CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Daniel Tzoali Arroyo Valdivia

1. Teoría de Números

La Teoría de Números es el área de las Matemáticas que estudia algebraicamente a los números enteros. Se tratan propiedades de la divisibilidad (el que un número sea múltiplo de otro) y de las congruencias (una relación entre los números enteros que considera como iguales los números en forma cíclica, como por ejemplo, el que la una de la tarde sea lo mismo que las 13 horas).

2. Tipos de números

Números Naturales:

Estos se representan cómo

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Es decir, NO incluyen a los números negativos, al 0, ni a números con decimales.

Algunos autores incluyen al 0 dentro de los números naturales, pero nosotros no hacemos eso aquí.

Dentro de los números naturales se pueden hacer sumas y multiplicaciones, que siempre tendrán como resultado un número natural. Al hacer restas puede que el resultado sea un número natural, pero también puede resultar en un número negativo o 0. Y así pasamos al siguiente tipo de números.

Números Enteros:

Se representan cómo

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Estos incluyen a los números naturales junto a los números negativos y al 0. Pero estos tampoco incluyen a los números con decimales.

En ocasiones para referirnos a los enteros positivos escribimos $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ (que serían los números naturales) y para los enteros negativos $\mathbb{Z}^- = \{\dots, -3, -2, -1\}$. El 0 es un número que no es positivo ni negativo, de hecho, es la división entre ambos.

Dentro de los números enteros se pueden realizar sumas, restas y multiplicaciones, que siempre tendrán como resultado un número natural. Al hacer divisiones el resultado podría ser un entero o una fracción irreducible. Así se puede pasar a los números racionales, pero eso ya no es importante para Teoría de Números.

Un dato que SÍ es importante, es que el símbolo $\in$ se lee como "pertence a", entonces si te encuentras con $a \in \mathbb{Z}$ se leería "a pertenece a los números enteros".

3. Divisibilidad

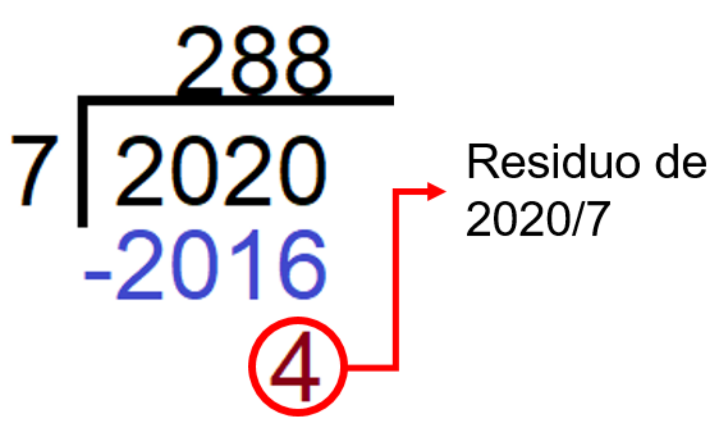
Tomando dos números enteros que llamaremos a y b, decimos que a divide a b, en símbolos $a|b$, si es posible encontrar un entero x de tal manera que $ax = b$. En ocasiones x puede ser un número, una variable o alguna expresión algebraica. Por ejemplo, $7|91$ porque $(7)(13) = 91$, aquí $x = 13$; $2|2a$ porque $2a = 2(a)$, aquí $x = a$; $3|3z + 6y$ porque $3z + 6y = 3(z + 2y)$, aquí $x = z + 2y$.

Otras formas de decir que a divide a b son:

a es divisor de b,
a es factor de b,
b es divisible entre a y
b es múltiplo de a.

Si a no divide a b, se escribe $a \nmid b$.

Otra forma de pensar si un número a es divisor de b, es hacer la división $\frac{b}{a}$ y si el residuo de está es 0, entonces a sí sería divisor de b. Por si no lo recuerdas, el residuo de una división es el número que queda debajo de la "casita".



