).=\left(\frac{MA}{NB}\right)$…… (2)

Para la transversal SGF: $\left(\frac{SG}{SA}\right)=\left(\frac{FG}{GA}\right)$…… (3)

Combinando (1), (2), (3):

$$\left(\frac{QB}{QC}\right).\left(\frac{RA}{RC}\right).\left(\frac{SC}{SA}\right)=\left(\frac{DB}{EC}\right).\left(\frac{MA}{NB}\right).\left(\frac{FG}{GA}\right) \quad ....(4)$$

Pero, también es conocido que AJ, BK y CL son concurrentes, debido a que:
AL.BJ.CK = AK.BL.CJ……. (5)

Esta relación es una simple consecuencia de la versión trigonométrica del teorema de Ceva aplicado en el circuncirculo [4, Pág.98-99].

Adicionalmente como: $DB=\left(\frac{BJ}{R}\right)\sqrt{R(R+R_1)}$ y $EC=\left(\frac{CJ}{R}\right)\sqrt{R(R+R_1)}$

Donde R y R_1 son los radios de los círculos (O) y (O_1) respectivamente [5].

Luego: $\left(\frac{DB}{EC}\right)=\left(\frac{BJ}{CJ}\right)$. Igualmente se cumple: $\left(\frac{MA}{NB}\right)=\left(\frac{AL}{BL}\right)$ y $\left(\frac{FG}{GA}\right)=\left(\frac{CK}{AK}\right)$

Así resulta que: $\left(\frac{DB}{EC}\right).\left(\frac{MA}{NB}\right).\left(\frac{FG}{GA}\right)=\left(\frac{BJ}{CJ}\right).\left(\frac{AL}{BL}\right).\left(\frac{CK}{AK}\right)$....... (6)

Reemplazando (5) en (6): $\left(\frac{DB}{EC}\right).\left(\frac{MA}{NB}\right).\left(\frac{FG}{GA}\right)=1$

Ahora reemplazamos este último resultado en (4): $\left(\frac{QB}{QC}\right).\left(\frac{RA}{RB}\right).\left(\frac{SC}{SA}\right)=1$

Por lo tanto, hemos logrado probar que Q, S, R son colineales al verificar que se cumple la relación que resulta de aplicar el Teorema de Menelao, con respecto al triángulo ABC, para la transversal QSR.
En otras palabras los pares de lados de los triángulos ABC y XYZ tienen una perspectriz (eje de perspectiva) QSR y como consecuencia de ello las rectas XA, YB y ZC son concurrentes en un punto (centro de perspectiva) P. QED.

Teorema 4:

Sea el triángulo ABC con circuncirculo (O) y los círculos (O_1), (O_2), (O_3) tangentes internamente a (O) en los puntos X, Y, Z y los pares de lados (AB, AC); (AB, BC); (AC, BC) respectivamente. El triángulo UVW formado por las tangentes al circuncirculo (O) en los puntos X, Y, Z, donde U, V, Z son los puntos de corte entre los pares de tangentes a los puntos (Y, Z); (X, Z); (X, Y) respectivamente. Probar que UA, VB, WC son concurrentes en un punto P (Ver Fig. 8).

