Olimpiada Básica de Matemáticas en Guanajuato

@OBMGuanajuato | 11 de septiembre del 2022

Cuadriláteros cíclicos

Alfredo Hernández Estrada

1. Conceptos básicos

En los problemas de olimpiada es común encontrarse con figuras como los cuadriláteros cíclicos, los cuales son muy útiles para encontrar igualdades de ángulos, y en instancias mas avanzadas sirven para aprovechas la potencia de un punto. En este documento nos centraremos a hablar tanto de los conceptos básicos así como de las primeras instancias de los cuadriláteros cíclicos en los problemas de la olimpiada de matemáticas. Antes de comenzar necesitamos definir que es precisamente un cuadrilátero cíclico así como algunos teoremas y lemas que nos facilitaran trabajar con los mismos.

Definición 1 *Un cuadrilátero que esta inscrito en una circunferencia, es decir, sus cuatro vértices están sobre una circunferencia, se dice que es un* ***cuadrilátero cíclico****.*

Si bien la definición es bastante explicita y gráficamente no queda ninguna duda, en la practica es difícil de usar sobre todo cuando estamos en un problema que no tiene ninguna circunferencia en su descripción. Para hacer mas fácil su uso en la practica tenemos el siguiente Teorema, que nos permite encontrar cuadriláteros cíclicos aun sin trazar un circulo.

Teorema 1 *Una condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea un cuadrilátero cíclico es que la suma de ángulos opuestos sea igual a* $180°$.

Demostración:
Probaremos primero que si el cuadrilátero es un cuadrilátero cíclico es necesario que sus ángulos opuestos sumen $180°$. Notemos que basta probar que esto se cumple para un par de ángulos opuestos puesto que los ángulos internos de un cuadrilátero suman $360°$, al probarlo para un par de ángulos opuestos el otro par de ángulos debe sumar $360° - 180° = 180°$. Ahora consideremos el cuadrilátero de la Figura 1, en este sabemos que el ángulo $\angle BCD$ es igual a la mitad del arco BD que contiene a A y el ángulo $\angle BAD$ es igual a la mitad del arco DB, y dado que los arcos BD y DB suman $360°$, obtenemos que $\angle BCD + \angle BAD = 180°$.

Resta probar que si en un cuadrilátero sus ángulos opuestos suman $180°$ entonces este puede ser inscrito en una circunferencia. Supongamos ahora que el cuadrilátero $ABCD$ es tal que $\angle BCD + \angle BAD = 180°$. Sea C el punto donde la recta BC intercepta al circuncírculo del ABC, como $ABC'D$ es un cuadrilátero cíclico entonces se cumple que $\angle BC'D + \angle BAD = 180°$, pero esto implica que $\angle BC'D = \angle BCD$, lo que nos diría que CD y $C'D$ son paralelas entre si, lo cual es imposible pues ambas rectas pasan por el punto D. Así, se debe cumplir que tanto CD como $C'D$ están sobre una misma recta, y por lo tanto $C = C'$, y el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico.

■

Además del resultado anterior, también tenemos el siguiente lema que nos permite identificar cuadriláteros cíclicos.

Lema 1 *Un cuadrilátero $ABCD$, es un cuadrilátero cíclico si y solo si se cumple que $\angle BCA = \angle BDA$.*