Más ejemplos

- $-12|36$, aquí $x = -3$.
- Todos los números pares los divide el 2, porque estos son de la forma $2x$ con x entero.
- $17|0$, aquí $x = 0$. En general, cualquier entero a cumple que $a|0$, porque $a * 0 = 0$.
- $1| - 19$, aquí $x = -11$. En general, para todo entero a se tiene que $1|a$, porque $1 * a = a$.

OJO: el símbolo | no quiere representar el símbolo de división, sólo representa una relación. Por ejemplo $\frac{0}{0}$ no está definida, pero se puede decir que $0|0$ porque $0 = 0x$ para cualquier x.

Propiedades

Para a, b y c enteros:

1. Siempre $a|a$.
2. Si $a|b$, entonces $a|bc$.
3. Si $a|b$ y $b|c$, entonces $a|c$.
4. $a|b$ y $b|a$ si y sólo si $|a| = |b|$, esto quiere decir que $a = \pm b$.
5. Si $a|b$ y $a|b + c$, entonces $a|c$.
6. $a|b$ y $a|c$ si y sólo si $a|rb + sc$ para CUALESQUIERA r y s enteros.

Demostraciones

1. Si $x = 1$, tendríamos que $a(1) = a$, lo cual es cierto.
2. Si $b = ax$, entonces $bc = acx = a(cx)$. Tomando $x_2 = cx$, entonces $bc = ax_2$ y así se seguiría cumpliendo la definición de divisibilidad.
3. Si $b = ax_1$ y $c = bx_2$, si sustituimos tenemos que $c = a(x_1 x_2)$ por lo que $a|c$.
4. OJO: cuando se quiera demostrar algo que contenga "si y sólo si" se tiene que suponer lo primero para demostrar lo segundo. Después de manera contraria, así se probaría que si pasa algún caso, tiene que pasar el otro.
    a. Suponiendo que $a|b$ y $b|a$ entonces $a = bx_1$ y $b = ax_2$, sustituyendo quedaría que $a = ax_1x_2$ entonces $1 = x_1x_2$. Como x_1 y x_2 son enteros, entonces $x_1 = x_2 = 1$ o $x_1 = x_2 = -1$. Sustituyendo en la primera ecuación, puede que $a = b(1) = b$ o que $a = b(-1) = -b$. Y así demostraríamos la primera parte del "si y sólo si".
    b. Suponiendo que $a = \pm b$ y cómo siempre $a|a$, se puede sustituir la ecuación y tendríamos que $a| \pm b$, esto quiere decir que $a|b$ y $a| - b$.

Ahora, escribir $a = \pm b$ es lo mismo que $b = \pm a$, entonces se puede repetir el procedimiento anterior para probar que $b|a$. Y así se habría demostrado el "si y sólo si".

5. Si $b = ax_1$ y $b + c = ax_2$, restando las dos ecuaciones tenemos que $c = ax_2 - ax_1 = a(x_2 - x_1)$. Tomando $x_3 = x_2 - x_3$, entonces $c = ax_3$ y así se seguiría cumpliendo la definición de divisibilidad.
6. Al tener que probar otro "si y sólo si" se vuelve a hacer la demostración en las dos direcciones.
    a. Suponiendo que $a|b$ y $a|c$, entonces $b = ax_1$ y $c = ax_2$, entonces $rb + sc = ax_1r + ax_2s = a(x_1r + x_2s)$. Así ya se demostró la primera parte del "si y sólo si".
    b. Ahora, suponiendo que $a|rb + sc$ para cualesquiera r y s enteros. Se puede tomar $r = 1$ y $s = 0$, tendríamos que $a|b$. Ahora si se toma $r = 0$ y $s = 1$, tendríamos que $a|c$. Así ya se habrían demostrado el "si sólo si" en las dos direcciones.

