Descenso infinito

Entrenamiento extra
Por: Argel

Resumen

En esta ocasión trataremos con una técnica de demostración usada en algunos problemas principalmente relacionados con teoría de números. La lista, por lo tanto tratará con algunos ejemplos para ver su aplicación y posteriormente una serie de problemas.

1. Al descenso infinito, ¿y más allá?

Descenso infinito es una técnica de demostración y que en cierto sentido es comparable con inducción matemática, en el caso de inducción se usaba la analogía de los dominoes, en el caso del descenso infinito la analogía corresponde a la de una escalera, sí un peldaño más alto no se puede alcanzar sin primero alcanzar un peldaño más bajo, esto, aunado con la idea de que no existe un peldaño más bajo, entonces es imposible alcanzar algún peldaño.

Existen dos variantes del descenso infinito, pero ambas tienen su base en que los números enteros no negativos se encuentran acotados inferiormente, muchos de los problemas de este tipo nos tendrán tratando de demostrar que una ecuación no tiene soluciones en los enteros positivos, pero suponiendo que la ecuación tuviera soluciones en los enteros positivos y que si la existencia de estas implica que hay otro grupo de enteros más pequeños que son solución y a su vez, estos implican que otros enteros más pequeños cumplen, repitiendo este proceso eventualmente se vuelve imposible.
FMID (Fermat's Method of Infinite Descent) Sea k un entero no negativo.Suponga que: Cuando $P(m)$ es verdadera para un entero $m > k$, entonces debe de haber un entero más pequeño j, $m > j > k$, para el cual $P(j)$ es cierta.
Entonces $P(n)$ es falsa para toda $n > k$.
FMID variante 1 No existe una secuencia de enteros no negativos

$$n_1 > n_2 > \cdots$$

. **FMID variante 2** Si la secuencia de enteros no negativos $(n_i)_{i\geq 1}$ satisface las desigualdades $n_1 \geq n_2 \geq \cdots$, entonces existe i_0 tal que $n_{i_0} = n_{i_0+1} = \cdots$.

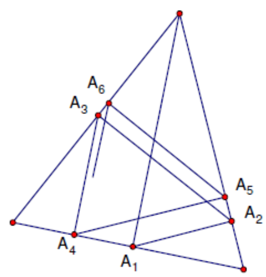
2. Ejemplos

2.1. Ejemplo 1

Muetsre que $\sqrt{2}$ es irracional
Vamos a mostrar que no hay enteros positivos tales que $\sqrt{2} = \frac{x}{y}$, por lo tanto vamos a mostrar que la ecuación $x^2 = 2y^2$ no tiene solución entera positiva.
Tratemos de demostrar lo contrario, consideremos $x = m$ y $y = n$ sea una solución a la ecuación de tal forma que m es el menor valor de x que satisface la ecuación. Entonces $m^2 = 2n^2$, lo que implica que m es par, con lo que se obtiene $m = 2m_1$. Entonces $(2m_1)^2 = 4m_1^2 = 2n^2$ y de lo anterior $n^2 = 2m_1^2$, lo que implica que n es también un valor posible para x en la ecuación $x^2 = 2y^2$. Sin embargo $n < m$, lo que contradice la minimalidad de m.

2.2. Ejemplo 2

Empezando desde el vértice de un triángulo acutángulo, se traza la perpendicular encontrando al lado opuesto (lado 1) en A_1. Desde A_1, se traza una perpedicular que encuentra al otro lado(lado 2) en A_2. Empezando desde A_2, la perpendicular se traza para encontrar al tercer lado (lado 3) en A_3. La perpendicular desde A_3 es dibujada para encontrar al lado 1 en A_4, posteriormente al lado 2 y así sucesivamente para el resto.
Muestre que los puntos A_1, A_2, ... son todos distintos



