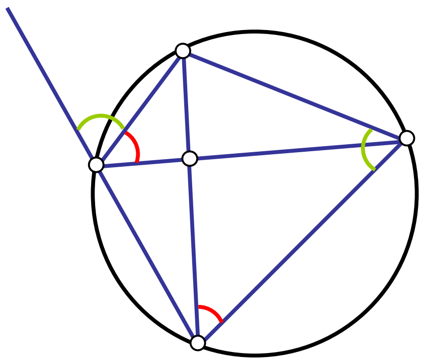
Cuadriláteros Cíclicos

Resolver problemas de Geometría Plana en las competencias, frecuentemente se reduce a demostrar la igualdad de algunos ángulos. Una buena idea en tales situaciones es buscar cuadriláteros cíclicos, porque los cuadriláteros cíclicos tienen dos propiedades:

- el ángulo formado por un lado y una diagonal es igual al ángulo formado por el lado opuesto y la otra diagonal, y

- un ángulo es igual al suplemento de su ángulo opuesto.

En ambos casos las igualdades permanecen porque los ángulos están inscritos en arcos iguales.



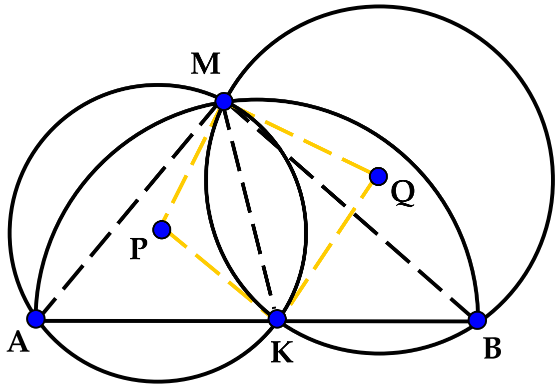
El objetivo de esta sección es llevar a la práctica la resolución de problemas donde se involucran cuadriláteros cíclicos. Los problemas que hemos escogido pueden ser resueltos usando estas dos propiedades.

Aquí hay algunos ejemplos:

Ejemplo 1.
Sea AB el diámetro de una semicircunferencia. Un punto M es marcado sobre la semicircunferencia, y un punto K es marcado sobre AB. Una circunferencia con centro P pasa por A, M y K, y otra circunferencia con centro Q pasa por M, K y B. Demostrar que M, K, P y Q son concíclicos.

Demostración.
Del circuncírculo de AMK, tenemos que $\angle MPK = 2\angle MAK$; y del circuncírculo de MBK, tenemos que $\angle MQK = 2\angle MBK$. Luego, como AB es diámetro, el ángulo AMB es recto, por lo que:

$$90° = \angle MAK + \angle MBK = \frac{1}{2}\angle MPK + \frac{1}{2}\angle MQK = \frac{1}{2}(\angle MPK + \angle MQK).$$

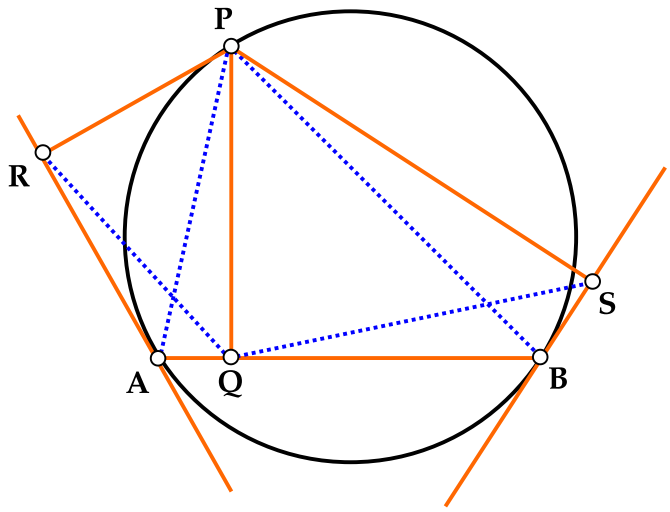


Es decir: $\angle MPK + \angle MQK = 180°$, de donde el cuadrilátero $MPKQ$ es cíclico, es decir, M, K, P y Q son concíclicos.

Ejemplo 2.

Sea AB una cuerda de una circunferencia y P un punto sobre ella. Sea Q la proyección de P sobre AB y R y S las proyecciones de P sobre las tangentes a la circunferencia en A y B, respectivamente. Probar que PQ es la media geométrica de PR y PS (esto es: $PQ^2 = PR \cdot PS$).

