Consejos para problemas de argumentación

J.E. Payán Sosa

Octubre 2022

En los problemas de respuesta numérica el método para calificar es bastante sencillo, pues cada concursante solo puede tener el problema bien (y se le dan todos los puntos) o mal (y se le dan cero puntos), no hay posibilidad de obtener puntos parciales. Esto cambia en los problemas de argumentación, ahora no solo se le da puntos a soluciones completas, si no que soluciones incompletas pueden recibir puntos de acuerdo a el avance que se haya conseguido en la solución. Esto nos lleva a preguntarnos ¿como se decide cuantos puntos debe recibir cada solución incompleta?.

El proceso de revisión comienza con los *coordinadores*, los cuales leen el problema y lo resuelven de varias maneras, luego identifican cada paso importante para la solución y por último reparten los puntos a cada paso necesario para la solución. Para ilustrar este proceso usaremos el siguiente problema, el cual supondremos que aparece en la parte B del examen individual de un examen tipo OMMEB (y por lo tanto vale 20 puntos). Antes de continuar con la solución intenta resolver el problema por tu cuenta tal como lo harías en un examen y guarda tu solución.

Problema 0.1. Determina el menor entero positivo u tal que $n! + u$ tenga al menos 4 divisores positivos para todo entero positivo n.

Sol. Notemos que $1! + u = u + 1$ y $2! + u = u + 2$, luego $u + 1$ y $u + 2$ son dos enteros consecutivos con cuatro divisores positivos cada uno y en particular no son primos. Las primeras parejas de no primos consecutivos son $(8, 9)$ y $(9, 10)$ pero como el 9 no tiene cuatro divisores positivos (solo tiene el 1, 3 y 9) descartamos ambas opciones. La siguiente pareja es $(14, 15)$ la cual corresponde con $u = 13$, sin embargo $3! + 13 = 6 + 13 = 19$, el cual es primo y solo es divisible por si mismo y por el 1. Por lo tanto u es al menos 14.

Ahora analicemos si u puede ser 14. Primero notemos que

$$1! + u = u + 1 = 15 \qquad\qquad 1, 3, 5, 15 | 15$$

Para $n \geq 2$ tenemos que $2|n!$ y por lo tanto $2|n! + 14$, además $n! + 14 > 4$ lo cual implica que $\frac{n!+14}{2} > 2$ así que $\frac{n!+14}{2} \neq 2$. Tenemos que

$$1, 2, \frac{n! + 14}{2}, n! + 14 \,\Big|\, n! + 14$$

los cuales son cuatro enteros positivos distintos. Concluimos que $u = 14$. $\square$

Otra forma de resolver la ultima parte es

... Ahora analicemos si u puede ser 14. Primero notemos que

$$\begin{aligned}
1! + u &= u + 1 = 15, & 1, 3, 5, 15&|15\\
2! + u &= u + 2 = 16, & 1, 2, 4, 8, 16&|16\\
3! + u &= u + 6 = 20, & 1, 2, 4, 5, 10, 20&|20\\
4! + u &= u + 24 = 38, & 1, 2, 19, 38&|38\\
5! + u &= u + 120 = 134, & 1, 2, 67, 134&|134\\
6! + u &= u + 720 = 734, & 1, 2, 367, 736&|736
\end{aligned}$$

Nos falta verificar cuando $n \geq 7$. Si $n \geq 7$, entonces $2, 7|n!$, luego $2, 7|n! + u$ y

$$1, 2, 7, n! + u | \, n! + u$$

los cuales son cuatro enteros positivos distintos. Concluimos que $u = 14$. $\square$

Una vez resuelto el problema lo siguiente que hacen los coordinadores es repartir los puntos del problema a cada paso de la solución intentando que el mismo criterio se pueda aplicar para la mayor cantidad posible de soluciones, pero es posible hacer varios criterios si las hay varias soluciones que sean considerablemente diferentes entre sí, esto intentando que los puntos se repartan lo más parecido posible entre criterios. Así los 20 puntos del problema se podrían repartir en el criterio, por ejemplo, de la siguiente forma

1 *(10 puntos)* Descartar que u sea menor a 14, de los cuales

- 1.1 *(7 puntos)* Descartar todos los casos en los que $u+1$ o $u+2$ es primo
- 1.2 *(3 puntos)* Descartar $u = 7, 8, 13$, un punto por cada caso.

2 *(10 puntos)* Demostrar que $u = 14$ cumple, es decir que $n! + 14$ tiene siempre al menos cuatro divisores enteros positivos distintos, los cuales se pueden repartir como

- 2.A1 *(1 punto)* $n = 1$
- 2.A2 *(8 puntos)* Demostrar que los pares mayores a 4 tienen al menos cuatro divisores positivos distintos.
- 2.A3 *(1 punto)* Demostrar que si $n \geq 2$ entonces $n! + 14$ es un par mayor a 4.

o como

- 2.B1 *(6 puntos)* $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ un punto por cada caso.
- 2.B2 *(4 puntos)* $n \geq 7$

Por último, si el alumno demuestra que los únicos enteros positivos que NO tienen 4 divisores positivos son (el 1,) los números primos y los cuadrados de números primos, se ofrecen *6 puntos* no acumulables.

Después de realizar el (o los) criterio(s), los coordinadores lo envían a los *lideres* los cuales lo analizan y si tienen alguna otra solución no considerada se la dan a los coordinadores. Luego, los coordinadores revisan las soluciones de los concursantes usando el criterio. Si el concursante tiene correctamente un "paso" de la solución que esté en el criterio se le dará la cantidad de puntos que dice en el criterio, por ejemplo si se demuestra que u debe ser mayor o igual a 14, se le darán los 10 puntos que dice en el criterio. Si no se tiene por completo cierto "paso", se le puede dar al estudiante una fracción de los puntos correspondiente a la que tan cerca de completar el paso, por ejemplo si se descartó el caso $u = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ y 9, se tiene 7/10 de los casos de 1.1, lo cual corresponde con alrededor de 4 o 5 puntos.

No es raro que en el criterio se agreguen *puntos no acumulativos*, estos puntos suelen ofrecer por resultados que no sean necesarios para resolver el problema pero acerquen al alumno a la solución. Entre los ejemplos más comunes se encuentra dar varios casos, resolver el problema pero con un número más chico o encontrar una herramienta que facilite las cuentas. Estos puntos no acumulativos tal como su nombre lo indica, no se pueden acumular con los demás puntos del criterio, por lo que solo se pueden obtener puntos de criterio o puntos no acumulables pero no ambos a la vez (lo que dé más puntos). Es decir si un concursante tiene los cinco puntos no acumulables y descartó el caso $u = 7$ entonces se le darán 6 puntos (pues $6 > 1$) y si tiene los cinco puntos no acumulables y descartó los casos en los que $u + 1$ y $u + 2$ no es primo, entonces tiene 7 puntos (pues $7 > 6$).

Por ultimo, una vez que los coordinadores revisan los exámenes de los concursantes, le envían los puntajes preliminares a los lideres para que los revisen y si están de acuerdo, ese va a ser el puntaje final, de lo contrario, el líder y los coordinadores discuten hasta llegar a un acuerdo.