

TEORÍA DE NÚMEROS: CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

OMMGTO 2022
Jesús Liceaga
jose.liceaga@cimat.mx



¿QUÉ SON?

- Para ciertos problemas, es conveniente saber si un número es divisible entre otro sin tener que hacer la división. Para esto existen criterios que nos pueden ayudar.
- A continuación presentamos algunos de los criterios de divisibilidad más usados, aunque existen más.



CRITERIO DEL 2

- Un número es divisible entre 2 **si y solo si** el dígito de sus unidades es par.
- 2 divide a 12345678, pues 8 es par.
- 2 no divide a 87654321, pues 1 no es par.



CRITERIO DEL 3

- Un número es divisible entre 3 si y solo si la suma de sus dígitos es divisible entre 3.
- Consideremos al número 9135 y notemos que la suma de sus dígitos es $9 + 1 + 3 + 5 = 18$, y como 18 es divisible entre 3, entonces 9135 es divisible entre 3.
- Consideremos al número 1111 y notemos que la suma de sus dígitos es $1 + 1 + 1 + 1 = 4$, y como 4 no es divisible entre 3, entonces 1111 no es divisible entre 3.

CRITERIO DEL 4

- Un número es divisible entre 4 si y solo si el número formado por sus decenas y unidades es divisible entre 4.
- Consideremos al número 5516.
- Como podemos observar, el número formado por sus decenas y unidades es 16.
- Puesto que 4 divide a 16, entonces 4 divide a 5516.



CRITERIO DEL 5

- Un número es divisible entre 5 si y solo si el dígito de sus unidades es 0 o 5.
- 5 divide a 12345, pues este número termina en 5.
- 5 no divide a 123456, pues este número no termina ni en 0 ni en 5.



CRITERIO DEL 8

- Un número es divisible entre 4 si y solo si el número formado por sus centenas, decenas y unidades es divisible entre 8.
- Consideremos al número 57016.
- Como podemos observar, el número formado por sus decenas y unidades es 016, o bien, simplemente 16.
- Puesto que 8 divide a 16, entonces 8 divide a 57016.



CRITERIO DEL 9

- Un número es divisible entre 9 si y solo si la suma de sus dígitos es divisible entre 9.
- Consideremos al número 1917 y notemos que la suma de sus dígitos es $1+9+1+7=18$, y como 18 es divisible entre 9, entonces 1917 es divisible entre 9.



CRITERIO DEL 11

- Un número es divisible entre el 11 si y solo si la suma de sus dígitos en posición impar menos la suma de sus dígitos en posición par es divisible entre 11.
- Consideremos al número 25432.
- La suma de sus dígitos en posición impar es $2 + 4 + 2 = 8$.
- La suma de sus dígitos en posición par es $5 + 3 = 8$.
- Como $8 - 8 = 0$ es divisible entre 11, entonces 25432 es divisible entre 11.
- Notemos que podemos restar “al revés” y el criterio sigue funcionando.



PREGUNTAS

- ¿Cómo saber si un número es divisible entre 6 o 10?
- ¿Cómo saber si un número es divisible entre 7?



PROBLEMA

Nuria escribe un número de 3 cifras en el pizarrón, y le hace notar a Sebas que éste es divisible entre 55. Sebas se queda viendo el pizarrón un rato y luego le responde que, no sólo pasa eso, sino que al invertir el orden de los dígitos el número resultante sigue siendo divisible entre 55. ¿Qué número escribió Nuria?

Solución.

Sea abc el número que escribió Nuria, donde a, b, c son sus dígitos.

Por la observación de Sebas, sabemos que cba es divisible entre 55, y como 5 divide a 55, entonces 5 divide a cba . Luego, $a = 0$ o $a = 5$.

Sin embargo, como abc es un número de 3 cifras, entonces a no puede ser 0, por lo que $a = 5$.



PROBLEMA

Así mismo, como abc es divisible entre 55, también es divisible entre 5, de donde $c = 5$ o $c = 0$.

Puesto que 11 divide a 55, entonces 11 divide a abc . Por lo tanto, $a + c - b = 5 + c - b$ debe de ser un múltiplo de 11.

Si $c = 5$, entonces $a + c - b = 10 - b$. Luego, como b está entre 0 y 9 por ser un dígito, entonces $1 \leq 10 - b \leq 10$.

Sin embargo, ningún número entre 1 y 10 es divisible entre 11, así que no se puede dar el caso en el que $c = 5$. Así, $c = 0$.

Por lo tanto, $a + c - b = 5 - b$ y, como b está entre 0 y 9 por ser un dígito, se sigue que $-4 \leq 5 - b \leq 5$.

Como el único número divisible que está entre -4 y 5 es 0, entonces $5 - b = 0$, de donde $b = 5$.

Así, el número que escribió Nuria fue 550.