Demostración.



Probaremos que los triángulos PQR y PQS son semejantes. Esto implicará que $\frac{PQ}{PR} = \frac{PS}{PQ}$, por lo cual $PQ^2 = PR \cdot PS$.

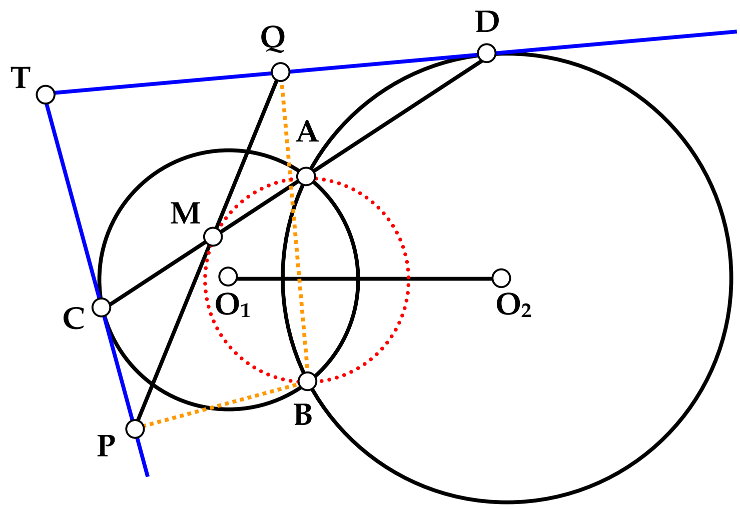
Notemos que los cuadriláteros $PQAR$ y $PQBS$ son cíclicos, pues sus ángulos opuestos suman 180°. Del cuadrilátero $PQAR$ obtenemos que $\angle PRQ = \angle PAQ$, y del cuadrilátero $PQBS$ obtenemos $\angle PQS = \angle PBS$. Pero los ángulos inscritos $\angle PAQ$ y $\angle PBS$ son iguales. Esto implica que $\angle PRQ = \angle PQS$. Un argumento similar muestra que $\angle PQR = \angle PSQ$. Esto implica que los triángulos PQR y PQS son semejantes, y con esto podemos concluir.

Ejemplo 3.

Sean A y B los puntos en común de dos circunferencias secantes. Una recta pasa por A e intersecta a las circunferencias en C y D. Sean P y Q las proyecciones de B sobre las tangentes a las dos circunferencias en C y D, respectivamente. Probar que PQ es tangente al círculo de diámetro AB.

Demostración.

Después de dibujar la figura, nos damos cuenta que posiblemente el punto de tangencia esté sobre CD. Denotemos por M a la intersección de la circunferencia de diámetro AB con la recta CD y probemos que PQ es tangente al círculo en M.



Haremos la prueba para la configuración que se muestra en la figura, los otros casos son completamente análogos. Sea T la intersección de las tangentes en C y D. Los ángulos ABD y ADT son iguales, por abrir el mismo arco AD. Similarmente, los ángulos ABC y ACT son iguales, pues abren el mismo arco AC. Esto implica que

$$\angle CBD = \angle ABD + \angle ABC = \angle ADT + \angle ACT = 180^\circ - \angle CTD.$$

De la última igualdad nos damos cuenta que el cuadrilátero $TCBD$ es cíclico. Además, el cuadrilátero $TPBQ$ también es cíclico pues tiene dos ángulos opuestos de 90°. Con todo esto tenemos que $\angle PBQ = 180^\circ - \angle CTD = \angle CBD$. Restándole el ángulo $\angle CBQ$ a ambos obtenemos que $\angle CBP = \angle QBD$.

Los cuadriláteros *BMCP* y *BMQD* son cíclicos, ya que $\angle CMB = \angle CPB = \angle BQD = \angle DMB = 90°$. Entonces, se cumple que:

$$\angle CMP = \angle CBP = \angle QBD = \angle QMD,$$

lo cual muestra que *P*, *M* y *Q* son colineales.

