Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas
ACM

Cuadriláteros.

Estefanía Ordaz

Cuadriláteros cíclicos

Un cuadrilátero *cíclico* es aquel que tiene sus cuatro vértices en la misma circunferencia. Se dice que sus vértices son *conclíclicos.*

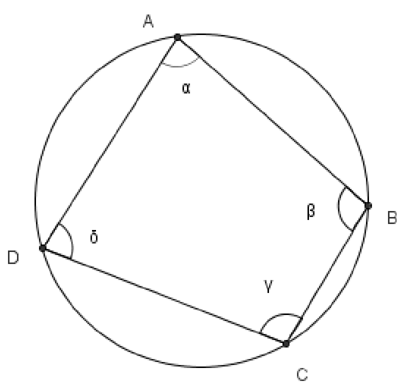

Figura 1

En general se cumple que un cuadrilátero es cíclico si y sólo si la suma de los ángulos opuestos es igual a 180°.

$$\alpha+\gamma=180°$$

$$\beta+\delta=180°$$

Demostración:

Como ∠DAB es un ángulo inscrito en la circunferencia, mide la mitad del ángulo al centro ∠DOB, es decir, $\angle DOB=2\alpha$.

Pasa lo mismo con el ángulo suplementario de ∠DOB, que es 2γ, el doble de la medida de ∠BCD

$$2\alpha+2\gamma= 360°$$

Es decir, si el cuadrilátero es cíclico entonces la suma de los ángulos opuestos es igual a 180°.

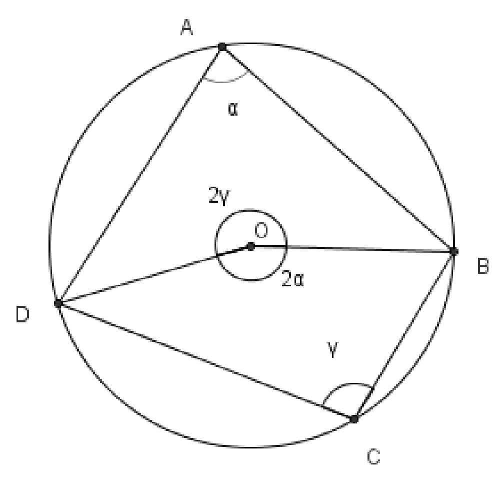

Figura 2

Ahora probemos que si la suma de los ángulos opuestos es 180°, entonces el cuadrilátero es cíclico.

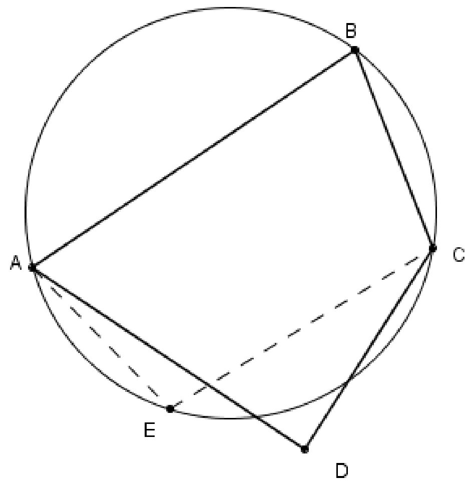

Figura 3

Supongamos que no es cierto, y consideremos un cuadrilátero ABCD tal que $\angle ABC + \angle CDA = 180°$ (1), pero no es cíclico (Figura 3). Trazamos el circuncírculo del triángulo ABC. Ahora consideremos un punto E en el circuncírculo y tenemos que el cuadrilátero ABCE es cíclico, y por lo anterior sabemos que cumple que $\angle ABC + \angle CEA = 180°$ (2). Si restamos (1) y (2) finalmente obtenemos que

$$\angle CDA = \angle CEA$$

Lo cual se cumple únicamente si el cuadrilátero ACDE es cíclico. Llegamos a una contradicción, la suposición que hicimos no es posible, es decir ABCD debe ser cíclico.

Teorema de Ptolomeo

Si ABCD es un cuadrilátero cíclico cumple que la suma del producto de los lados opuestos es igual al producto de las diagonales.

