DESIGUALDADES

Ricardo Antonio Gutiérrez Esparza
Contacto: 0226154@up.edu.mx

1. Desigualdades

NOTA IMPORTANTE: Este material tiene una serie de anexos al final. Es altamente recomendado consultarlos como recurso adicional a este material (cuando termines este material, de preferencia).

Definición

Una desigualdad es justamente lo opuesto a una igualdad, de manera que con ellas indicamos que dos cantidades o expresiones no son iguales. Puede ser que una expresión sea menor (<), mayor (>), menor o igual (≤) o mayor o igual (≥) que otra.

Si tenemos por ejemplo la desigualdad $2x + 3 > 11$, podemos considerar los siguientes casos:

x	$2x + 3 > 11$	Conclusion
3	$9 > 11$	Enunciado falso
4	$11 > 11$	Enunciado falso
5	$13 > 11$	Enunciado verdadero
6	$15 > 11$	Enunciado verdadero

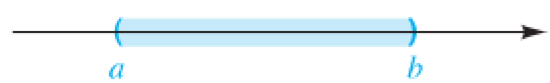
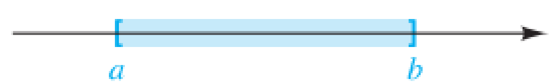
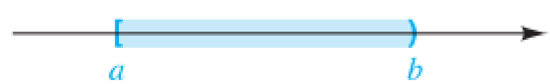
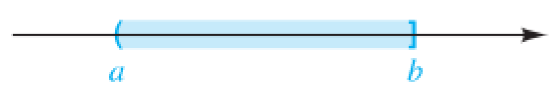
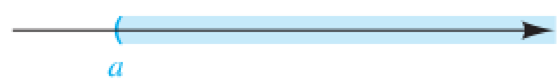
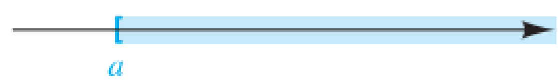
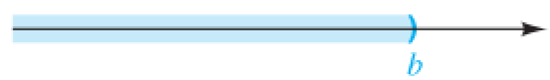
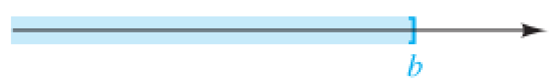
Y en general, para cualquier valor de x mayor que 4, vamos a tener que el enunciado será verdadero.

Esta última conclusión es un poco extraña, parece sugerir que la desigualdad tiene **infinitas soluciones**, ¿será esto posible? Verás, **resolver** una desigualdad quiere decir que tenemos que encontrar *todas* las soluciones. En general tendremos que la mayoría de las desigualdades tienen de hecho una cantidad infinita de soluciones. Para representarlas se utilizan **intervalos**.

2. Intervalo

Un intervalo es un conjunto de valores que van de un límite inferior a un límite superior. Se pueden representar usando una **desigualdad**, **la notación de conjuntos** o usando una **gráfica**. Hay dos tipos de intervalos, abiertos y cerrados. Los intervalos abiertos se dan cuando el límite no forma parte del conjunto de números, y los abiertos cuando sí se incluye. Por ejemplo, si tenemos el intervalo de **número enteros**[1] {4, 5, 6, 7}, podríamos considerar que el límite inferior es 3 y no lo incluimos, y al mismo tiempo podríamos considerar al límite superior como 7, que sí está incluido. Entonces, decimos que el intervalo es abierto por abajo y cerrado por arriba. Usando desigualdades se pude representar como $3 < x \leq 7$, de manera que usamos los símbolos de mayor que y menor que para intervalos abiertos, y menor o igual y mayor o igual para los cerrados. En forma de conjunto se representa así $x \in (3,7]$, donde $\in$ se lee como “pertenece a”. Usamos paréntesis para representar un intervalo abierto, y corchetes para los cerrados. Para la representación gráfica se usa la recta numérica, y al igual que con la notación de conjuntos se usa paréntesis para intervalos abiertos, y corchetes para cerrados[2].