En general, todas las propiedades anteriores también se pueden aplicar cuando a, b o c son números enteros negativos, lo único que cambiaría sería el signo de la x en su demostración

4. Datos de vital importancia

Por si quieres descansar un momento, checa estos datos

1. Claudio Ptolomeo no solo destacó por su Almagesto astronómico, sino también por la *Harmonica*, un tratado de teoría musical donde proponía que las notas musicales podían ser traducidas a proporciones matemáticas y viceversa. Esto le llevó a la noción de la *música de las esferas*, el sonido de los planetas en movimiento. https://www.revistaciencias.unam.mx/en/102-revistas/revista-ciencias-100/714-la-musica-de-las-esferas-taditio-y-canon-astronomico-musical-de-kepler.html
2. El pelaje del ocelote se caracteriza por tener manchas en forma de anillos, que son distintas a las del jaguar por no ser alargadas y a las del margay porque este último las tiene compactas y oscuras. https://www.biodiversidad.gob.mx/Biodiversitas/Articulos/biodiv118art1.pdf
3. El ocelote puede ser domesticado con relativa facilidad, aunque su captura para domesticación es una de las principales causas de su desaparición. https://www.mexicodesconocido.com.mx/ocelote-el-gato-mexicano.html

5. Criterios de divisibilidad

Los criterios de divisibilidad son reglas que sirven para saber si un número es divisible por otro, simplificando el trabajo de la división. Algunos de ellos son conocidos desde la escuela.

Criterio del 2. Un entero a es divisible por 2 si y sólo si a termina en 0, 2, 4, 6 u 8. (Por ejemplo, 2 divide a 38, pero no a 51.)

Criterio del 3. Un entero a es divisible por 3 si y sólo si la suma de las cifras de a es divisible por 3. (Por ejemplo, 3 divide a 9822 porque 9+8+2+2=12 y 3 sí divide a 12. Pero 3 no divide a 634 porque 6+3+4=13 y 3 no divide a 13.)

Criterio del 4. Un entero a es divisible por 4 si y sólo si el número formado por las dos últimas cifras es divisible por 4. (Por ejemplo, 4 divide a 63554512 porque 4 divide a 12, las últimas dos cifras del número. Pero 4 no divide a 8414822 porque 4 no divide a 22.)

Criterio del 5. Un entero a es divisible por 5 si y sólo si a termina en 0 o 5. (Por ejemplo, 5 divide a 42340, pero no a 55051.)

Criterio del 6. Un entero a es divisible por 6 si y sólo si a es divisible por 2 y 3. Es decir, que a termine en 0, 2, 4, 6 u 8, y al mismo tiempo que la suma de sus dígitos sea divisible por 3. (Por ejemplo, 6 divide a 5412 porque es divisible por 2 y 3. Pero 6 no divide a 2342 porque 3 no lo divide, tampoco 6 divide a 423 porque 2 no lo divide.)

Criterio del 8. Un entero a es divisible por 8 si y sólo si el número formado por las tres últimas cifras es divisible por 8. (Por ejemplo, 8 divide a 2816 porque 8 divide a 816 que es el número que se forma con las últimas tres cifras. Pero 8 no divide a 88012.)

Criterio del 9. Un entero a es divisible por 9 si y sólo si la suma de las cifras de a es divisible por 9. (Por ejemplo, 9 divide a 45423 porque 4+5+4+2+3=18 y 9 sí divide a 18. Pero 9 no divide a 9033 porque 9+0+3+3=15 y 9 no divide a 15.)

Criterio del 10. Un entero a es divisible por 10 si y sólo si a termina en 0. También se puede ver como que el entero a debe ser divisible por 2 y 5, es decir que acabe en 0, 2, 4, 6, u 8 y al mismo tiempo acabe en 0 o 5; la única forma de cumplir ambas condiciones es que a acabe en 0. (Por ejemplo, 10 divide a 5042020 pero no a 312001.)