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$$

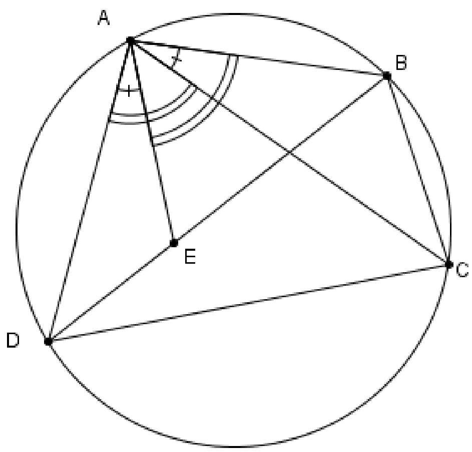

Figura 4

Demostración:

Sea ABCD un cuadrilátero cíclico. Consideremos un punto E en la diagonal DB tal que $\angle DAE = \angle CAB$.

Los ángulos $\angle BDA = \angle BCA$ ya que están inscritos en el mismo arco de circunferencia, por lo tanto

$$\Delta AED \sim \Delta ABC$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC}$$

$$AD \cdot BC = ED \cdot AC \quad (1)$$

De igual forma $\angle DAC = \angle EAB$ (Figura 4) y $\angle ABD = \angle ACD$ por estar inscritos en el mismo arco de circunferencia. Tenemos entonces

$$\Delta ACD \sim \Delta ABE$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BE}$$

$$AC \cdot BE = CD \cdot AB \quad (2)$$

Sumamos (1) y (2) y nos queda:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BE + AC \cdot ED$$

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot (BE + ED)$$

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD.$$

El converso es también cierto, es decir, si un cuadrilátero convexo ABCD cumple que $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$, entonces es cíclico.

Cuadriláteros circunscribibles

Un cuadrilátero *circunscribible* es aquel que tiene sus cuatro lados tangentes a una misma circunferencia.

Un cuadrilátero es circunscribible si y sólo si las sumas de los lados opuestos son iguales.

Demostración

Sea ABCD un cuadrilátero circunscribible y P, Q, R, S los puntos de tangencia con el incírculo sobre los lados AB, BC, CD y DA respectivamente (Figura 5). Sabemos que los segmentos de tangente a una circunferencia desde un punto exterior a la misma son iguales, por lo que nos queda

$$AS=AP,\ BP=BQ,\ CQ=CR,\ DR=DS.$$

$$AP+BP+CR+DR=AS+BQ+CQ+DS$$

$$AB+CD=BC+DA$$

Es decir, si el cuadrilátero es circunscribible, entonces las sumas de los lados opuestos son iguales.

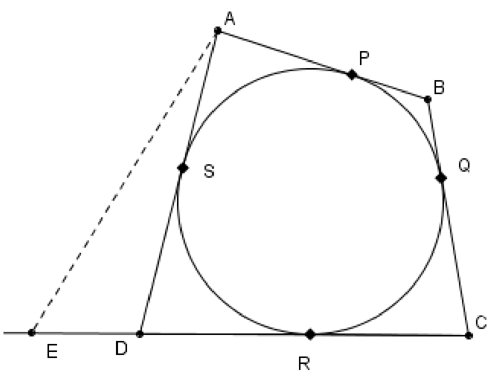

Figura 5

Ahora probemos que si la suma de los lados opuestos es igual, entonces el cuadrilátero es circunscribible. Supongamos que no es cierto y consideremos un cuadrilátero ABCE tal que $AB+CE=BC+EA$ (1) pero que no es circunscribible (Figura 5). Ahora veamos el cuadrilátero ABCD que sí es circunscribible. Por lo que acabamos de demostrar sabemos que $AB+CD=BC+DA$ (2). Restando las ecuaciones (1) y (2) tenemos

$$CE - CD = EA - DA$$
$$DE + DA = EA$$

Y esto sólo se cumple si D y E son el mismo punto, lo cual nos lleva a una contradicción, por lo que ABCE debe ser circunscribible.

Problemas con solución

1. Sea ABCD un cuadrilátero. Sus diagonales AC y BD se intersectan en un punto E. Demostrar que si ABCD es cíclico, entonces $AE{\cdot}EC{=}BE{\cdot}ED$.