Observa esta tabla con ejemplos para que veas la relación entre cada forma de representar intervalos:

Notación	Desigualdad	Gráfica
(1) (a, b)	$a < x < b$	
(2) $[a, b]$	$a \leq x \leq b$	
(3) $[a, b)$	$a \leq x < b$	
(4) $(a, b]$	$a < x \leq b$	
(5) (a, ∞)	$x > a$	
(6) $[a, \infty)$	$x \geq a$	
(7) $(-\infty, b)$	$x < b$	
(8) $(-\infty, b]$	$x \leq b$	
(9) $(-\infty, \infty)$	$-\infty < x < \infty$	

[1] En general cuando hablamos de intervalos usaremos números reales. Se decidió usar enteros en este ejemplo por simplicidad.

[2] En algunos textos se utiliza una bolita rellena para intervalos cerrados y una bolita en blanco para abiertos. Ejemplo.

Entonces veíamos que la solución de la desigualdad de arriba era todas las x cuyo valor es mayor que 5. La solución es entonces un intervalo que puede ser representado de las siguientes maneras:

$$Desigualdad: 4x < \infty$$

$$Notación\ de\ conjuntos: x \in (4, \infty) \rightarrow notar\ que\ infinito\ siempre\ es\ abierto$$

Y la gráfica, que queda como ejercicio dibujarla.

>Ejercicios talachudos[3]: Sección 2.6 (p. 7), hacer los impares del 3 al 20.

Propiedades

En general, podemos manipular las desigualdades igual que las igualdades, salvo dos excepciones: la división y multiplicación entre negativos.

Observemos la siguiente tabla:

Propiedad	Ilustración
(1) Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$	$2 < 5$ y $5 < 9$, entonces $2 < 9$.
(2) Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$ y $a - c < b - c$.	$2 < 7$, entonces $2 + 3 < 7 + 3$ y $2 - 3 < 7 - 3$.
(3) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.	$2 < 5$ y $3 > 0$, entonces $2 \cdot 3 < 5 \cdot 3$ y $\frac{2}{3} < \frac{5}{3}$.
(4) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$ y $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.	$2 < 5$ y $-3 < 0$, entonces $2(-3) > 5(-3)$ y $\frac{2}{-3} > \frac{5}{-3}$.

Entonces, la única diferencia es que al multiplicar o dividir por un número negativo tenemos que invertir el signo de la desigualdad. Esto es muy importante, así que no lo olvides.

Ejemplos resueltos:

[3] Para los ejercicios talachudos ver el anexo 1

EJEMPLO 1 **Resolver una desigualdad**

Resuelva la desigualdad $-3x + 4 < 11$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} -3x + 4 &< 11 && \text{original} \\ (-3x + 4) - 4 &< 11 - 4 && \text{reste 4} \\ -3x &< 7 && \text{simplifique} \\ \frac{-3x}{-3} &> \frac{7}{-3} && \text{divida entre } -3\text{; invierta el signo de desigualdad} \\ x &> -\tfrac{7}{3} && \text{simplifique} \end{aligned}$$

FIGURA 3

Entonces, las soluciones de $-3x + 4 < 11$ están formadas por todos los números reales x tales que $x > -\frac{7}{3}$. Este es el intervalo $\left(-\frac{7}{3}, \infty\right)$ trazado en la figura 3. ■

EJEMPLO 2 **Resolver de una desigualdad**

Resuelva la desigualdad $4x - 3 < 2x + 5$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} 4x - 3 &< 2x + 5 && \text{original} \\ (4x - 3) + 3 &< (2x + 5) + 3 && \text{sume 3} \\ 4x &< 2x + 8 && \text{simplifique} \\ 4x - 2x &< (2x + 8) - 2x && \text{reste } 2x \\ 2x &< 8 && \text{simplifique} \\ \frac{2x}{2} &< \frac{8}{2} && \text{divida entre 2} \\ x &< 4 && \text{simplifique} \end{aligned}$$

FIGURA 4

Por lo tanto, las soluciones de la desigualdad dada están formadas por todos los números reales x tales que $x < 4$. Éste es el intervalo $(-\infty, 4)$ que se ve en la figura 4. ■

EJEMPLO 4 **Resolución de una desigualdad continua**

Resuelva la desigualdad continua $-5 \leq \dfrac{4 - 3x}{2} < 1$.

