Cuatro puntos conjugados armónicos

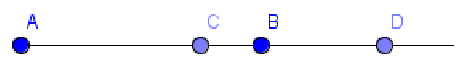
Entrenamiento extra
Hoy
Por: Clemente

Resumen

En esta lista se tratará una herramienta bastante poderosa y, como por primera vez en geometría, fácil de asimilar. Pero que sea fácil de asimilar no significa que no requieras trabajar, pues por si mismos, los conjugados armónicos tienen bastantes propiedades útiles y se relacionan con otras herramientas.

1. Definición

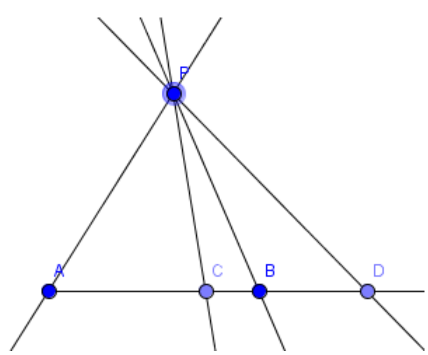
Se tienen una recta AB en el plano, un punto C dentro del segmento AB y un punto D sobre la recta AB, pero fuera del segmento, de tal manera que se cumple la siguiente relación:



$$\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB} = k$$

Entonces se dice que C y D son conjugados armónicos de A y B y dividen a AB interna y externamente en la misma razón k. A ti te toca demostrar que, curiosamente, A y B son conjugados armónicos de C y D, por este hecho es que al conjunto ordenado de puntos A, C, B y D se les hace mención como cuatro puntos conjugados armónicos, o para no cansarnos: *cuaterna armónica*.

Si ademas de la cuaterna armónica A, C, B, D, se tiene un punto P externo a la recta que contiene a la cuaterna, entonces a las rectas PA, PB, PC y PD se les llaman *haz armónico*; si, en singular.



Una manera de definir al haz armónico, análoga a la de la cuaterna armónica, es con razones de funciones trigonométricas. Sean $\ell_1, \ell_3, \ell_2, \ell_4$ cuatro rectas que concurren en un punto O y A, C, B, D puntos no necesariamente colineales sobre $\ell_1, \ell_3, \ell_2, \ell_4$, respectivamente, entonces se dice que las rectas forman un haz armónico si

$$\frac{\sin \measuredangle AOC}{\sin \measuredangle COB} = \frac{\sin \measuredangle AOD}{\sin \measuredangle DOB}$$

Además se dice que O es el centro del haz armónico y que ℓ_3 y ℓ_4 son rectas conjugadas armónicas de ℓ_1 y ℓ_2. De nuevo, tendrás que demostrar que ℓ_1 y ℓ_2 también son conjugadas armónicas de ℓ_3 y ℓ_4.

2. Propiedades

Aquí se tiene todo lo básico de las cuaternas armónicas, pero como de costumbre, tienes que demostrarlo todo. Como acto de buena fé, te diré que algunas propiedades salen fácil si utilizas otra de las propiedades previamente demostradas y para que no temais, las he ordenado.

- Si C y D son conjugados armónicos de A y B, entonces A y B son conjugados armónicos de C y D.
- Si ℓ_3 y ℓ_4 son conjugados armónicos de ℓ_1 y ℓ_2, entonces ℓ_1 y ℓ_2 son conjugados armónicos de ℓ_3 y ℓ_4.
- Sean A, C, B y D cuatro puntos sobre una recta y O un punto fuera de ésta. El haz con centro en O que pasa por A, C, B y D es armónico si y sólo si la cuaterna de puntos es armónica.
- Sean A, C, B y D cuatro puntos sobre una misma recta, son conjungados armónicos si y sólo si $\dfrac{2}{AB} = \dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AD}$
- Sean A, C, B y D cuatro puntos sobre una misma recta y sea O el punto medio del segmento AB, entonces $OC \cdot OD = OA^2$ si y sólo si A, C, B y D están en relación armónica.
- Sean A, C, B y D cuatro puntos sobre una misma recta y sea O un punto que no pertenece a la recta que los contiene. La recta que pasa por B y es paralela a OA corta a OC y OD en X y Y, respectivamente. Entonces $XB = YB$ si y sólo si A, C, B y D están en relación armónica.
- Sea A, C, B y D una cuaterna armónica y sea O un punto que no pertenece a la recta que la contiene, entonces cualquier recta que atraviese a OA, OB, OC y OD genera cuatro puntos en relación armónica.
- Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos circunferencias con centros O_1 y O_2. Una recta que pasa por O_1 corta a $\mathcal{C}_1$ en A y B y a $\mathcal{C}_2$ en C y D. Entonces A, C, B y D son conjugados armonicos si y sólo si $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son ortogonales.
- Sea $\triangle ABC$ un triangulo y AX, BY, CZ tres cevianas. Sea P la interseccion de YZ con la prolongación del lado BC. Entonces P, B, X y C son una cuarteta armonica si y sólo si AX, BY y CZ son concurrentes.
- Por A se traza una secante a una circunferencia y la intersecta en B y C. Entonces la polar de A con respecto a dicha circunferencia pasa por el conjugado armónico de A con respecto a B y C.