2. Sea ABCD un cuadrilátero cíclico tal que AB es diámetro de la circunferencia circunscrita. Sean M y N los pies de las perpendiculares desde A y B respectivamente hasta CD. Demostrar que $DM{=}CN$.

3. Sea ABCD un cuadrilátero. Se trazan las cuatro bisectrices internas de sus ángulos y se toman los cuatro puntos de corte de cada par de bisectrices de ángulos adyacentes. Demostrar que esos cuatro puntos son concíclicos.

4. Sea ABC un triángulo equilátero y P un punto en el arco CA de su circunferencia circunscrita. Demostrar que $PC{+}PA{=}PB$

Soluciones

1. (Figura 6) Como ABCD es cíclico, $\angle DAC{=}\angle DBC$ ya que están inscritos en el mismo arco de circunferencia. Por la misma razón $\angle BDA{=}\angle BCA$. Tenemos entonces que:

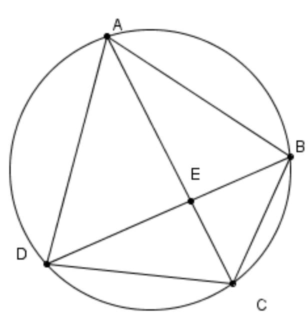

Figura 6

$$\Delta AED \sim \Delta BEC$$

$$\frac{AE}{BE}{=}\frac{ED}{EC}$$

$$AE{\cdot}EC{=}BE{\cdot}ED$$

2. (Figura 7) Sea O el centro del círculo y P el pie de la perpendicular desde O hasta CD. Vemos que $OP||AM||BN$. Como O es el punto medio de AB, entonces P es el punto medio de MN. Sabemos también que $OD=OC$ lo que implica que ΔOCD es isósceles, y P es punto medio de CD.

$$MP=PN,\ DP=PC.$$
$$MP - DP = PN - PC$$
$$DM = CN$$

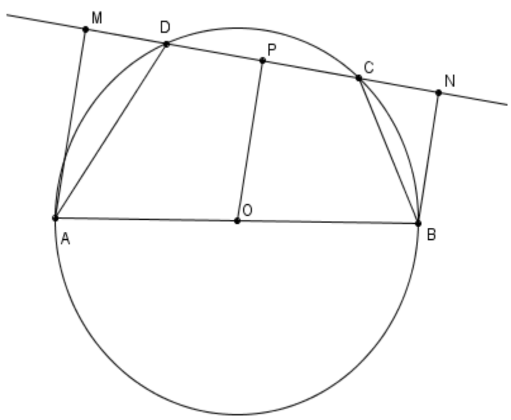

Figura 7

3. (Figura 8) Sean E, F, G, H los puntos de corte de cada par de bisectrices de ángulos adyacentes. Observamos el triángulo AGB:

$$\angle BGA=180°-\frac{\angle A}{2}-\frac{\angle B}{2}$$

$$\angle DEC=180°-\frac{\angle C}{2}-\frac{\angle D}{2}$$

$$\angle BGA+\angle DEC=180°-\frac{\angle A}{2}-\frac{\angle B}{2}+180°-\frac{\angle C}{2}-\frac{\angle D}{2}$$

$$\angle BGA+\angle DEC=360°-\left(\frac{\angle A+\angle B+\angle C+\angle D}{2}\right)$$

$$\angle BGA+\angle DEC=180°$$

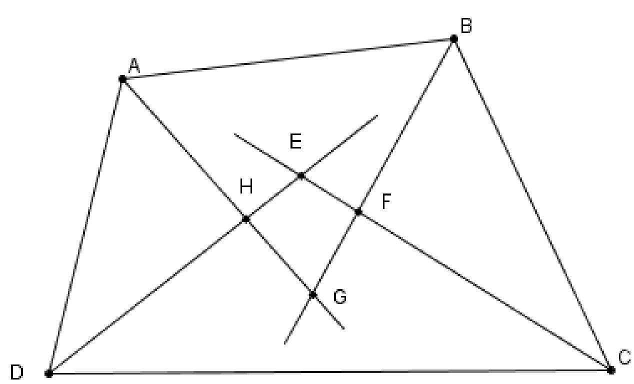

Figura 8

4. (Figura 9) Como el cuadrilátero APCB es cíclico, cumple:

$$PA{\cdot}BC{+}AB{\cdot}PC{=}CA{\cdot}PB$$

Como

$$AB{=}BC{=}CA$$

$$PA{+}PC{=}PB$$

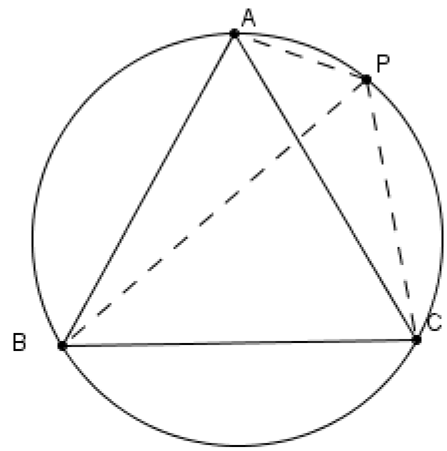

Figura 9

Problemas propuestos

5. Sea ABCD un cuadrilátero. Se trazan las cuatro bisectrices externas de sus ángulos y se toman los cuatro puntos de corte de cada par de bisectrices de ángulos adyacentes. Demostrar que esos cuatro puntos son concíclicos.

6. Demostrar que si un cuadrilátero cíclico tiene sus diagonales perpendiculares, entonces una recta que pase por el punto de corte de las diagonales y sea perpendicular a uno de los lados, pasará por el punto medio del lado opuesto.

7. Sea ABCD un cuadrilátero cíclico tal que AC es diámetro de la circunferencia circunscrita. Sean E y F los pies de las perpendiculares desde A y C respectivamente hasta BD. Demostrar que $DE{=}BF$.

8. Sea ABC un triángulo equilátero. Una recta a través de A corta al lado BC en D y al circuncírculo del triángulo en E. Demostrar que:

$$\frac{1}{ED}=\frac{1}{EB}+\frac{1}{EC}$$

9. (Figura 10) Si una circunferencia corta dos lados y una diagonal de un paralelogramo ABCD es puntos P, R, Q, entonces

$$AP{\cdot}AB+AR{\cdot}AD=AQ{\cdot}AC$$

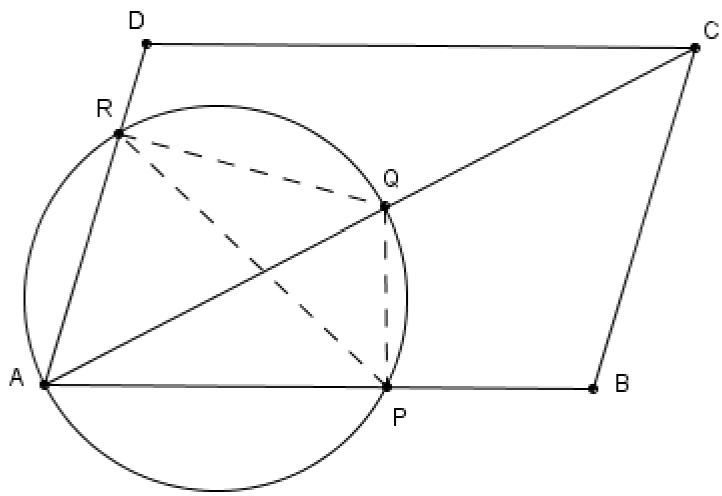

Figura 10

10. Sea ABCD un cuadrilátero cíclico. Demostrar que:

$$\frac{AC}{BD}=\frac{AB{\cdot}AD+CB{\cdot}CD}{BA{\cdot}BC+DA{\cdot}DC}$$

11. Sea ABCD un cuadrilátero circunscribible. Demostrar que las bisectrices de los ángulos internos concurren en el centro de la circunferencia inscrita.

12. Sea ABCD un cuadrilátero circunscribible. El incírculo del triángulo ABC es tangente a los lados AB y BC en P y Q y el incírculo del triángulo ADC es tangente a los lados CD y DA en R y S respectivamente. Demostrar que cuadrilátero PRQS es cíclico.