SOLUCIÓN Un número x es una solución de la desigualdad dada si y sólo si

$$-5 \leq \frac{4 - 3x}{2} \quad \text{y} \quad \frac{4 - 3x}{2} < 1.$$

Podemos trabajar con cada desigualdad por separado o resolver ambas desigualdades simultáneamente, como sigue (recuerde que nuestra meta es aislar x):

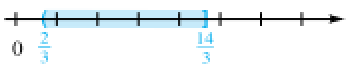
$$\begin{aligned} -5 \leq{} & \frac{4 - 3x}{2} < 1 && \text{original} \\ -10 \leq{} & 4 - 3x < 2 && \text{multiplique por 2} \\ -10 - 4 \leq{} & -3x < 2 - 4 && \text{reste 4} \\ -14 \leq{} & -3x < -2 && \text{simplifique} \end{aligned}$$

$$\frac{-14}{-3} \geq \quad \frac{-3x}{-3} > \frac{-2}{-3} \qquad \text{divida entre } -3\text{; invierta los signos de desigualdad}$$

$$\frac{14}{3} \geq \quad x \quad > \frac{2}{3} \qquad \text{simplifique}$$

$$\frac{2}{3} < \quad x \quad \leq \frac{14}{3} \qquad \text{desigualdad equivalente}$$

FIGURA 6



Así, las soluciones de la desigualdad son todos los números del intervalo semiabierto $\left(\frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right]$ que se ve en la figura 6. ■

EJEMPLO 5 **Resolución de una desigualdad racional**

Resuelva la desigualdad $\frac{1}{x-2} > 0$.

FIGURA 7

SOLUCIÓN Como el numerador es positivo, la fracción es positiva si y sólo si el denominador, $x - 2$, es también positivo. Así, $x - 2 > 0$ o, lo que es equivalente, $x > 2$, y las soluciones son todos los números del intervalo infinito $(2, \infty)$ que se ve en la figura 7. ■

Observa como en el ejemplo 5 $x - 2 \neq 0$, pues si fuera 5 la fracción quedaría indeterminada.

3. Desigualdades con valores absolutos

El valor absoluto de un número se define como la función $|x| = \begin{cases} x, si\ x \geq 0 \\ -x, si\ x < 0 \end{cases}$. La interpretación gráfica es que el valor absoluto de un número es la distancia del número al 0 en la recta numérica, y una interpretación más coloquial es que tomamos el número y nos quedamos con el valor positivo.

Algunas propiedades[4] del valor absoluto son las siguientes:

- $|-x| = |x|$
- $|x|^2 = x^2$
- $|ab| = |a||b|$
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

Cuando tenemos una desigualdad como $|x| < 3$, tenemos que es verdadera cuando $x < 3$, pero también cuando $x > -3$, de manera que la solución es $-3 < x < 3$. También se puede pensar de forma gráfica: queremos el conjunto de puntos que están a una distancia menor que 3 del origen.

Si ahora tenemos la desigualdad $|x| > 3$, la interpretación gráfica sería el conjunto de puntos que están a una distancia mayor que tres del origen, por lo que tendríamos $x > 3$ para los puntos del lado positivo, y $x < -3$ para los del lado negativo. Si te fijas, la respuesta aquí está dada por dos desigualdades, y basta con

[4] Intenta ver por qué son ciertas, no es muy complicado 😊

que una se cumpla para validar algún valor. Para representar esa respuesta podemos usar el símbolo de unión ∪ en la notación de conjuntos: $(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$, o simplemente poner $x<-3$ ***o*** $x>3$.

En esta tabla se resumen las propiedades de las desigualdades con valor absoluto

Propiedades de los valores absolutos ($b>0$)	(1) $\lvert a\rvert < b$	es equivalente a	$-b<a<b$.
	(2) $\lvert a\rvert > b$	es equivalente a	$a<-b$ o $a>b$.

EJEMPLO 7 **Resolución de una desigualdad que contiene un valor absoluto**

Resuelva la desigualdad $\lvert x-3\rvert<0.5$.

SOLUCIÓN

$\lvert x-3\rvert<0.5$	original
$-0.5<x-3<0.5$	propiedad 1
$-0.5+3<(x-3)+3<0.5+3$	aísle x al sumar 3
$2.5<x<3.5$	simplifique

De este modo, las soluciones son los números reales del intervalo abierto (2.5, 3.5). La gráfica se traza en la figura 12. ■

FIGURA 12

EJEMPLO 8 **Resolución de una desigualdad que contiene un valor absoluto**

Resuelva la desigualdad $\lvert 2x+3\rvert>9$.