2.1. La trifuerza

La trifuerza (quiero aclarar que así le llamo yo) es una propiedad muy fuerte. Bueno, más bien es un conjunto de propiedades. Para que veas lo que es, primero considera los puntos ordenados A, C, B, D sobre una misma recta y al punto P externo a ésta, entonces la trifuerza se compone de:

- **(Valor)** A, C, B y D son conjugados armónicos.
- **(Sabiduría)** PC bisecta al $\measuredangle APB$.

- **(Fuerza)** $\measuredangle CPD = 90^\circ$.

Ahora, lo importante es que, si tu tienes que en una construcción geométrica se cumplen dos de las propiedades, entonces la tercera se cumple, lo cual, obviamente lo tienes que demostrar.

3. Recomendaciones y observaciones

- Siempre que trabajes con armónicos, busca dónde aplicar las propiedades. Son tus amigas, úsalas!
- Al parecer, si quieres usar armónicos en un examen oficial, las propiedades que te he presentado debes enunciarlas como lemas y demostrarlos. Así que aguas!
- Los armónicos se llevan bien con las polares.
- La parte del haz armónico puede ser ampliada, lo cual te lleva a cuadriláteros armónicos. Pero esa es harina de otro costal.
- Sea A, C, B y D una cuaterna armónica, donde C es el punto medio del segmento AB. ¿Qué pasa con D?

4. Agregados culturales

1. Los conjugados armónicos los puedes encontrar en bastantes problemas. Cualquiera pensaría que al ser tan armónicos no tendrían problemas...
2. Baja California Sur tiene 5 municipios al igual que Baja California. Estos son Comondú, Mulegé, La Paz, Los Cabos y Loreto.
3. El líquido rojo que emana de la carne no es sangre. En realidad es agua coloreada de rojo por una proteína llamada mioglobina.
4. Esta es la segunda lista del año.

5. Ejercicios

1. Dados tres puntos ordenados A, C y B sobre una recta, construir el punto D tal que formen una cuarteta armónica.
2. En un $\triangle ABC$ se traza por A una recta ℓ paralela a BC. Demostrar que ℓ, AB, AM y AC forman un haz armónico, donde M es el punto medio de BC.
3. Sean A, C, B y D cuatro puntos sobre una recta y ℓ_1, ℓ_3, ℓ_2 y ℓ_4 un haz. Entonces A, C, B y D son armónicos si y solo si ℓ_1, ℓ_3, ℓ_2 y ℓ_4 son armónicos.
4. Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia y P un punto. Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias ortogonales a $\mathcal{C}$ que pasan por P.
5. Sea $\triangle ABC$ un triangulo y AX, BY, CZ tres cevianas concurrentes en R. Sea P la interseccion de YZ con la prolongación del lado BC y Q la intersección de AX con YZ. Demuestra que A, R, Q, X y Y, Z, Q, P son cuaternas armónicas.
6. En un $\triangle ABC$, sean D el pie de la altura desde A y M el punto medio de BC. Por M se trazan rectas paralelas a AB y AC, que cortan a AD en P y Q respectivamente. Demostrar que A y D son conjugados armónicos de P y Q.

7. **(Apolonio)** Sea A y B dos puntos fijos, encuentra el lugar geométrico de los puntos P tales que $\frac{AP}{PB} = k$.

8. Sean a y b dos polares tales que el polo A de a se encuentra en b, y se intersectan en P. Entonces a y b se encuentran separadas armónicamente por las tangentes desde P hacia la circunferencia.

9. Si A, C, B y D están en relación armónica y sean O y O' los puntos medios de AB y CD, respectivamente, prueba que $OB^2 + O'C^2 = OO'^2$

10. La bisectriz del ángulo A del $\triangle ABC$ corta al lado BC en P. Q y R son los pies de las perpendiculares desde B y C sobre AP, respectivamente. Demostrar que los puntos A, P, Q y R están en relación armónica.

