



Entrenamiento estatal. Combinatoria. Conteo.

Problemas de calentamiento.

1. ¿Cuántos códigos diferentes de cinco dígitos pueden hacerse?
2. Si para ir de A a B hay 3 caminos, para ir de A a C hay dos caminos, Para ir de B a D hay dos caminos, para ir de C a D hay tres caminos. ¿cuántos caminos hay para ir de A a D (Suponga que no existen más caminos que los mencionados).

Recuerda:

Proposición 1 (Regla de la suma) *Si un evento puede suceder de a o de b maneras hay en total $a + b$ maneras de que suceda el evento.*

Proposición 2 (Regla del Producto) *Si un evento puede suceder de a y otro independiente de b maneras hay en total $a \times b$ maneras de que sucedan los eventos.*

Permutación.

Definición 1 *Si n es un entero positivo, definimos n factorial como*

$$n! := n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

así mismo, definimos que $0! = 1$

1. ¿De cuántas maneras puedes acomodar los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 para formar un número de cinco dígitos (Pedimos que cada dígito aparezca una y sólo una vez).
2. ¿De cuántas maneras puedes acomodar los dígitos del 1 al 9 para formar un número de cinco dígitos (Pedimos que cada dígito aparezca una y sólo una vez)
3. ¿De cuántas maneras puedes acomodar tres de cinco niños en una fila?
4. Si queremos formar una código de 6 dígitos que contenga al principio los números 1, 2, 3, en algún orden y los números 4, 5, 6 en algún orden ¿de cuántas maneras podemos hacer esto?
5. Si queremos formar un código de tres dígitos que contenga los tres números 1, 2, 3 o que contenga los tres números 7, 8, 9 ¿de cuántas maneras podemos hacer esto?

Combinación

1. ¿De cuántas maneras podemos elegir cinco números de un conjunto de nueve?
2. ¿De cuántas maneras podemos elegir un grupo de tres niños de cinco?
3. ¿Cuántos subconjuntos distintos de k elementos de un conjunto de n elementos hay?

- ¿De cuántas maneras podemos elegir 3 mujeres y 3 hombres de un grupo de 5 mujeres y 6 hombres?
- ¿De cuántas maneras podemos elegir un comité de 3 personas que sólo tenga personas del mismo sexo de un grupo de 4 hombres y 5 mujeres?

Definición 2 El número de subconjuntos de k elementos de un conjunto de n elementos se define como **combinación de k elementos de n elementos** o, más corto, **combinación de k de n** y se denota como:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Bijecciones.

Definición 3 Bijección diremos que una relación entre dos conjuntos es una *bijección* si a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto.

Las bijecciones son una gran herramienta para el conteo. En efecto, muy posiblemente ya las hayas usado sin darte cuenta.

Ejemplo 1 En una cuadrícula de 4×7 llamamos **A** al vértice inferior izquierdo y **B** al vértice superior derecho. Si sólo podemos caminar sobre las aristas de la cuadrícula u sólo hacia la derecha y hacia arriba ¿Cuántos caminos diferentes hay para ir de **A** a **B**?

Solución:

En el pintarrón.

- Demostrar usando conjuntos y caminos que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- Demostrar que un conjunto de n elementos tiene 2^n subconjuntos diferentes (incluidos el vacío y el mismo conjunto) o bien demostrara que $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$. ¿por qué es lo mismo demostrar una cosa o la otra?
- Demostrar, **sin usar álgebra**, que $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Separadores

Para comprender que son los separadores empecemos con el siguiente:

Ejemplo 2 En una tienda hay 5 diferentes sabores de refrescos. Si se quieren comprar 20 refrescos ¿de cuántas maneras diferentes se puede hacer esto? **Solución:**

En el pintarrón.

- Si en el ejemplo anterior ¿de cuántas maneras se pueden comprar los 20 refrescos si se quiere que haya al menos uno de cada uno?
- Seis cajas están numeradas del 1 al 6. ¿De cuántas formas se pueden repartir 20 pelotas idénticas entre las cajas? (pueden quedar vacías)
- Doce libros idénticos se van a forrar usando los colores azul, blanco y rojo. ¿de cuántas maneras diferentes se puede hacer esto?

Algunas sugerencias

- Si no sabes como contar algo, intenta contar lo contrario.
- Puedes contar los casos varias veces y después dividir entre las veces que contaste demás.
- Puedes contar demás siempre que lo que cuentes demás se lo restes.