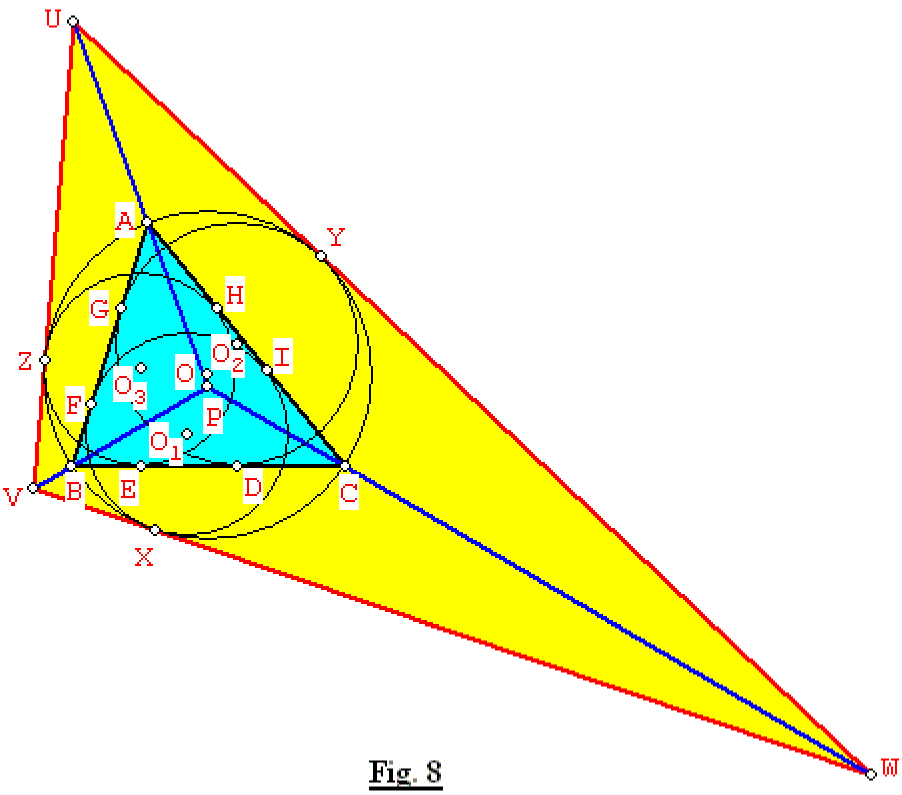

Fig. 8

Demostración:

Considerando que los pares de rectas (CA, UW); (AB, UV); (BC, VW) se cortan en los puntos J, K, L respectivamente (Ver Fig. 9), en referencia al triángulo ABC, aplicamos el teorema de la tangente, luego tenemos, para las tangentes:

JY: $JY^2 = JA.JC$…..... (1)

LX: $LX^2 = LB.LC$…. (2)

KZ: $KZ^2 = KB.KA$ …. (3)