11. Las tangentes a una circunferencia por P y Q se intersectan en A, y la línea de diámetro BC para por A. Demostrar que A y Q están separados armónicamente por los puntos en los cuales su línea es interceptada por PB y PC.

6. Problemas

1. **(Teorema de Blanchet)** Sea AD una altura del triángulo $\triangle ABC$ y P un punto sobre dicha altura. Sean E y F las intersecciones de BP con AC y CP con AB, respectivamente. Demuestra que AD bisecta al ángulo $\measuredangle EDF$.

2. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico con diagonales perpendiculares y sea P la intersección de éstas. E es la intersección de AD con BC y F la intersección de AB con CD. Demuestra que AC bisecta al ángulo $\measuredangle EPF$.

3. Sea I el incentro del $\triangle ABC$. Sean P y Q las intersecciones de AI con el circuncírculo de $\triangle ABC$ y con el lado BC, respectivamente. Demuestra que $PI^2 = PQ \cdot PA$.

4. Dados una recta ℓ y dos puntos A y B en lados opuestos de ℓ, demostrar que existe un único punto P sobre ℓ tal que el ángulo $\measuredangle APB$ es bisecado por la recta ℓ.

5. Sea M el punto medio del lado AB del cuadrilátero cíclico $ABCD$. Sean P y Q las intersecciones de AD con BC y de AC con BD, respectivamente. Sea R un punto en el circuncírculo del $\triangle MDC$ tal que $\dfrac{RD}{RC} = \dfrac{MD}{MC}$, demuestra que P, Q y R son colineales.

6. Sean D, E y F los pies de las alturas del triángulo acutángulo $\triangle ABC$ sobre los lados BC, CA y AB. Prueba que las reflexiones de D con respecto a los lados AB y AC se encuentran sobre la recta EF.

7. **(INMO, 2003)** Sea P un punto en el interior del triángulo acutángulo $\triangle ABC$. Sean E y F las intersecciones de BP con AC y de CP con AB, respectivamente. La recta AP se intersecta en D con EF. Sea K el pie de la perpendicular desde D sobre el lado BC. Demuestra que la línea KD bisecta al ángulo $\measuredangle EKF$.

8. A, B y C son los pies de las bisectrices interiores del $\triangle EFG$. Demuestra que $\triangle ABC$ es rectángulo si y sólo si alguno de los ángulo de $\triangle EFG$ es de 120°

9. **(IMO Shortlist, 2002)** Sea K el punto de tangencia del lado BC con el incírculo Ω del $\triangle ABC$ y AD altura del mismo triángulo. M es el punto medio del segmento AD y N es la intersección de KM con Ω. Demuestra que Ω y el circuncírculo del $\triangle BCN$ son tangentes entre si en N.

10. **(Croacia TST, 2011)** Sean K y L puntos arbitrarios en el semicírculo de diámetro AB. Sea T la intersección de AK con BL y N un punto en AB tal que TN es perpendicular a AB. Si U es la intersección de KL con la mediatriz de AB y V un punto en KL tal que $\measuredangle UAV = \measuredangle UBV$. Demuestra que $NV \perp KL$.

11. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico con los ángulos en B y C obtusos. Las rectas AB y CD intersectan en E. P y R son las proyecciones de E sobre BC y AD, respectivamente. Q y S son las intersecciones de EP con AD y de ER con BC, respectivamente. Si K es el punto medio de QS, demuestra que E, O y K son colineales.

12. Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo con $AB < AC$. D, E y F son los pies de las alturas desde A, B y C, respectivamente. Sea P la intersección de EF con BC. Por P se traza una paralela a AC que intersecta a AB en N. Si M es el punto medio de AC, demuestra que M, D y N son colineales.

13. En el $\triangle ABC$ sean D, E y F los pies de las alturas en los lados BC, CA y AB, respectivamente. Sea X el punto medio del segmento AH, T la intersección de EX con AB y R la intersección de BE con DF. Demuestra que TR y BC son perpendiculares.

14. **(Ibero, 2015)** En el triángulo acutángulo ABC el punto D es el pie de la perpendicular desde A sobre el lado BC. Sea P un punto en el segmento AD. Las rectas BP y CP cortan a los lados AC y AB en E y F respectivamente. Sean J y K los pies de las perpendiculares desde E y F sobre AD respectivamente. Demuestre que

$$\frac{FK}{KD} = \frac{EJ}{JD}$$

15. Se trazan las tangentes por B y C al circuncírculo del $\triangle ABC$, y sea P su intersección. X es la intersección de AB con CP, Y la intersección de AC con BP, y D y E las intersección de la tangente por A con BP y CP, respectivamente. Prueba que BC, DE y XY son concurrentes.