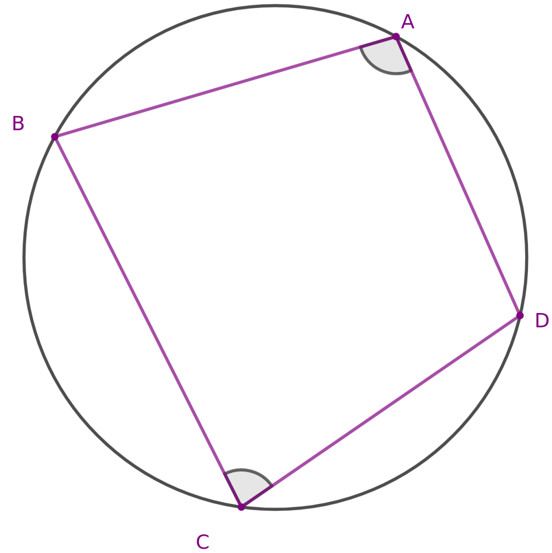


Figura 1: En la figura $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico

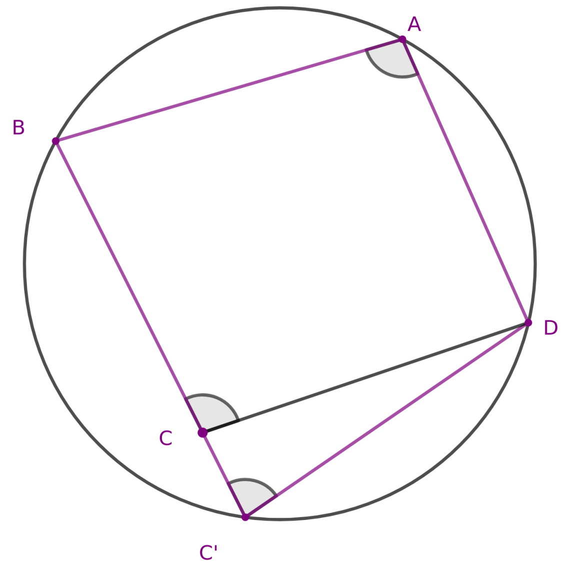


Figura 2: En la figura C' es el punto sobre DC tal que $ABC'D$ es un cuadrilátero cíclico

Demostración:

Dado que el lema es un ”Si y solo si”, necesitamos demostrar dos partes, primero que si $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico entonces se cumple la igualdad de ángulos y luego necesitamos demostrar que si se cumple la igualdad de ángulos entonces el cuadrilátero es cíclico. La primera parte es directa pues si el cuadrilátero es cíclico entonces tanto $\angle BCA$ como $\angle BDA$ subtienden el mismo arco (el arco BA) y por lo tanto los ángulos deben ser iguales.

La segunda p arte no es tan directa, lo primero que hay que notar es que $\angle BPC = \angle APD$, donde P es el punto de intersección de AC y BD, esto por ángulos opuestos por el vértice. Luego podemos notar que

$$\triangle APD \sim \triangle BPC,$$

esto ya que estos triángulos comparten dos ángulos,

$$\angle BPC = \angle APD$$
$$\angle BCP = \angle PDA,$$

este ultimo por la hipótesis del problema. Gracias a esta semejanza tenemos la siguiente igualdad

$$\frac{DP}{PA} = \frac{CP}{PD},$$

y como sabemos que $\angle APD = \angle DPC$ por ángulos opuestos por el vértice, por criterio lado lado ángulo tenemos que

$$\triangle APD \sim \triangle DPC.$$

Así completando los respectivos ángulos iguales que obtenemos de las semejanzas, incluyendo los ángulos dados por las hipótesis, tenemos la siguiente figura

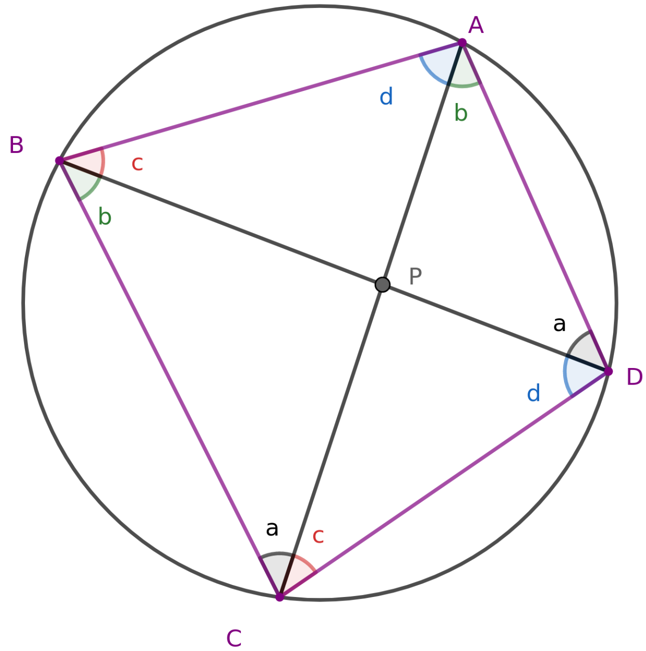


Figura 3: Figura con los respectivos ángulos iguales.