Ejercicios.

1. ¿Cuántos códigos diferentes de cinco dígitos pueden hacerse?
2. Si para ir de A a B hay 3 caminos, para ir de A a C hay dos caminos, Para ir de B a D hay dos caminos, para ir de C a D hay tres caminos. ¿cuántos caminos hay para ir de A a D (Suponga que no existen más caminos que los mencionados).
3. ¿De cuántas maneras puedes acomodar los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 para formar un número de cinco dígitos (Pedimos que cada dígito aparezca una y sólo una vez).
4. ¿De cuántas maneras puedes acomodar los dígitos del 1 al 9 para formar un número de cinco dígitos (Pedimos que cada dígito aparezca una y sólo una vez)
5. ¿De cuántas maneras puedes acomodar tres de cinco niños en una fila?
6. Si queremos formar una código de 6 dígitos que contenga al principio los números 1, 2, 3, en algún orden y los números 4, 5, 6 en algún orden ¿de cuántas maneras podemos hacer esto?
7. Si queremos formar un código de tres dígitos que contenga los tres números 1, 2, 3 o que contenga los tres números 7, 8, 9 ¿de cuántas maneras podemos hacer esto?
8. ¿De cuántas maneras podemos elegir cinco números de un conjunto de nueve?
9. ¿De cuántas maneras podemos elegir un grupo de tres niños de cinco?
10. ¿Cuántos subconjuntos distintos de k elementos de un conjunto de n elementos hay?
11. ¿De cuántas maneras podemos elegir 3 mujeres y 3 hombres de un grupo de 5 mujeres y 6 hombres?
12. ¿De cuántas maneras podemos elegir un comité de 3 personas que sólo tenga personas del mismo sexo de un grupo de 4 hombres y 5 mujeres?
13. ¿Cuántas parejas de enteros positivos cumplen que su máximo común divisor es d y su mínimo común múltiplo es $dp^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta$ donde p, q, r, s son primos distintos?
14. ¿Cuántas placas de automóvil distintas se pueden hacer si una placa de auto consta de 3 letras y 4 dígitos?
15. ¿Cuántos números de cuatro cifras distontos impares hay? ¿Cuántos son pares?
16. Cinco estudiantes se escogen al azar de un grupo de 10 para formar una fila. ¿Cuántas filas diferentes se pueden formar?
17. En una carrera compiten cinco corredores A, B, C, D, E . Si nunca hay empates, ¿En cuántos resultados A le gana a B ?

18. Hay 4 parejas casadas en un club. ¿De cuántas maneras se puede elegir un comité de 3 personas de tal manera que no haya un matrimonio incluido en el comité?
19. Se tienen 8 piezas de ajedrez: 2 torres, 2 alfiles, 2 caballos y 2 peones, uno de cada color. ¿De cuántas formas pueden acomodarse las 8 piezas en una columna de manera que no queden dos piezas del mismo color juntas?
20. Una persona tiene 6 amigos. Cada noche, durante 5 días, invita a cenar a un grupo de 3 de ellos de modo que el mismo grupo no es invitado dos veces. ¿Cuántas maneras hay de hacer esto?
21. Seis personas A, B, C, D, E, F se sientan en torno a una mesa redonda. ¿Cuántas posiciones circulares diferentes hay? (Dos posiciones se consideran iguales si una se puede obtener de otra por rotaciones).
22. ¿Cuántos números hay del 1 al 1000 que pueden escribirse en la forma a^b con a y b enteros mayores que 1?
23. ¿Cuántos números se pueden representar como suma de algunos de los números 1, 2, 4, 8, 16 donde cada número se escoge a lo más una vez? Por ejemplo el 11 se puede representar como $8 + 2 + 1$, además las sumas con un sólo sumando están permitidas.
24. ¿De cuántas maneras distintas pueden colorearse los lados de un triángulo equilátero con cuatro colores distintos, si suponemos que un mismo color se puede emplear en lados distintos y que dos coloraciones son iguales si difieren en un giro del triángulo en el plano?
25. Considere los 36 vértices de una cuadrícula de 6×6 . Utilizando éstos como vértices de triángulos no degenerados, ¿cuántos triángulos distintos se pueden formar?
26. ¿Cuántos números del 1 al 10000 tienen sus cifras en orden estrictamente creciente? (Por ejemplo 1, 46, 1379 tienen la propiedad y 280 y 122 no la tienen).
27. De los números de cuatro cifras que son múltiplos de 9, ¿cuántos hay que tienen todas sus cifras distintas de 0 y distintas entre sí?
28. Si se escriben todos los enteros positivos en forma consecutiva obtenemos la siguiente secuencia de cifras:

123456789101112131415...

