Congruencia de triángulos.

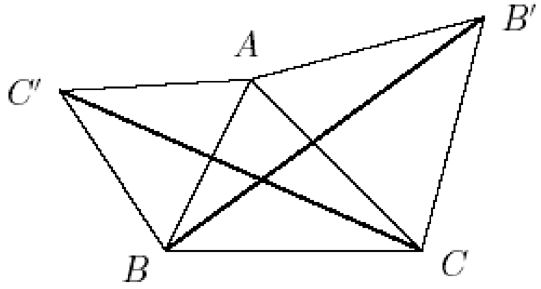
En un lenguaje coloquial decimos que dos figuras son congruentes si tienen exactamente la misma forma y el mismo tamaño. Así, tenemos que dos triángulos son **congruentes**, si tienen sus lados y sus ángulos correspondientes iguales.
Para saber si dos triángulos son congruentes basta que se cumpla uno de los siguientes criterios:

Si dos triángulos tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos iguales, son congruentes. A este criterio de congruencia se le llama **lado-ángulo-lado** y lo denotamos como **LAL**.

Si dos triángulos tienen un lado y dos ángulos adyacentes iguales, son congruentes. A este criterio de congruencia se le conoce como **ángulo-lado-ángulo** y lo denotamos como **ALA**.

Si tenemos dos triángulos con lados iguales, estos triángulos son congruentes **lado-lado-lado** y lo denotamos como **LLL**.

Ejemplo 1. *Si sobre los lados AB y CA de un triángulo ABC se construyen triángulos equiláteros ABC' y CAB', siempre se tiene que $BB' = CC'$.*



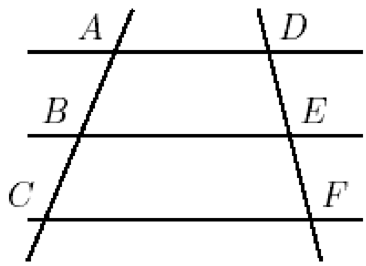
Notemos que en los triángulos BAB' y $C'AC$ se tiene que $BA = CA'$, $AB' = AC$ y $\angle BAB' = \angle BAC + 60^\circ = \angle C'AC$, luego por el criterio LAL, los triángulos son congruentes por lo que $BB' = CC'$.

Semejanza de triángulos.

Primer teorema de Thales. *En el triángulo ABC, sean D y E puntos de AB y AC respectivamente, tales que DE es paralela a BC. Entonces*

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

Segundo teorema de Thales. *Consideremos tres rectas y dos rectas transversales a éstas como se muestra en la figura. Tenemos que si AD, BE y CF son paralelas entonces $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$. Recíprocamente, si $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ y dos de las rectas AD, BE o CF son paralelas entonces las tres rectas son paralelas.*

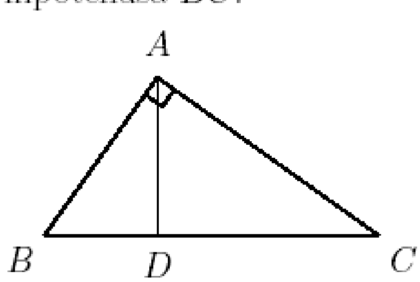


Decimos que dos triangulos son **semejantes** cuando sus ángulos son iguales y sus lados correspondientes son proporcionales. Los criterios para determinar si dos triángulos son semejantes, son muy parecidos a los de congruencia y los podemos considerar como sigue:

Dos triángulos son semejantes si cumplen ser semejantes **AAA** (o bien **AA**), **LLL**, **LAL** o **ALA**.

Ejemplo 2. *En un triángulo rectángulo la altura sobre la hipotenusa lo divide en dos triángulos semejantes a él.*

Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en el vértice A y sea AD la altura sobre la hipotenusa BC.



Tenemos que ABC es semejante a DBA ya que ambos son triángulos rectángulos y el ángulo en B es común; también los triángulos rectángulos ABC y DAC son semejantes, en éstos el ángulo en C es común.

Problemas de Geometría.

1. Utilizando el resultado del *Ejemplo* 2, demuestre el Teorema de Pitágoras.

2. Demuestre que el ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes a este.

2. Si ABC y DEF son triángulos, con AB, BC, y CA perpendiculares a las rectas DE, EF, y FD respectivamente. Demostrar de ABC es semejante a DEF.

3. Demuestre que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es $360°$.

4. Encuentre una fórmula para la suma de los ángulos interiores de un n-gono.

5. Demustre que un triángulo es isósceles, si y solo sí, tiene dos ángulos iguales.

5. A una cuadrícula de 10000×20000 cuadritos iguales, Se le traza una diagonal (que va de un vértice al opuesto). ¿Cuántos cuadritos cruza esta diagonal?

6. Si la altura trazada desde el vértice A en el triángulo ABC también es una bisectriz de $\angle A$, demuestre que $AB = AC$.

7. Si la altura trazada desde el vértice A en el triángulo ABC también es mediana, demuestre que $AB = AC$.

8. Sean BX y CY medianas del triángulo ABC. Demuestre que si $BX = CY$, entonces el triángulo es isósceles.

9. Sea $ABCD$ un cuadrilátero, tal que $AB = CD$ y $AD = BC$. Demuestre que $ABCD$ es un paralelogramo.

10. Sea $ABCD$ un cuadrilátero, tal que $AB = CD$ y $AB \parallel CD$. Demuestre que $ABCD$ es un paralelogramo.

12. Demuestre que los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales.

13. Demuestre que las diagonales de un trapecio isósceles son iguales.

14. Sean X y Y los puntos medios de los lados AB y AC, respectivamente, en el triángulo ABC. Entonces $XY \parallel BC$ y $XY = \frac{1}{2}BC$.

15. Dado el triángulo ABC, sean X, Y y Z los puntos medios de los lados BC, AC y AB, respectivamente, tracemos el triángulo XYZ. Demuestre que esto divide al triángulo original en cuatro triángulos congruentes.

16. Demuestre que las tres medianas de un triángulo se intersectan en un punto en común. (*Sugerencia:* Utilice el hecho de que si un punto divide a un segmento en cierta razón, no hay otro punto en esa recta con esa propiedad.)

17. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Demuestre que los puntos medios de los cuatro lados son los vértices de un paralelogramo.