con la figura basta notar que la suma de los ángulos del cuadrilátero es igual a

$$2(a + b + c + d) = 360°,$$

y por lo tanto

$$a + b + c + d = 180°,$$

que es precisamente la suma de los ángulos opuestos del cuadrilátero, con lo que por el *Teorema 1*, concluimos. ■

Una forma común de recordar este ultimo lema y aplicarlo en los problemas es tratar de buscar la figura que se forma de los dos triángulos que comparten vértice en P que asemeja la figura de *un moño*.

Tanto el *Lema 1* como el *Teorema 1* nos van a ser sumamente útiles para encontrar cuadriláteros cíclicos, y como vimos tanto el lema como el teorema funcionan en ambos sentidos, esto es, una ves que encontremos un cuadrilátero cíclico tendremos la igualdad de los ángulos en la Figura 3 y sabremos también que la suma de ángulos opuestos es $180°$.

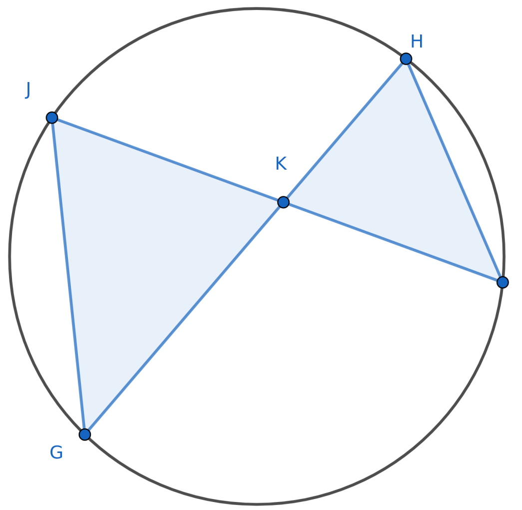


Figura 4: En la figura se muestran los respectivos triángulos en los que se busca la igualdad de ángulos.

2. Problemas

En esta sección primero veremos algunos ejemplos de como nos puede servir el uso de los cuadriláteros cíclicos, aunque solo veremos la solución del primer problema, se recomienda siempre intentar los problemas antes de ver la solución.

1. Las circunferencias C_1 y C_2 se intersectan en los punto s A y B. Por el punto A se traza una recta que corta a las circunferencias C_1 y C_2 en los puntos C y D respectivamente. Por los puntos C y D se trazan tangentes a las circunferencias, las cuales se intersectan en el punto M . Demuestre que el cuadrilátero $MCBD$ es cíclico.

   Demostración:

   Primero hay que ver si nuestra figura es correcta, la siguiente figura corresponde al enunciad del problema Para probar que el $MCBD$ usaremos el *Teorema 1*, probaremos entonces que $\angle CMD + \angle DBC = 180°$. Para probar esto tracemos la cuerda común de C_1 y C_2, AB, y las respectivas cuerdas CB y BD, como en la figura. Podemos notar entonces que

