Entrenamiento ONMAPS Guanajuato

Primaria (Teoría de Números)

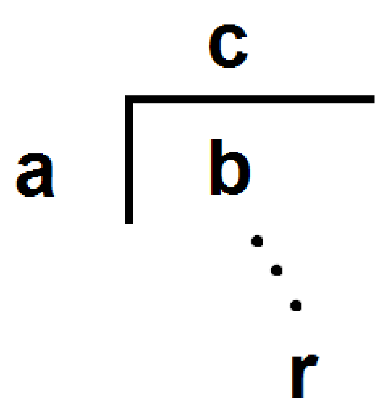
Un concepto que se usa de manera muy frecuentemente en los problemas de Olimpiada de Matemáticas es el de **divisibilidad**. Esto no se tratará de saber hacer divisiones como las que hacen en primaria de manera muy rápida, o con punto decimal, o con números muy grandes. Muchas ocasiones, es más útil sólo saber si cierto número es divisible entre otro que el resultado de la división.

Así, como un primer acercamiento al concepto de divisibilidad, diremos que un número entero "a *divide* un número entero b", si al realizar la división $b \div a$, el resultado es un entero y no sobra nada. Para referirse a esto también se puede decir "b es divisible por a", o "b es múltiplo de a".

Con la idea anterior, podemos decir, por ejemplo, que el número 11 *divide* al número 132, pues al hacer la división, se obtiene 12 y no sobra nada. También podemos decir que el número 132 *es divisible* entre 11 o que 132 *es múltiplo* de 11. Con cualquiera de estas formas nos referimos a lo mismo.

Si tenemos el número 3 y el número 9, como al hacer la división de 9 entre 3, el resultado es 3 y no sobra nada, entonces 9 es divisible entre 3. De manera similar, 56 es divisible entre 14, pues el resultado de hacer la división es 4, y no sobra nada. Observemos también que el número 1 divide a cualquier otro número entero a, pues al hacer la división, el resultado es a y sobra 0.

En el algoritmo de la división que se ve en primaria, se tiene más o menos el siguiente esquema:



Al hacer la división del número b (dividendo) entre el número a (divisor), se obtiene el resultado c (cociente) y un residuo r, que es más chico que el número a. También nos enseñan que una forma de "comprobar" si hicimos bien la división es multiplicar el divisor y el cociente, y al resultado de esa multiplicación sumarle el residuo. Si al hacer esto obtenemos el dividendo, entonces nuestra división está bien. En lenguaje un poco más matemático, estamos diciendo que el número b lo obtenemos de multiplicar el número a por el número c, esto es, $a \cdot c$, y luego sumarle r, lo cual se traduce a que

$$b = a \cdot c + r$$

Por ejemplo, al dividir 193 entre 9, el cociente es 21, y el residuo es 4. Lo que nos dice lo anterior, es que se cumple que $193 = 9 \cdot 21 + 4$, lo cual es cierto, pues $9 \cdot 21 = 189$, y al sumarle 4, obtenemos 193. Al dividir 1416 entre 7, el cociente es 202 y el residuo es 2, por lo que se cumple que $1416 = 7 \cdot 202 + 2$, lo cual podemos verificar como antes, pues $7 \cdot 202 = 1414$, y al sumarle 2, obtenemos 1416.

¿Qué pasa cuando el residuo r es igual a 0? Esto es, ¿qué pasa cuando a divide a b? En este caso, tenemos que

$$b = a \cdot c + 0 = a \cdot c$$

¿Qué significa esto? Que cuando el número b es divisible entre a, podemos obtener b multiplicando a por algún otro número, que en este caso llamamos c. Por ejemplo, al dividir 7624 entre 8, el resultado es 953 y sobra 0. Esto quiere decir que 8 divide a 7624, y más aún, también nos dice que 7624 lo podemos obtener de multiplicar 8 por 953, esto es $7624 = 8 \cdot 953$.