Luego, como *PBMC* es cíclico, tenemos que $\angle BMP = \angle BCP$, y como los ángulos $\angle BAC$ y $\angle BCP$ son iguales por abrir el mismo arco *BC*, tenemos que:

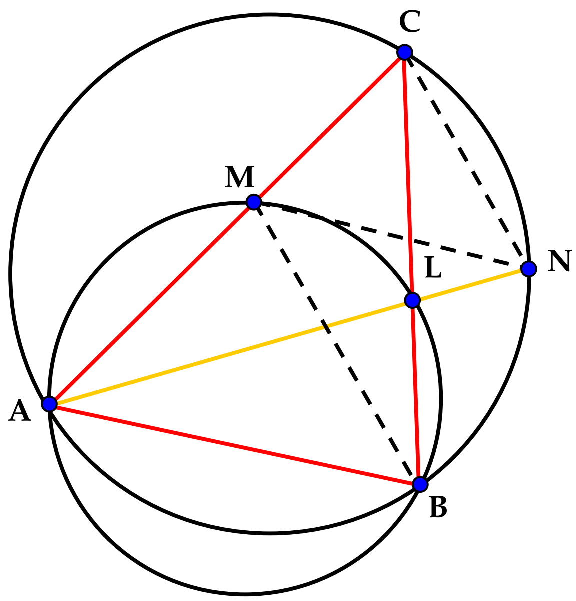
$$\angle BMP = \angle BAC = \angle BAM.$$

Esto último implica que *PQ* es tangente al círculo de diámetro *AB*.

Ejemplo 4.

Sea *ABC* un triángulo y sean *L* y *N* las intersecciones de la bisectriz del ángulo *A* con el lado *BC* y el circuncírculo de *ABC* respectivamente. Construimos la intersección *M* del circuncírculo de *ABL* con el segmento *AC*. Prueba que los triángulos *BMN* y *BMC* tienen la misma área.

Demostración.



Si nos fijamos, para que los triángulos *BMN* y *BMC* tengan la misma área, sus alturas deberán ser iguales, pues comparten la base *MB*, es decir, *CN* y *BM* deben ser paralelas.
Ahora, como el cuadrilátero *ABLM* es cíclico, tenemos que $\angle MBL = \angle MAL$ por abrir el mismo arco *ML*. También, como *ABNC* es cíclico, tenemos que los ángulos

BCN y *BAN* son iguales por abrir el mismo arco *BN*. Pero $\angle BAN = \angle MAL$, pues *AL* es bisectriz. De esto sigue que $\angle MBL = \angle BCN$, lo cual implica que *BM* es paralela a *CN*, y entonces los triángulos *BMC* y *BMN* tienen la misma área.

A continuación se muestra una lista de problemas que pueden ser resueltos usando las propiedades de cuadriláteros cíclicos.

Problemas

1. Por el punto *A* de la cuerda común *AB* de dos circunferencias, se traza una recta que corta a una de ellas en el punto *C* y a la otra en el punto *D*. Las tangentes a dichas circunferencias en los puntos *C* y *D*, se intersectan en el punto *M*. Muestra que los puntos *B, C, D* y *M* están sobre una circunferencia.

2. La bisectriz del ángulo *A* de un triángulo *ABC* intersecta a la circunferencia circunscrita en el punto *N* y al lado *BC* en el punto *L*. Se toma *N* como centro y *NB* como radio y se traza una circunferencia, la cual intersecta a los lados *AB* y *AC* en los puntos *P* y *Q* respectivamente. Demuestra que *P, L* y *Q* son colineales.

3. Sobre la tangente por *B* a una circunferencia de diámetro *AB*, se toman dos puntos *C* y *D*. Si *AC* corta a la circunferencia en *F* y *AD* corta a la circunferencia en *E*, demuestra que el cuadrilátero *CDEF* es cíclico.

4. Sean *A, B, C* y *D* circunferencias tales que *A* es tangente exteriormente a *B* en *P*, *B* es tangente exteriormente a *C* en *Q*, *C* es tangente exteriormente a *D* en *R* y *D* es tangente exteriormente a *A* en *S*. Supón que *A* y *C* no se intersectan, ni tampoco *B* y *D.*

   (i) Prueba que los puntos P. Q, R y S están todos sobre una circunferencia.

   (ii) Supón además que *A* y *C* tienen radio 2, *B* y *D* tienen radio 3 y la distancia entre los centros de *A* y *C* es 6. Determina el área del cuadrilátero *PQRS.*

5. Considere un cuadrilátero convexo *ABCD* en el que las diagonales *AC* y *BD* se cortan formando ángulo recto. Sean *M, N, R* y *S* los puntos medios de los segmentos *AB, BC, CD* y *AD*, respectivamente. Sean *W, X, Y* y *Z* las proyecciones de los puntos *M, N, R* y *S* sobre las rectas *DC*, *AD*, *AB*, y *BC* respectivamente. Pruebe que todos los puntos *M, N, R, S, W, X, Y*, y *Z* están sobre una misma circunferencia.