$$\angle ABC = \angle MCD$$
$$\angle ABD = \angle CDM,$$

   esto por ángulos semi-inscritos. Con esto en el $\triangle MCD$ sabemos que

$$\angle CMD = 180° - \angle MCD - \angle CDM,$$

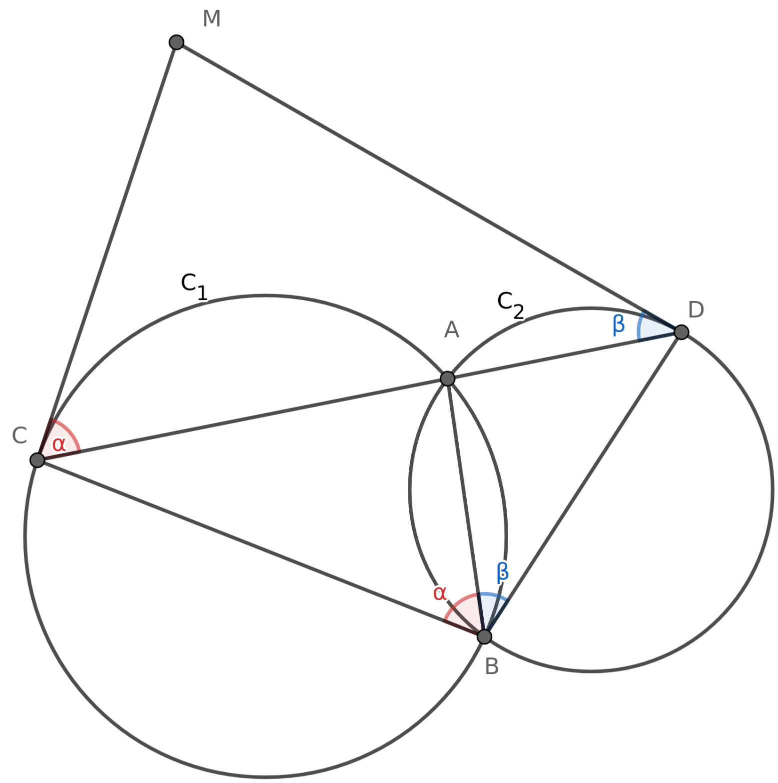
   pero por la igualdad anterior esto

$$180° - \angle MCD - \angle CDM = 180° - \angle ABC - \angle ABD,$$

   y así obtenemos que

$$\angle CMD + \angle ABC + \angle ABD = 180°,$$

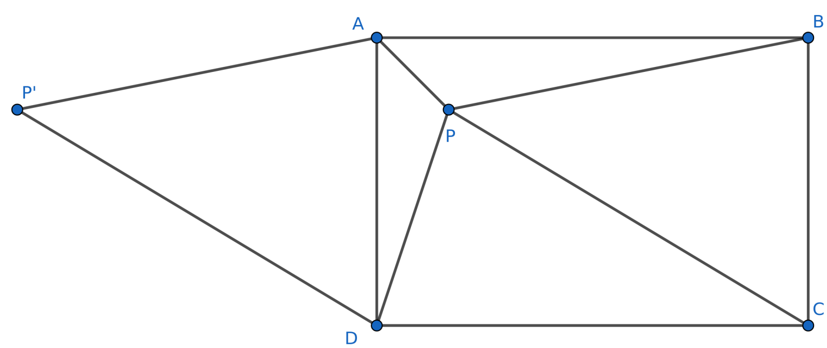
   pero esta suma nos dice precisamente que $\angle CMD + \angle DBC = 180°$, con lo que concluimos. ■



2. Se toma un punti P en el interior de un rectángulo $ABCD$ de tal manera que $\angle APD + \angle BPC = 180°$. Encuentra la suma de los ángulos $\angle DAP$ y BPC.

   Hint.

   La idea para la solución de este problema es trazar un punto P' tal que el $\triangle ABP'$ sea congruente al $\triangle CPD$, y entonces probar que el cuadrilátero $AP'BP$ es cíclico.



3. Sea ABC un triangulo y D y E los pies de las alturas desde B y C respectivamente, demuestre que $BCDE$ es un cuadrilátero cíclico.

4. Demuestre que si un cuadrilátero cíclico tiene sus diagonales perpendiculares, entonces la perpendicular trazada hacia un lado desde el punto de intersección de las diagonales biseca al lado opuesto.

5. En un triángulo ABC tomamos los puntos P en AB y Q en AC de tal forma que PQ es paralela al lado BC. La circunferencia que pasa por P y es tangente a AC en Q, corta de nuevo a AB en R. Demuestra que el cuadrilátero $RQCB$ es cíclico.