Criterio del 11. Un entero a es divisible por 11 si y sólo si la diferencia de la suma de las cifras en posición impar de a menos la suma de las cifras en posición par de

a es divisible por 11. (Por ejemplo, 11 divide a 54842029 porque 9+0+4+4=17, 2+2+8+5=17 y 17-17=0, entonces como 11 divide a 0, también divide al número original. Otro ejemplo, 11 divide a 71929 porque 9+9+7=25, 2+1=3 y 25-3=22, entonces como 11 divide a 22, también divide al número original. Pero 11 no divide a 5505 porque 5+5=10, 0+5=5 y 10-5=5, entonces como 11 no divide a 5, tampoco divide al número original.)

Otra técnica para facilitar el trabajo al momento de ver si $x|y$ es restarle a y múltiplos de x. Por ejemplo, para ver si $13|6916$, se pueden hacer las siguientes restas

$$6916 - 13(500) = 416$$

$$416 - 13(30) = 26$$

Así es más fácil ver que $13|6916$, porque $6916 = 13(500) + 13(30) + 13(2) = 13(500 + 30 + 2)$.

6. Probando algunos criterios

Criterio del 2.

Supongamos que tenemos un número x, al cual lo dividimos en dos números:

y = el número que se forma cuando a x se le tapan sus unidades

z = las unidades de x.

Entonces $x = 10y + z$.

Si 2 dividiera a x, entonces $2|10y + z$, como $2|10$ (porque $10 = 2(5)$), entonces por la propiedad dos, $2|10y$. Ahora, usando la propiedad cinco, $2|z$. Así que 2 debe dividir a z para poder dividir a x. Como z son las unidades de x, para saber si un número es divisible entre 2, sólo debemos fijarnos en sus unidades.

Criterio del 4.

Usaremos la misma idea anterior para dividir a x en dos números:

y = número que se forma cuando a x se le tapan los dígitos de las decenas y unidades

z = decenas y unidades de x.

Entonces $x = 100y + z$.

Como $4|100$ (porque $100 = 4(25)$), entonces $4|100y$. Si queremos ver cuando $4|x$, qué es lo mismo que $4|100y + z$, por la propiedad cinco, 4 deberá de dividir a z que es lo mismo que ver si 4 divide a los últimos dos dígitos de x.

Criterio del 3.

Para probar este criterio supongamos que tenemos un número de 6 dígitos $\overline{abcdef}$, tal que su expansión decimal sea

$$100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + f$$

Que también se puede escribir como

$$(99999 + 1)a + (9999 + 1)b + (999 + 1)c + (99 + 1)d + (9 + 1)e + f$$

Si hacemos las multiplicaciones y reacomodamos un poco se tendría que

$$(99999a + 9999b + 999c + 99d + 9e) + (a + b + c + d + e + f)$$

Se puede ver que $3|(99999a + 9999b + 999c + 99d + 9e)$, entonces para saber si 3 divide al número sólo tenemos que ver si $3|(a + b + c + d + e + f)$, que es lo mismo que ver si 3 divide a la suma de los dígitos del número.

El mismo proceso se puede hacer para cualquier número de cualquier cantidad de dígitos.

Criterio del 11.

Igual que con el 3, supongamos que tenemos un número de 6 dígitos $\overline{abcdef}$, tal que su expansión decimal sea

$$100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + f$$

Que también se puede escribir como

$$(100001 - 1)a + (9999 + 1)b + (1001 - 1)c + (99 + 1)d + (11 - 1)e + f$$

Otra vez, haciendo las multiplicaciones y reacomodando

$$(100001a + 9999b + 1001c + 99d + 11e) + (-a + b - c + d - e + f)$$

Se puede ver que $11|(100001a + 9999b + 1001c + 99d + 11e)$, si no estás muy seguro puedes hacer las divisiones. Así que para saber si 11 divide al número, tendrá que dividir a $(-a + b - c + d - e + f)$, donde los dígitos en una posición impar (empezando a contar desde las unidades) se suman y los que están en una posición par se restan.