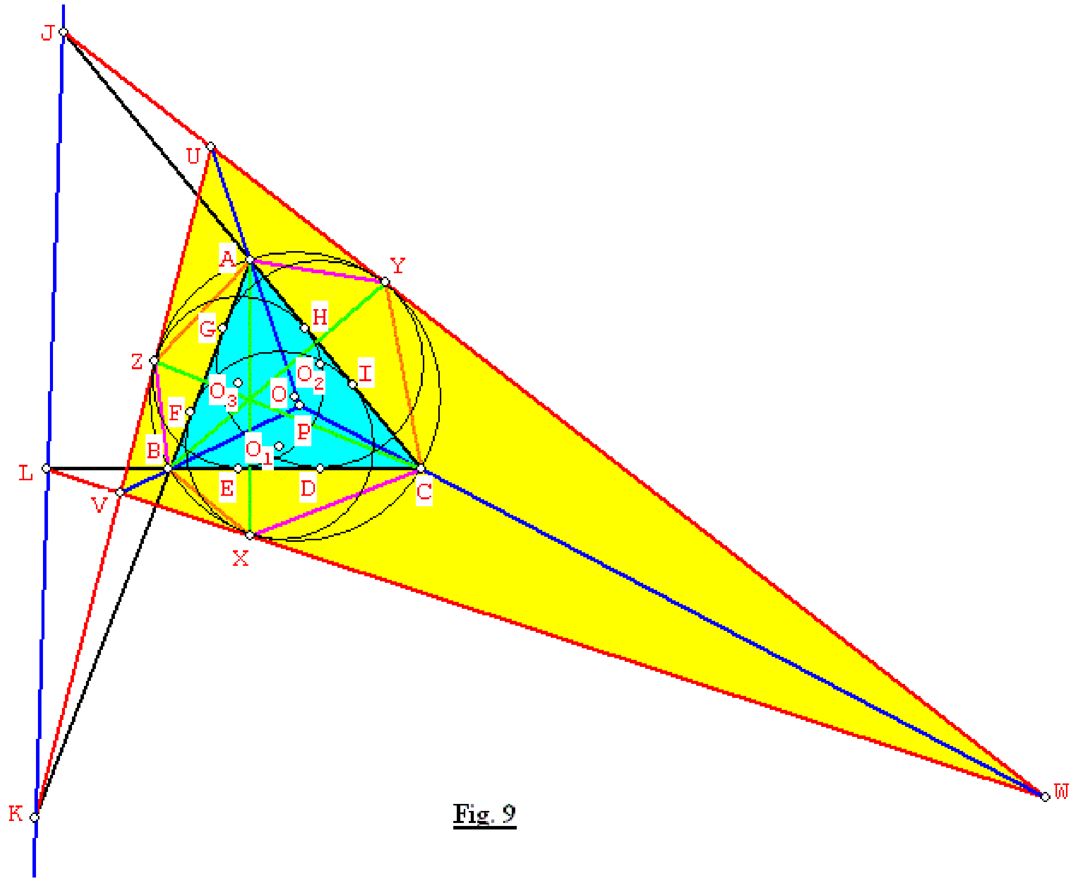

Fig. 9

Además como los triángulos JAY y JCY son semejantes también:

$\left(\frac{YA}{YC}\right) = \left(\frac{JY}{JC}\right)$ Reemplazando en (1) de donde: $\left(\frac{JA}{JC}\right) = \left(\frac{JY}{JC}\right)^2$, luego:

$\left(\frac{JA}{JC}\right) = \left(\frac{YA}{YC}\right)^2$ …. (4)

De manera similar obtendremos que:

$\left(\frac{KB}{KC}\right) = \left(\frac{ZB}{ZC}\right)^2$ …. (5)

$\left(\frac{LC}{LB}\right) = \left(\frac{XC}{XB}\right)^2$ …. (6)

A partir de (4), (5) y (6): $\left(\frac{JA}{JC}\right).\left(\frac{KB}{KC}\right).\left(\frac{LC}{LB}\right) = \left(\frac{YA}{YC}\right)^2.\left(\frac{ZB}{ZC}\right)^2.\left(\frac{XC}{XB}\right)^2$

Debido a que AX, BY, CZ son concurrentes [4, Pág.98-99], conocemos que:

$$\left(\frac{YA}{YC}\right).\left(\frac{ZB}{ZC}\right).\left(\frac{XC}{XB}\right)=1$$

Por lo tanto: $\left(\frac{JA}{JC}\right).\left(\frac{KB}{KC}\right).\left(\frac{LC}{LB}\right)=1$

Es decir que los puntos J, K, L son colineales y por lo tanto XA, YB y CZ son concurrentes en el punto P. QED.

Comentarios:

Hemos logrado encontrar para algunos de los casos aquí tratados una interrelación entre los teoremas de Menelao, Ceva y Descartes. Pretendemos que este sea un comienzo para seguir explorando las bondades de combinar nuestros conocimientos sobre estos tres teoremas, para el logro de nuestro propósito: probar la concurrencia de tres rectas. No descartamos la posibilidad de que algunos de los procedimientos en los casos aquí vistos se puedan acometer utilizando otro tipo de relaciones procedentes de la semejanza de triángulos u otras propiedades geométricas de una manera más fácil. Simplemente presentamos en este trabajo "nuestra visión" sobre este tipo de concurrencias y esperamos que ustedes estimados lectores logren encontrar "nuevos caminos" de solución y así nos sentiremos más que satisfechos de haber contribuido al enriquecimiento de su formación geométrica.

Referencias:

[1] Paul Yiu, The Clawson Point and Excircles, December, 2000:
http://www.math.fau.edu/yiu/Geometry.html
[2]Jean-Louis Ayme, Sawayama and Thébault's Theorem, Forum Geometricorum 3 (2003) 225-229:
http://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3/FG200325index.html
[3] Darij Grinberg, Synthetic proof of Paul Yiu's excircles theorem:
http://de.geocities.com/darij_grinberg/
[4] Paul Yiu, Notes on Euclidean Geometry, Summer 1.988:
http://www.math.fau.edu/yiu/Geometry.html
[5] Francisco Bellot, Los Teoremas de Ptolomeo y su Generalización por Casey:
http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/numero1.htm

Juan Carlos Salazar
caisersal@yahoo.com