¿Qué cifra ocupa el lugar 19888891 y a qué número corresponde?

29. a) ¿Cuántos números de ocho cifras hay cuyos dígitos sean 1, 2, 3 y 4 tales que cifras consecutivas sean dígitos no consecutivos distintos?
 b) ¿Cuántos números de 7 cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, y 4 tales que los dígitos 1 y 2 no sean cifras consecutivas?
30. a) ¿Cuántos cuadrados hay en un tablero de ajedrez?
 b) ¿Cuántos cuadrados hay en un tablero de $n \times n$?
31. Seis personas A, B, C, D, E, F se sientan en torno a una mesa redonda. ¿Cuántas posiciones circulares diferentes hay? (Dos posiciones se consideran iguales si una se puede obtener de otra por rotaciones).

32. ¿Cuántos paralelepípedos rectangulares distintos se pueden construir, para los cuales la longitud de cada arista es un entero del 1 al 10?
33. En una ciudad hay dos ríos paralelos R y S unidos por 10 calles y separados por otras cinco calles, tal que forman una cuadrícula. ¿Cuántas rutas de autobús se pueden diseñar del río R al río S si durante el recorrido total el autobús debe dar menos de cinco vueltas y no debe pasar dos veces por un mismo lugar?
34. La distancia entre dos ciudades A y B es de 9999 kilómetros. A lo largo de la carretera, que une a estas ciudades, hay postes indicadores de los kilómetros, en los que están escritas las distancias hasta A y hasta B . ¿Cuántos postes habrá, entre ellos, en los cuales solo aparezcan dos cifras distintas? (En el primer poste aparece $(0, 9999)$ y en el último poste aparece $(9999, 0)$).
35. Un icosaedro es un sólido regular de 20 caras, cada una de las cuales es un triángulo equilátero. ¿Cuántas diagonales tiene un icosaedro?
36. En un libro de 2018 páginas se tuvieron que reescribir todos los números de las páginas. ¿Cuántos ochos se escribieron?
37. ¿Cuántos divisores tiene un número entero n ? (Sugerencia: Utiliza el hecho de que un entero es la multiplicación de sus factores primos, luego $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$, donde P_i es primo).
38. Los números de seis dígitos $ABCDEF$ donde los dígitos varían del 1 al 6 y son todos distintos, se llaman armoniosos si 1 divide a A , 2 divide a AB , 3 divide a ABC , 4 divide a $ABCD$, 5 divide a $ABCDE$ y 6 divide a $ABCDEF$. ¿Cuántos números armoniosos hay de 6 dígitos?
39. Para escribir todos los enteros positivos del 1 al $1ab$ hasta el $ab2$ inclusive se han empleado $1ab1$ cifras (a y b son dígitos). ¿Cuántas cifras más se necesitan para escribir los números hasta aab ?
40. ¿Cuántas listas de 7 números de dos cifras son tales que cada tres términos consecutivos de la lista tienen suma múltiplo de 3? (En cada lista pueden repetirse números).
41. Un número de tres cifras es equilibrado si una de sus cifras es el promedio de las otras dos, por ejemplo el 258 es equilibrado pues $5 = \frac{2+8}{2}$. ¿Cuántos números equilibrados de tres cifras hay?
42. Supongamos que queremos formar 5 pilas de cajas con las siguientes condiciones: cada pila debe tener entre una y cinco cajas. Además, cada pila no debe tener más cajas que la pila de su izquierda. ¿De cuántas formas podemos hacer esto?
43. Sean l_1 y l_2 dos rectas paralelas. Se han marcado k puntos en la recta l_1 y n puntos en la recta l_2 ($k \geq n$). Si se sabe que la cantidad total de triángulos que tienen sus tres vértices en puntos marcados es 220, determine todos los valores posibles de k y n . (19a Olimpiada en San Luis Potosí. Tercer examen selectivo).