SOLUCIÓN

		$\lvert 2x+3\rvert>9$	original
$2x+3<-9$	o	$2x+3>9$	propiedad 2
$2x<-12$	o	$2x>6$	reste 3
$x<-6$	o	$x>3$	divida entre 2

En consecuencia, las soluciones de la desigualdad $\lvert 2x+3\rvert>9$ están formadas por los números en $(-\infty,-6)\cup(3,\infty)$. La gráfica se traza en la figura 13. ■

FIGURA 13

Lo más importante que tenemos que tener en mente al resolver una desigualdad es que el resultado siempre será un intervalo, o un conjunto de intervalos. A diferencia de las igualdades, no hay un conjunto de pasos bien definidos para resolver las desigualdades, se trata de manipularlas y tener cuidado de no cometer errores. Conforme agarres práctica encontrarás que en realidad es sencillo.

>Ejercicios talachudos: Sección 2.6 (p. 7), hacer todos los múltiplos de 3, del 21 al 74.

4. Desigualdades cuadráticas

Detalle importante[5]: observa que para cualquier valor de x siempre se cumple que $x^2 \geq 0$.

Cuando nos enfrentamos a una desigualdad que contiene factores cuadráticos, lo que tenemos que hacer es **1) dejar en ceros uno de los lados de la desigualdad**, y **2) factorizarla lo más que podamos**. Una vez que tenemos sus factores, hay que analizarlos por separado, tomando en cuenta un valor k al que llamaremos **valor de prueba**. Veamos un ejemplo

EJEMPLO 1 **Resolución de una desigualdad cuadrática**

Resuelva la desigualdad $2x^2 - x < 3$.

SOLUCIÓN Para usar valores de prueba, *es esencial tener* 0 *en un lado del signo de desigualdad.* Así, procedemos como sigue:

$$2x^2 - x < 3 \quad \text{original}$$
$$2x^2 - x - 3 < 0 \quad \text{iguale a 0 un lado}$$
$$(x + 1)(2x - 3) < 0 \quad \text{factorice}$$

FIGURA 1

Los factores $x + 1$ y $2x - 3$ son cero en -1 y $\frac{3}{2}$, respectivamente. Los puntos correspondientes en una recta coordenada (vea la figura 1) determinan los intervalos que no se intersectan.

$$(-\infty, -1), \ \left(-1, \tfrac{3}{2}\right) \quad \text{y} \quad \left(\tfrac{3}{2}, \infty\right).$$

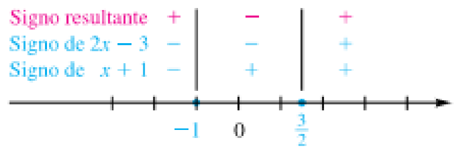
Podemos hallar los signos de $x + 1$ y $2x - 3$ en cada intervalo si usamos un valor de prueba tomado de cada intervalo. Para ilustrar, si escogemos $k = -10$ en $(-\infty, -1)$, los valores de $x + 1$ y $2x - 3$ son negativos, y por lo tanto son negativos en todo $(-\infty, -1)$. Un procedimiento similar para los restantes dos intervalos nos da la siguiente *tabla de signos*, donde el término *signo resultante* de la última fila se refiere al signo obtenido al aplicar las leyes de los signos al producto de los factores. Note que el signo resultante es positivo o negativo según si el número de signos negativos de factores es par o impar, respectivamente.

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$\left(-1, \frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$
Signo de $x + 1$	−	+	+
Signo de $2x - 3$	−	−	+
Signo resultante	+	−	+

[5] ¿Puedes ver por qué?

A veces es conveniente representar los signos de $x + 1$ y $2x - 3$ usando una recta coordenada y un *diagrama de signos*, del tipo que se ilustra en la figura 2. Las líneas verticales indican dónde son cero los factores y los signos de factores se muestran arriba de la recta coordenada. Los signos resultantes se indican en rojo.

FIGURA 2



Las soluciones de $(x + 1)(2x - 3) < 0$ son los valores de x para los cuales el producto de los factores es *negativo*; es decir, donde el signo resultante es negativo. Esto corresponde al intervalo abierto $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$.