6. Sea *ABC* un triángulo rectángulo con ángulo recto en *A* y altura *AD*. Se construyen los cuadrados BCX_1X_2, CAY_1Y_2 y ABZ_1Z_2 hacia el exterior de

triángulo. Sea AX_1 intersección BY_2 el punto U y AX_2 intersección CZ_1 el punto V. Pruebe que los cuadriláteros $ABDU$, $ACDV$ y BX_1UV son cíclicos.

7. Por un punto O de una circunferencia, se tienen tres cuerdas que sirven como diámetros de tres circunferencias. Además del punto O, las circunferencias se intersectan por parejas en otros tres puntos. Demuestre que tales puntos son colineales.

8. Sea $ABCD$ un cuadrilátero tal que sus vértices A, B, C y D se encuentran sobre una circunferencia. Sea P el punto de intersección de las diagonales AC y BD del cuadrilátero y sea E el punto de intersección de las rectas que son prolongación de los lados AB y CD del cuadrilátero. Demuestra que la bisectriz de $\angle APD$ es paralela a la bisectriz de $\angle AED$.

9. Se traza una línea recta que pasa por un punto K en el interior del cuadrado $ABCD$, la cual intersecta a los lados opuestos AB y CD en los puntos P y Q respectivamente. Se dibujan dos círculos que pasan por los triángulos KBP y KDQ respectivamente. Pruebe que el segundo punto de intersección de las dos circunferencias cae sobre la diagonal BD.

10. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, las líneas BD y AC se cortan en el punto P. Si O es el circuncentro del triángulo APB y H es el ortocentro del triángulo CPD, demuestre que O, P y H están alineados.

11. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico de diagonales perpendiculares que se cortan en P. Sea l la línea que pasa por P y es perpendicular al lado AB. Demuestre que l pasa por el punto medio del lado CD.

12. Dos círculos C y D, con respectivos centros M y N, se intersectan en dos puntos distintos. Sea P uno de esos puntos. La recta MP corta por segunda vez al círculo D en R y la recta NP corta por segunda vez al círculo C en S. Prueba que M, S, R y N son concíclicos.

13. Sea AB el diámetro de un círculo con centro O. Sea C un punto de la circunferencia tal que OC y AB son perpendiculares. Se toma un punto P sobre el arco BC. Sea Q la intersección de las rectas CP y AB, y sea R la intersección de la recta AP con la perpendicular a AB por Q. Demuestra que $BQ = RQ$.

14. Sea $ABCD$ un cuadrilátero que tiene una circunferencia inscrita. Sean K, L, M y N los puntos de tangencia de la circunferencia con los lados AB, BC, CD y DA respectivamente. Sea P el punto de intersección de KM y LN. Demuestra que si BP es paralela a KN, entonces DP es paralela a LM.

15. En el triángulo ABC, sean AK, BL, CM las tres alturas y sea H el ortocentro. Sea P el punto medio de AH. Si BH y MK se intersectan en S, y LP y AB se intersectan en T, demuestra que (las prolongaciones de) ST y BC son perpendiculares.

16. Sean $ABCD$ un paralelogramo y K la circunferencia circunscrita al triángulo ABD. Sean E y F las intersecciones de K con los lados (o sus prolongaciones) BC y CD respectivamente (E distinto de B y F distinto de D). Demuestra que el circuncentro del triángulo CEF está sobre K.

17. Sea $ABCD$ un cuadrilátero con AD paralelo a BC, los ángulos en A y B rectos y tal que el ángulo CMD es recto, donde M es el punto medio de AB. Sean K el pie de la perpendicular a CD que pasa por M, P el punto de intersección de AK con BD y Q el punto de intersección de BK con AC. Demuestra que el ángulo AKB es recto y que

$$\frac{KP}{PA}+\frac{KQ}{QB}=1.$$

18. Sean A, B y C tres puntos colineales con B entre A y C. Sea Y una circunferencia tangente a AC en B, y sean X y Z las circunferencias de diámetros AB y BC, respectivamente. Sea P el otro punto (además de B) en el que se cortan las circunferencias X y Y; sea Q el otro punto (además de B) en el que se cortan las circunferencias Y y Z. Supón que la recta PQ corta a X en un punto R distinto de P, y que esa misma recta PQ corta a Z en un punto S distinto de Q. Demuestra que concurren AR, CS y la tangente común a X y Z por B.

