Tercer Entrenamiento de Teoría de Números

Jesús Liceaga
jose.liceaga@cimat.mx
19 de septiembre de 2021

¡Hola! En esta sesión, nos enfocaremos a resolver bastantes problemas de Teoría de números, sobre todo de congruencias, pues probablemente es la herramienta más poderosa que tendrán para resolver problemas de olimpiada, y es importante que sepan cómo usarlas bien.
Además, veremos algunos resultados cortos pero útiles para algunos problemas en particular, pero esta vez tú los probarás todos.

-Liceaga

1. Resultados varios

En esta sección probarán varios resultados un poco aleatorios pero que pueden ser muy útiles para problemas de Teoría de Números y/o Álgebra.

1. Prueba que $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. Prueba que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. Prueba que $1^3 + 2^3 + \ldots n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
4. Prueba que $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.
5. Prueba que $2 + 4 + \cdots + 2n = n(n + 1)$.
6. Sean a, b, c enteros positivos tales que $a|c$, $b|c$ y $MCD(a, b) = 1$. Prueba que $ab|c$.
7. Sean x, y enteros. Prueba que $x - y|x^n - y^n$ para todo entero positivo n.
8. Sean x, y enteros. Prueba que $x + y|x^n + y^n$ para todo entero positivo impar n.
9. **Identidad de Sophie Germain:** Sean a, b enteros. Factoriza $a^4 + 4b^4$ como el producto de dos enteros, ninguno de ellos 1.
10. ¿Puedes encontrar alguna fórmula que diga cuánto vale $1^k + 2^k + \cdots + n^k$ para cualesquiera n, k enteros positivos?

2. Congruencias, congruencias y más congruencias

Ahora, resolverás muchos problemas en los que las congruencias facilitan muchas veces el trabajo, aunque también puede que algunos de los resultados de la sección anterior te sean útiles.

1. Sea n un entero. ¿A qué puede ser congruente n^2 módulo 3? ¿Y módulo 4?
2. Si quieres saber los últimos n dígitos de un entero positivo, ¿Qué módulo podrías usar?

3. Demuestra los criterios de divisibilidad del 2, 3, 4, 5, 8, 9 y 11 si es que no lo has hecho.
4. Sea n un entero. ¿A qué valores puede ser congruente n^2 módulo 3? ¿A cuáles puede serlo n^4 módulo 4?
5. ¿Cuál Teorema podría ser útil para calcular los valores del punto anterior?
6. Demuestra que, para todo entero positivo n, $5|n^5+4n$.
7. Sea p un primo mayor a 3. Prueba que p es congruente a 1 o 5 módulo 6.
8. Demuestra que la diferencia de 2 cubos consecutivos no puede ser divisible entre 3.
9. Encuentra todos los enteros positivos n tales que $9|n^3+2$.
10. Prueba que si p es un primo mayor a 3, entonces $24|p^2-1$.
11. Encuentra todos los primos p tales que $p|2^p+1$.
12. Sean a y b enteros positivos. Prueba que $(a+36b)(b+36a)$ no puede ser una potencia de 2.
13. Prueba que $3^{44}+4^{29}$ no es un número primo.
14. Prueba que $2021|1^{2021}+2^{2021}+3^{2021}+\cdots+2020^{2021}+2021^{2021}$.
15. Prueba que para todo entero positivo n, $3804|(n^3-n)(5^{8n+4}+3^{4n+2})$.
16. Sea n un entero mayor a 1. Prueba que n^4+4^n no es un número primo.
17. Sean a, b, c enteros positivos tales que $a^2+b^2=c^2$. Prueba que $30|abc$.
18. Demuestra que $728|a^{27}-a^3$.
19. **Teorema de Wilson:** Sea p un número primo. Prueba que $(p-1)! \equiv p-1 \mod p$.
20. Prueba que $11|3^{2n+2}+2^{6n+1}$.
21. Sea p un número primo tal que existe un entero a para el cual $a^2+1 \equiv 0 \mod p$. Prueba que p se puede escribir como la suma de dos cuadrados.
22. Sean x, y, z enteros no negativos. Prueba que las únicas soluciones a la ecuación $3^x+4^y=5^z$ son $(0,1,1)$ y $(2,2,2)$.
23. **Teorema de Fermat sobre la suma de 2 cuadrados:** Sea p un primo mayor a 2. Demuestra que p se puede escribir como la suma de 2 cuadrados si y solo si es congruente a 1 módulo 4.

3. Funciones aritméticas

Para finalizar, veremos algunas funciones que comen enteros positivos y nos regresan algún valor que puede ser útil para ciertos problemas. Nuevamente, tú tendrás que demostrarlas todas. Supongamos que n es un entero positivo tal que

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}.$$

A la cantidad de divisores positivos de n la llamaremos $\tau(n)$, a la suma de todos sus divisores positivos $\sigma(n)$ y al producto de todos sus divisores $\pi(n)$.

1. Demuestra que
$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1).$$

2. Demuestra que
$$\sigma(n) = \left(\frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1}\right)\left(\frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1}\right) \dots \left(\frac{p_n^{\alpha_n+1} - 1}{p_n - 1}\right).$$

3. Demuestra que
$$\pi(n) = n^{\frac{\tau(n)}{2}}.$$

4. ¿Cuántos cubos positivos dividen a $3! \cdot 5! \cdot 7!$?

5. Demuestra que si a y b son primos relativos, entonces $\tau(ab) = \tau(a)\tau(b)$ y $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$.