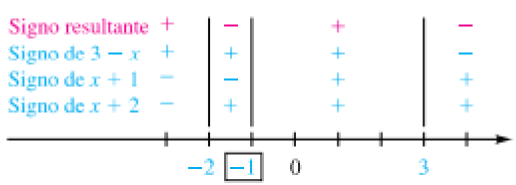
El siguiente ejemplo sirve para ilustrar como el análisis se tiene que hacer de manera individual para cada elemento, pero tomando en cuenta a los demás. Observa como ninguno de los factores del denominador pueden ser cero, pues la división resultaría en indeterminación.

EJEMPLO 3 **Uso de un diagrama de signos para resolver una desigualdad**

Resuelva la desigualdad $\dfrac{(x + 2)(3 - x)}{(x + 1)(x^2 + 1)} \leq 0.$

SOLUCIÓN Como 0 ya está en el lado derecho de la desigualdad y el lado izquierdo está factorizado, podemos ir directamente al diagrama de signos de la figura 4, donde las líneas verticales indican los ceros (-2, -1 y 3) de los factores

FIGURA 4



El cuadro alrededor de -1 indica que -1 hace que un factor del denominador de la desigualdad original sea igual a 0. Como el factor cuadrático $x^2 + 1$ es siempre positivo, no tiene efecto en el signo del cociente y por tanto puede omitirse del diagrama.

Los diversos signos de los factores se pueden hallar usando valores de prueba. Alternativamente, sólo necesitamos recordar que cuando x aumenta, el signo de un factor lineal $ax + b$ cambia de negativo a positivo si el coeficiente a de x es positivo, y el signo cambia de positivo a negativo si a es negativo.

Para determinar dónde es que el cociente es menor o igual a 0, primero vemos del diagrama de signos que es *negativo* para números en $(-2, -1) \cup (3, \infty)$. Como el cociente es 0 en $x = -2$ y $x = 3$, los números -2 y 3 también son soluciones y deben estar *incluidos* en nuestra solución. Por último, el cociente es *indefinido* en $x = -1$, de modo que -1 debe ser *excluido* de nuestra solución. Así, las soluciones de la desigualdad original están dadas por

$$[-2, -1) \cup [3, \infty).$$

>Ejercicios talachudos: Sección 2.7 (p. 15), resolver los múltiplos de 3 del 1 al 42.

En las secciones posteriores veremos algunas de las desigualdades básicas que nos pueden ayudar a resolver problemas de la OMM.

IMPORTANTE: NO CONTINÚES HASTA QUE TE SIENTAS BIEN RESOLVIENDO Y MANIPULANDO DESIGUALDADES. SI AÚN TIENES DUDAS, CONTACTA A TU ASESOR(A).

5. Suma de cuadrados

Esta desigualdad se basa en que $x^2 \geq 0$. De esta manera, si tenemos que una expresión está formada por puros miembros que son cuadrados, podemos garantizar que será mayor o igual que cero.

Ejemplo: Demuestra que $x^2 + y^2 \geq 2xy$ para cualesquiera $x. y \in \mathbb{R}$.

Si le restamos $2xy$ a cada lado de la igualdad, tenemos que $x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$, factorizando el lado izquierdo de la desigualdad tenemos que $(x - y)^2 \geq 0$, que se cumple, por ser cuadrado. Como esta última expresión se cumple, nos podemos regresar y así demostrar que $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Observa como la igualdad se da cuando $x = y$.

Otro ejemplo: Encuentra todos los conjuntos de números reales positivos (a, p, q, r) tales que $p, q, r > 0$ y que satisfacen $4a^2 + 12a = -10 - pqr$.

Si sumamos 9 a cada lado de la igualdad, tenemos que $4a^2 + 12a + 9 = -1 - pqr$. Factorizando el lado izquierdo tenemos $4a^1 + 12a + 9 = (2a + 3)^2$. Como es un cuadrado, sabemos que $(2a + 3)^2 \geq 0$. Viendo el lado derecho de la igualdad tenemos que $0 > -1 - pqr$, puesto que $pqr > 0$ para cualquier valor válido de p, q, r. Como el lado izquierdo es siempre mayor o igual que cero, y el derecho es siempre menor, concluimos que no hay soluciones válidas.