19. Sea $ABCD$ un cuadrado (con los vértices en el sentido horario) y P un punto en el lado BC distinto de B y de C. Considera el cuadrado $APRS$ (con los vértices en el sentido horario). Prueba que la recta CR es tangente a la circunferencia circunscrita del triángulo ABC.

20. Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dos circunferencias tales que el centro O de $\boldsymbol{B}$ esté sobre $\boldsymbol{A}$. Sean C y D los dos puntos de intersección de las circunferencias. Se toman un punto A sobre $\boldsymbol{A}$ y un punto B sobre $\boldsymbol{B}$ tales que AC es tangente a $\boldsymbol{B}$ en C y BC es tangente a $\boldsymbol{A}$ en el mismo punto C. El segmento AB corta de nuevo a $\boldsymbol{B}$ en E y ese mismo segmento corta de nuevo a $\boldsymbol{A}$ en F. La recta CE vuelve a cortar a $\boldsymbol{A}$ en G y la recta CF corta a la recta GD en H. Prueba que el punto de intersección de GO y EH es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo DEF.

21. Sea ABC un triángulo y sean L y N las intersecciones de la bisectriz del ángulo A con el lado BC y el circuncírculo de ABC respectivamente. Sean K y M las proyecciones desde L a los lados AB y AC, respectivamente. Demuestra que el cuadrilátero $AKNM$ y el triángulo ABC tienen la misma área.

22. Sea $\angle AOB$ un ángulo recto, M y N son puntos sobre las rectas OA y OB, respectivamente, y sea $MNPQ$ un cuadrado tal que MN separa los puntos O y P. Encuentra el lugar geométrico del centro del cuadrado cuando M y N varían.

23. Un punto interior P se escoge en el rectángulo $ABCD$ tal que $\angle APD + \angle BPC = 180°$. Encuentra la suma de los ángulos $\angle DAP$ y $\angle BCP$.

24. Sea $ABCD$ un rectángulo y sea P un punto en su circuncírculo, diferente de los vértices. Sean X, Y, Z y W las proyecciones de P sobre las rectas AB, BC, CD y DA, respectivamente. Probar que uno de los puntos X, Y, Z y W es el ortocentro del triángulo formado por los otros tres.

25. Demuestra que las cuatro proyecciones del vértice A de un triángulo ABC sobre las bisectrices externas e internas de los ángulos B y C son colineales.

26. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que las diagonales AC y BD son perpendiculares, y sea P su intersección. Demuestra que las reflexiones de P con respecto a AB, BC, CD y DA se encuentran en una misma circunferencia.

27. Sean B y C los extremos y A el punto medio de un semicírculo. Sea M un punto sobre AC, y P y Q los pies de las perpendiculares desde A y C a la recta BM, respectivamente. Demuestra que $BP = PQ + QC$.

28. Los puntos E y F se toman sobre el lado BC de un cuadrilátero convexo $ABCD$ (con E más cerca que F de B). Se sabe que $\angle BAE = \angle CDF$ y $\angle EAF = \angle FDE$. Demuestra que $\angle FAC = \angle EDB$.

29. En el triángulo ABC, $\angle A = 60°$ y las bisectrices BB' y CC' se cortan en I. Prueba que $IB' = IC'$.

30. Sea I el incentro del triángulo ABC. Demuestra que el circuncentro del triángulo AIB se encuentra sobre CI.

31. Sea ABC un triángulo y D el pie de la altura desde A. Sean E y F puntos sobre una recta que pasa por D tales que AE es perpendicular a BE, AF es perpendicular a CF, y E y F son diferentes de D. Sean M y N los puntos medios de los segmentos BC y EF, respectivamente. Demuestra que AN es perpendicular a NM.

32. Sea ABC un triángulo acutángulo, y sea T un punto en su interior tal que $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA$. Sean M, N y P las proyecciones de T sobre BC, CA y AB, respectivamente. El circuncírculo del triángulo MNP intersecta los lados

BC, CA y AB por segunda vez en M', N' y P', respectivamente. Prueba que el triángulo $M'N'P'$ es equilátero.

33. Sea A un punto fijo sobre el lado Ox del ángulo xOy. Un círculo variable C es tangente a Ox y a Oy, con D el punto de tangencia con Oy. La segunda tangente desde A a C, toca a la circunferencia en E. Prueba que cuando C varía, la recta DE pasa por un punto fijo.

34. Sea $ABCDEFG$ un hexágono cíclico y sea P la intersección de AB con DE, Q la intersección de BC con EF, y R la intersección de CD con FA. Demuestra que los puntos P, Q y R son colineales.