Con las ideas anteriores, escribimos ahora el concepto de Divisibilidad que manejaremos de aquí en adelante:

Un número entero $\boldsymbol{a}$ divide a un número entero $\boldsymbol{b}$ si $\boldsymbol{b}$ se puede obtener de multiplicar $\boldsymbol{a}$ por otro número entero, digamos $\boldsymbol{c}$, o lo que es equivalente, si $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$.

En el sentido del concepto anterior y regresando a algunos ejemplos que ya vimos, el número 11 divide al número 132, pues $132 = 11 \cdot 12$. Observemos que entonces el número 12 también divide al 132, pues lo anterior nos dice que 132 podemos obtenerlo de multiplicar 12 por 11. De manera general, si a divide a b, entonces podemos encontrar un número c tal que $b = a \cdot c$, pero si invertimos los papeles de a y c, entonces c también divide a b, pues b es el resultado de multiplicar c por a.

Observación: Si en la definición anterior ponemos a como cualquier número entero, b lo tomamos igual a 0, y c también lo tomamos igual a 0, entonces tenemos que $0 = a \cdot 0$, lo cual es cierto, pues al multiplicar cualquier número por 0, obtenemos 0. Esto nos dice que 0 es divisible entre a (o que 0 es múltiplo de a) para cualquier valor entero que le podamos dar a a.

Ejercicios:

Con la definición anterior de Divisibilidad, diga si

- 123456789 es divisible entre 3
- 124578 es divisible entre 9
- 666666666 es divisible entre 11
- 1238712476128471287361928 7236 es divisible entre 8

Las preguntas anteriores son relativamente fáciles de resolver, haciendo las operaciones con cuidado y viendo si el residuo de la división es 0. Sin embargo, existen algunas formas de saber si un número es divisible entre otro de manera rápida y sin hacer tantas cuentas. Aquí veremos algunas de estas formas, que se llaman **Criterios de Divisibilidad**.

- **Criterio de Divisibilidad por 2**

Para saber si un número es divisible entre 2, nos fijamos en el dígito de las unidades de dicho número. Si este dígito es 0, 2, 4, 6 u 8, entonces el número es divisible entre 2, y si el último dígito es 1, 3, 5, 7 ó 9, entonces el número no es divisible entre 2.

Por ejemplo, 12903712938 sí es divisible entre 2, pues su último dígito es 2. Sin embargo, 838932741 no lo es, pues su último dígito es 1.

- **Criterio de Divisibilidad por 3**

Para determinar si un número es divisible entre 3, sumamos los dígitos del número. Si esta suma es divisible entre 3, entonces el número también lo es. Y si la suma no es divisible entre 3, entonces el número tampoco.

Por ejemplo, 123456789 es múltiplo de 3, pues $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$, y 45 es divisible entre 3, ya que $45=3\cdot 15$. En cambio, el número 9182372 no es divisible entre 3, pues $9+1+8+2+3+7+2=32$, y 32 no es divisible entre 3.

Observemos que si un número es divisible entre 3, y cambiamos el orden de sus dígitos, el número resultante también es divisible entre 3, pues la suma de los dígitos no se altera. Por ejemplo, ya sabemos que 123456789 es divisible entre 3. Entonces, 123456798, 987654321 y 637458912, que son números que se obtienen de cambiar el orden de los dígitos de 123456789, también son divisibles entre 3.

- **Criterio de Divisibilidad por 4**

Para saber si un número es divisible entre 4, nos fijamos en el número que se forma con los últimos dos dígitos (los correspondientes a las decenas y unidades) del número original. Si este número de 2 dígitos es divisible entre 4, entonces el número original también lo es. Y si no, entonces no.

Por ejemplo, 1823611237812 es divisible entre 4, pues el número que se forma con los últimos dos dígitos es 12, y 12 es divisible entre 4 (ya que $12 = 4 \cdot 3$). Sin embargo, 12309822 no es múltiplo de 4, ya que el número que se forma con los últimos dígitos es 22, y 22 no es divisible entre 4.