5. Ejercicios

1. Prueba el criterio del 8.
2. Prueba el criterio del 9.
3. Prueba el criterio del 10.
4. Prueba el criterio del 32.
5. Prueba el criterio del 125.

6. Problemas

1. Usar la propiedad 6 para probar los conocidos resultados siguientes:
    a. La suma de dos números pares es también un número par.
    b. La suma de un par más un impar es impar
2. Flavio le cambia dos dígitos al número 888 buscando un número de tres dígitos lo más grande posible que sea divisible entre 8. Mientras tanto, Toño le cambia dos dígitos al número 888 buscando un número de tres cifras lo más pequeño posible que sea divisible entre 8. ¿Cuánto vale la diferencia entre ambos números?
3. Exactamente una de las siguientes afirmaciones acerca del número de la casa de Ricky es falso.
    a. La suma de las cifras del número es 6.
    b. Dos de las cifras del número son iguales.
    c. El número es menor que 110.
    d. El número es mayor que 40.
    e. El número es primo.

    ¿Cuál es el número de la casa de Ricky?

4. ¿Qué valor puede tomar a para que el número de cuatro dígitos $a74a$ sea divisible entre 4 y 9?
5. ¿Cuántos números de tres dígitos abc (con $a \neq 0$) son tales que $a + 3b + c$ es múltiplo de 3?

6. Encuentra todas las parejas ordenadas (a, b) para que $4a5b32$ sea múltiplo de 6 y 11.
7. Dado que $5913d8$ es divisible por 12, ¿qué valores puede tomar d?
8. Encuentra los valores que puede tomar n si el número de cinco dígitos $3n85n$ es divisible por 6.
9. El número de seis dígitos $21320b$ es divisible por 11. ¿Cuál es el valor de b?
10. Suponga que a, b y c son dígitos distintos y que $708a6b8c9$ es múltiplo de 9 y 11. Encuentra el valor de $a + b + c$.
11. ¿Cuántos números de 5 cifras, múltiplos de 5 y 11, pero no de 2, hay?
12. Los números capicúa son aquellos que se leen igual al derecho que al revés. Por ejemplo: 525 y 434. Prueba que todos los números capicúa con un número par de dígitos son divisibles por 11.
13. ¿Cuántos números menores que 10000 hay tales que son múltiplos de 11 y sólo lleven los dígitos 1 y 9?
14. Sea $N = 80pq2pq$ (número de 7 dígitos). Si N es divisible por 3, 5 y 8 ¿cuál es el valor de N?
15. ¿Existe algún número múltiplo de 11 cuyos dígitos sean 1, 2, 3, 4, 5, 6 sin repetir y en algún orden?
16. Si multiplicas los impares desde el 97 hasta el 997, ¿cuál es el dígito de las unidades del resultado?
17. Encuentre todos los enteros positivos n tales que $n + 8$ sea un múltiplo de n.
18. Los números del 19 al 92 se escriben consecutivamente para formar el entero $N = 19202122 \cdots 909192$. ¿Cuál es el máximo número de veces que se puede dividir N entre 3 quedando como resultado un entero?
19. Sandra tiene los números 19, 31, 53, 75 y 97 y los pone todos juntos para formar un solo número de diez cifras. ¿Es posible que el número que formó Sandra sea un número primo (que sólo lo divida el 1 y sí mismo)?
20. Encuentra el mayor entero positivo n para el que $n^3 + 100$ es divisible entre $n + 10$
21. Encontrar un número a tal que la suma
$$a + 2a + 3a + 4a + 5a + 6a + 7a + 8a + 9a$$
resulte ser un número con todas sus cifras iguales.

7. Vídeos

Divisibilidad

https://youtu.be/ut8JvPIao9U

Criterios

https://youtu.be/oWXy0k0xaa4