Nótese que dado que el triángulo es acutángulo, todos los puntos A_1, $i \geq 1$ se encuentran en los lados del triángulo en lugar de salir o coincidir con los vértices del triángulo. Esto implica que A_i y A_{i+1} no van a coincidir ya que se encuentran en lados adyacentes del triángulo. Hagamos la suposición que si A_i coincide con A_j $(i < j)$ siendo i el más chico con esta propiedad.
Entonces $i = 1$ ya que, de lo contrario, A_{i-1} coincidiría con A_{j-1} lo que contradice la minimalidad de i. Finalmente suponga que A_1 conincide con A_j, $j \geq 3$, esto sucede precisamente cuando A_{j-1} es el vértice del triángulo frente al lado 1. Pero no hay vértices del triángulo en la lista, por lo tanto es imposible.

2.3. Ejemplo 3

Pruebe que la siguiente ecuación no tiene soluciones en los enteros positivos:

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 2xyzu$$

Dado que $2xyzu$ es par, la suma $x^2 + y^2 + z^2 + u^2$ también debe de ser par. En el caso de que los cuatro sean impares, entonces un lado de la ecuación es divisible entre 4 mientras que el otro es divisible entre 2. Si dos enteros son impares entonces, el lado izquirdo es solo divisible entre 2 con el lado izquierdo divisible entre 8. Se concluye que todos los enteros van a ser pares, con lo que se tiene $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$, $u = 2u_1$. Obtenemos

$$(2x_1)^2 + (2y_1)^2 + (2z_1)^2 + (2u_1)^2 = 2(2x_1)(2y_1)(2z_1)(2u_1)$$

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2 = 8x_1y_1z_1u_1$$

De esta ecuación también se obtiene que los cuatro son pares, es decir, $x_2 = 2x_1$, $y_2 = 2y_1$, $z_2 = 2z_1$, $u_2 = 2u_1$ y

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + u_2^2 = 32x_1y_1z_1u_1$$

Este proceso se mantiene hasta que se demuestra

$$x_s^2 + y_s^2 + z_s^2 + u_s^2 = 2^{2s+1}x_sy_sz_su_s \quad \text{para toda} \quad s \in \mathbb{N}$$

Para cada $s \in \mathbb{N}$, $\frac{x}{2^s}$, $\frac{y}{2^s}$, $\frac{z}{2^s}$, $\frac{u}{2^s}$ son enteros positivos, hemos llegado a una contradicción.

3. Agregados Culturales

1. Aunque una de las versiones más tempranas de este método se le atribuye a los Pitagóricos, Fermat fue quien lo mencionó explicitamente y le dio este nombre, Fermat se encontraba particularmente orgulloso de este método, en una carta donde resume sus trabajos en teoría de números dice que todos los resultados que había encontrado fueron con este método.

2. Curiosamente no se menciona el último teorema de Fermat, sin embargo usó este método para demostrar el caso $n = 4$.

3. No logré que Clemente se pusiera a buscar problemas

4. A esta lista le gusta Hector

4. Cosas interesantes

4.1. ¿La proporción aurea?

Ahora trataremos de demostrar que φ es irracional
La ecuación dorada que se encuentra relacionada a la proporción aurea es

$$\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x}$$

Si φ es un número racional vamos a sustituir $\frac{a}{b}$ en la ecuación dorada

$$x^2 = x + 1$$

$$a^2 = ab + b^2$$

Tanto a como b deben de ser pares, entonces $a = 2a_1$ y $b = 2b_1$. Haciendo la correspondiente sustitución se tiene

$$4a_1^2 = 4a_1b_1 + 4b_1^2$$

$$a_1^2 = a_1b_1 + b_1^2$$

Es la misma ecuación a la que teníamos previamente, entonces hemos llegado a una contradicción.

4.2. Aplicación a áreas

El caso del último teorema de Fermat con $n = 4$ es una consecuencia de que la ecuación $x^4 + y^4 = z^2$ no tiene solución en los enteros positivos. Fermat llegó a esta ecuación, pero no tenía nada que ver con el último teorema de Fermat, sino que fue a partir de los siguientes cuestionamientos

1. ¿Puede un triángulo rectángulo con lados con longitudes enteras tener la misma área que un cuadrado con lados de longitud entera?