6. Datos de vital importancia

1. La paternidad del anillo de Möbius correspondería a Johann Benedict Listing, primero en publicar un artículo respecto a tan particular cuerpo, cuyas peculiaridades son la base del famoso truco de las cintas afganas, que se remonta a 1904. https://elibro.net/es/ereader/uaa/127786?page=154
2. La cuadratura del círculo, la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la construcción de todos los polígonos regulares usando solamente regla y

compás son problemas irresolubles que datan de la antigüedad y que no se demostró que eran irresolubles hasta el S. XIX.
https://elibro.net/es/lc/uaa/titulos/37796

7. Desigualdad del triángulo

Proposición: Para dos números reales a y b siempre se tiene que

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

y la igualdad se da cuando $ab \geq 0$.

(¿Puedes imaginar por qué se llama desigualdad del triángulo?)

Demostración:

Podemos elevar ambos lados de la ecuación para obtener la desigualdad $|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$. Como ambos lados de la igualdad son positivos (tienen el valor absoluto), basta con ver que esta desigualdad se cumple para ver que se cumple lo planteado originalmente.

Desarrollamos el lado izquierdo de la desigualdad (recordemos que $|x|^2 = x^2$) y obrenemos que

$$|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = |a|^2 + 2ab + |b|^2$$

Ahora desarrollamos el lado derecho y tenemos que

$$(|a|+|b|)^2 = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = |a|^2 + 2|ab| + |b|^2$$

De manera que $|a|^2 + 2ab + |b|^2 \leq |a|^2 + 2|ab| + |b|^2 \Longrightarrow ab \leq |ab|$.

Si observamos, esta desigualdad es inmediata, y cuando $ab \geq 0$ se tiene que $ab = |ab|$, y entonces se da la igualdad.

Esta desigualdad se puede generalizar para n valores, de la siguiente manera:

$$|x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

Ejemplo: Demuestre que $\big||a|-|b|\big| \leq |a-b|$

Por la desigualdad del triángulo, tenemos que

$$|a-b+b| \leq |a-b| + |b|$$

Pero como tenemos que $|a-b+b| = |a|$, entonces

$$|a| \leq |a-b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a-b|$$

De manera similar, tenemos que

$$|b-a+a| \leq |b-a| + |a| \Rightarrow |b| \leq |b-a| + |a| \Rightarrow |b| - |a| \leq |b-a|$$

Como $|a-b| = |b-a|$, tenemos dos desigualdades:

$$|a| - |b| \leq |a-b|$$

$$|b| - |a| \leq |a-b|$$

Como la desigualdad se cumple tanto para $|a| - |b|$ como para $|b| - |a|$, podemos condensarla como $||a| - |b||$ (pues $\big||a| - |b|\big| = |a| - |b|$ si $a \geq b$ y $\big||a| - |b|\big| = |b| - |a|$ si $a < b$) para obtener $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$, que es lo que queríamos demostrar. Ejercicio adicional: ¿Cuándo se da la igualdad.

8. Desigualdad de las medias

Una media se refiere a una medida que nos ayuda a obtener un valor representativo de un conjunto de datos. La media más común es la **media aritmética**, que muy posiblemente la recuerdes bajo el nombre de *promedio*. También existe la **media cuadrática**, **la geométrica** y **la armónica**, que se definen de la siguiente manera:

Se tiene un conjunto $\{a_!, a_2, \ldots, a_n\}$ de n números reales no negativos, con $n \geq 2$:

a) **Media Armónica (MH):**

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

b) **Media Geométrica (MG):**

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

c) **Meda Aritmética (MA):**

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

d) **Media Cuadrática (MQ):**

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$

Las medias se relacionan de una forma muy bonita (y también muy útil)

$$\min(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq MH \leq MG \leq MA \leq MQ \leq \max(a_1, a_2, \ldots a_n)$$

donde $\min(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ se refiere al menor valor de conjunto y $\max(a_1, a_2, \ldots a_n)$ al mayor.

En general, para resolver la mayoría de los problemas bastará con usar las medias para dos, quizá tres valores. Por ello, en este material se muestra la demostración únicamente para dos valores, pero la desigualdad se cumple para cualquier cantidad de elementos.

Paquete de demostraciones

Nota: observa bien cómo se realiza la siguiente demostración, porque usamos un razonamiento que podría ser nuevo para ti.

a) $\mathbf{min}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \leq \frac{\mathbf{2}}{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{b}}}$ **(mínimo, MH)**

Sin pérdida de generalidad, digamos que $a \leq b$, entonces $a \leq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$. Multiplicamos por $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ y obtenemos que $a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \leq 2$ (observa que como a,b son no negativos, no tenemos que voltear el signo). Entonces $\frac{a}{a}+\frac{a}{b} \leq 2 \Leftrightarrow 1+\frac{a}{b} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} \leq 1$. Como esto último es cierto (recuerda que $a \leq b$), concluimos que la desigualdad inicial se cumple.