- **Criterio de Divisibilidad por 5**

Este criterio es muy sencillo y parecido al del 2. Para verificar si un número es divisible entre 5, nos fijamos en su último dígito (el de las unidades). Si este dígito es 0 ó 5, entonces el número es divisible entre 5, y si no es ninguno de estos dos, entonces no es divisible entre 5.

Ejemplos: 98791230 y 7716237125 son divisibles entre 5. 12312 y 12398188 no lo son.

En sentido estricto, deberíamos poner aquí un "Criterio de Divisibilidad por 6". Sin embargo, no lo haremos tal cual, sino que haremos la siguiente observación. Notemos que $6 = 2 \cdot 3$. Así, se va a cumplir que, para que un número sea divisible entre 6, debe ser divisible entre 2 y también entre 3. De esta manera, haciendo uso de los criterios del 2 y del 3, podemos decir que un número será divisible entre 6 si su último dígito es 0, 2, 4, 6 u 8, y la suma de sus dígitos es divisible entre 3, que es "juntar" los dos criterios anteriores.

También podemos pensar en algo parecido por ejemplo con un "Criterio de Divisibilidad del 10", el cual es perfectamente conocido por todos. Un número es divisible entre 10 si termina en 0. Observemos que $10 = 2 \cdot 5$, por lo que podemos "juntar" los criterios del 2 y del 5 para obtener el del 10. Esto nos dice que un número es divisible entre 10 si es divisible entre 2 y entre 5. Entonces, su último dígito debe ser 0, 2, 4, 6 u 8 (esto es lo que nos dice el criterio del 2) y también debe ser 0 ó 5 (que es lo que nos dice el criterio del 5). La única opción que tenemos es que el último dígito sea 0, que es precisamente el criterio que mencionábamos al inicio.

- **Criterio de Divisibilidad por 8**

Para saber si un número es divisible entre 8, nos fijamos en el número que se forma con los últimos 3 dígitos del número. Si este número de 3 dígitos es divisible entre 8, entonces el número original también lo es, y si no, entonces no.

Por ejemplo, el número que se forma con los últimos 3 dígitos del número 12093712 es 712, y 712 es múltiplo de 8, pues $712 = 8 \cdot 89$. Entonces, 12093712 es divisible entre 8. Por otro lado, los últimos 3 dígitos del número 123097124 son 124, y 124 no es divisible entre 8, por lo que 123097124 tampoco lo es.

- **Criterio de Divisibilidad por 9**

Éste es similar al criterio del 3, sólo que en lugar de ver si la suma de los dígitos del número es divisible entre 3, necesitamos checar si es divisible entre 9. Si tal suma es divisible entre 9, entonces el número original también, y si no, no.

Por ejemplo, 882727227 es divisible entre 9, pues $8+8+2+7+2+7+2+2+7=45$, y 45 es divisible entre 9. Sin embargo, 882727228 no es divisible entre 9, pues la suma de sus dígitos es 46, y 46 no es divisible entre 9.

- **Criterio de Divisibilidad por 11**

Para ver si un número es divisible entre 11, el procedimiento es un poquito más complicado. Nos fijamos en los dígitos que están en posiciones pares, y los sumamos. Ahora nos fijamos en los dígitos en posiciones impares, y los sumamos también. Si la diferencia de estas sumas es divisible entre 11 (o sea, si es 0, 11, 22, …), entonces el número original es divisible entre 11, y si no, no.

Por ejemplo, veamos cómo hacerle con el número 12342. Los dígitos que están en posiciones pares son el 2 y el 4, pues son el segundo y el cuarto dígito del número, respectivamente. Al sumarlos, obtenemos 6. Los dígitos que están en posiciones impares son el 1, 3 y 2, pues son el primer, tercer y quinto dígito, respectivamente. Al sumarlos obtenemos 6. La diferencia entre estas dos sumas es 0, pues $6-6=0$, y así, el número 12342 es divisible entre 11.