2. ¿Puede un triángulo rectángulo con lados con longitudes enteras tener doble del área de un cuadrado con lados de longitud entera?

5. Problemas

1. Encuentre todas las tripletas (x, y, z) de enteros no-negativos tales que $x^3 + 2y^3 = 4z^3$.

2. $2n+1$ $(n \geq 1)$ pesos enteros están dados. Si se remueve cualquiera de las pesas, las $2n$ restantes se pueden dividir en dos montones de igual peso. Pruebe que todas las pesas son iguales.

3. Encuentre todas las soluciones (x, y, z) en los enteros de la siguiente ecuación Diofantina:
$$2005x^3 = y^3 + 25z^3$$

4. Demuestre que no hay enteros positivos (x, y, z, u) que satisfacen
$$x^2 + y^2 = 3(z^2 + u^2)$$

5. Muestre que no hay enteros positivos x, y, z que satisfacen la ecuación
$$x^2 + 10y^2 = 3z^2$$

6. ¿Es posible partir un cubo infinitamente en cubos de diferentes tamaños?

7. Encuentre todas las soluciones enteras de $10x^3 + 20y^3 + 1992xyz = 1993z^3$.

8. Pruebe que el sistema de ecuaciones
$$x^2 + 5y^2 = z^2$$
$$5x^2 + y^2 = t^2$$
No admite soluciones enteras no triviales.

9. Encuentre todas las tripletas (x, y, z) de soluciones enteras positivas a la ecuación
$$x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 3xyz = 0$$

10. $x^2 + y^2 = x^2y^2$ no tiene soluciones enteras además de $x = y = 0$
Hay otra solución que involucra una factorización

11. **El problema de Sylvester** Dado n $(n \geq 3)$ puntos en el plano. Si una línea pasando por cualesquiera dos puntos también pasa por un tercer punto del conjunto, pruebe que todos los puntos se encuentran en la misma línea.

12. Encuentre todos los primos positivos p para los cuales existen enteros positivos x, y, n tales que $p^n = x^3+y^3$.

13. Determine todas las soluciones enteras a
$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2b^2$$

14. Pruebe que no hay una progresión aritmética infinita cuyos términos son todos cuadrados perfectos.

15. Resuelva en enteros no negativos la ecuación
$$2^x - 1 = xy$$

16. Encuentre las soluciones enteras de $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$.

17. Encuentre todas las soluciones enteras $a^2 + 6b^2 = p^2$ y $b^2 + 6a^2 = q^2$.

18. Encuentre el valor maximal de m^2+n^2 si m y n son enteros entre 1 y 1981 que satisfacen $(n^2-mn-m^2)=1$.

19. Encuentra todos los pares de enteros positivos (a, b) con la propiedad de que $ab+a+b$ divide a^2+b^2+1.

20. Dados n ($n \geq 3$) puntos en el plano y estos no están sobre la misma línea. Desde cualesquiera dos puntos se forman k líneas distintas. Muestre que $k \geq n$.

21. a, b, c son enteros tales que
$$a^2+b^2+c^2 = 89(ab+bc+ca)$$
Muestra que $a=b=c=0$.

22. El conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es denominado el plano lattice. Pruebe que para $n \neq 4$ no existe un n- ágono regular con puntos lattice como vértices.

23. Para cualquier entero positivo k diferente de 1 o 3, la ecuación $x^2+y^2+z^2 = kxyz$ no tiene solución entera excepto $(0, 0, 0)$.
Nota: El caso cuando $k=3$ se conoce como la **Ecuación de Markoff**

24. Sean a y b enteros positivos. Muestre que si $4ab-1$ divide $(4a^2-1)^2$, entonces $a=b$.

25. Demuestre que $x^4+y^4=z^2$ no tiene solución cuando $xyz \neq 0$.