El número 95843 también es divisible entre 11, pues la suma de los dígitos en posiciones pares es $5+4=9$, la suma de los dígitos en posiciones impares es $9+8+3=20$, y la diferencia entre 20 y 9 es 11, el cual es divisible entre 11.

Una forma de ver y/o recordar el criterio del 11 de manera más sencilla, es tomar 2 colores y colorear los dígitos del número de manera alternada: uno con un color, el que sigue con el otro, y así. Por ejemplo, con el número 94816183, podemos tomar los colores negro y azul, y colorearlo así: 94816183. Ahora, calculamos la suma de los números azules y la de los negros por separado:

Suma de los azules: $4+1+1+3=9$

Suma de los negros: $9+8+6+8=31$

La diferencia entre estas dos sumas es 22, la cual es divisible entre 11, pues $22=11\cdot 2$. Por lo tanto, el número 94816183 es divisible entre 11.

PROBLEMAS:

1.- ¿Qué dígitos puede ser a para que el número $1234578a$ sea divisible entre 3? ¿Y para que sea divisible entre 2? ¿Y entre 4? ¿5? ¿8? ¿9? ¿11?

2.- En la cuenta de banco de Joaquín le dijeron que tenía 732128_ _ pesos. Las últimas dos cifras se borraron, pero recuerda que el total era divisible entre 90. ¿Cuánto dinero tiene en su cuenta?

3.- La bruja Makare lleva más de 1000 años enterrada, pero menos de 10000. Un historiador quiere escribir la cantidad de años, pero sólo escribe 5_ _ _. Si recuerda que el número es divisible entre 2, 5, 9 y 11. ¿Cuánto lleva enterrada la bruja?

4.- ¿Cuántos números de 5 cifras, múltiplos de 5 y de 11, pero no de 2, hay?

5.- ¿Cuántos números hay menores que 10000 tales que son múltiplos de 11 y sólo llevan los dígitos 1 y 9? ¿Y que sólo lleven los dígitos 2 y 9?

6.- ¿Cuántas veces debe escribir Carlos el número 123456 para que el número resultante sea múltiplo de 3? ¿Y múltiplo de 9? ¿Y múltiplo de 11? (Cuando Carlos escribe el número 123456 3 veces, el número que se forma es 123456123456123456)

7.- El número A3640548981270644B es divisible por 99. Calcula A y B.

8.- El producto de 3 números, todos más grandes que 1 y distintos entre sí es 100. ¿Cuál es la suma de estos 3 números?

9.- Verifique que el número 12346587 es divisible entre 3, 9 y 11. ¿De cuántas formas se pueden reacomodar los dígitos de dicho número de tal forma que el primero sea el 8, el tercero sea el 7, y el número resultante sea divisible también entre 3, 9 y 11?

10.- ¿Cuántos números de 4 cifras son múltiplos de 4 y terminan en 4? ¿Cuántos de 8 cifras son múltiplos de 4 y terminan en 4?

11.- Roberto le dice a Thalía que el número de su casa es de 3 cifras y múltiplo de 9, comienza en 5 y el dígito de las unidades es el número de rosales que hay en su jardín. Thalía dice “aún no puedo saber el número de tu casa” y Roberto dice “no es múltiplo de 11”. ¿Cuál es el número de la casa de Roberto?

12.- Louis tiene cierta cantidad de dinero y está conformada por los dígitos 2, 4, 1, 5, 3 y 3, en algún orden. La cantidad es múltiplo de 8, 9 y 11. ¿Cuál es la menor cantidad de dinero que puede tener Louis?

13.- ¿Existe algún número de 6 dígitos divisible por 11 que tenga como dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 en algún orden?