Fíjate que utilizamos el símbolo (⇔) para expresar el paso de una proposición a la siguiente. Este símbolo se lee como "si y solo si"[6], y establece que podemos pasar de la primera proposición a la segunda, así como de la segunda a la primera. Esto es, que la relación es bidireccional (en ambos sentidos). Esta es una cualidad intrínseca de algunas proposiciones, por lo que no saplica para todas. Veamos un par de ejemplos:

- **Ejemplo de si y solo si**
  El teorema de Pitágoras establece una relación bidireccional. Sabemos que si tenemos un triángulo rectángulo, la suma del cuadrado de sus catetos es igual a la suma del cuadrado de su hipotenusa (que de hecho es la formulación más clásica del teorema de Pitágoras). Pero también sabemos que el contrario es cierto, es decir, si la suma del cuadrado de dos lados del triángulo es igual al cuadrado del otro lado, entonces es rectángulo. De esta manera, el teorema de Pitágora también podría expresarse como "Un triángulo es rectángulo si y solo si la suma del cuadrado de dos de sus lados es igual al cuadrado del otro".
- **Ejemplo de relación unidireccional**
  Sabemos que en un triángulo equilatero se cumple que su altura concide con su bisectriz (si no sabes por qué, trata de demostrarlo). Sin embargo, si tenemos un triángulo cuya altura coincide con su bisectriz, no necesariamente significa que es equilátero, pues podría ser isósceles. Entonces en este ejemplo aunque la relación es cierta en uno de los sentidos, en el opuesto no lo es.

Observa como todas las transformaciones que realizamos son válidas tanto de ida como de vuelta (si yo empiezo en $1+\frac{a}{b} \leq 2$ puedo llegar a $\frac{a}{b} \leq 1$ resando 1 a ambos

[6] Nota: cuando en una demostración te piden que demuestres que A si y solo si B, hay que aplicar esta idea: tratar de llegar a B suponiendo que A es cierto, y luego tratar de llegar a A suponiendo que B es cierto.

lados de la desigualdad, y partiendo de $\frac{a}{b} \leq 1$ puedo llegar a $1 + \frac{a}{b} \leq 2$ sumando 1 a cada lado de la igualdad), y por esa razón es que puedo empezar en lo que quiero demostrar, llegar a algo que es cierto y luego decir que como llegué a algo que es cierto, entonces la proposición inicial es cierta. Sin embargo, esto no se puede hacer si alguna de esas relaciones no es del tipo si y solo si, por lo que hay que tener mucho cuidado de no cometer una falacia en nuestra demostración.

Si esto te parece un poco confuso, algo que te puede ayudar a evitar estos errores es resolver el problema “tras bambalinas”. A lo que me refiero con eso es que antes de escribir la solución oficial, resuelvas el problema partiendo de lo que quieres demostrar, y una vez que llegues algo que es cierto, escribas el regreso en la solución que vas a entregar. Si al momento de escribirla hay un paso que no puedes hacer, entonces sabes que una de las relaciones estaba mal planteada. Por ejemplo, la demostración anterior usando esta “técnica” quedaría de la siguiente manera.

> Sin pérdida de generalidad, digamos que $a \leq b$, por lo que queremos demostrar es que $a \leq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$. Dividimos entre b cada lado de la igualdad y obtenemos que $\frac{a}{b} \leq 1$. Sumamos uno a cada lado de la igualdad para obtener $1 + \frac{a}{b} \leq 2$. Escribimos la parte izquierda de la igualdad como $1 + \frac{a}{b} = \frac{a}{a} + \frac{a}{b} = a\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$, y al ponerlo en la desigualdad queda $a\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \leq 2$. Dividendo ambos lados entre $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ y obtenemos $a \leq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, que es lo que queríamos demostrar.

Aunque es cierto que hay muchos pasos que parece que te los sacaste de debajo de la manga, la demostración es matemáticamente correcta. Puedes adoptar la técnica que más te acomode. Observa cómo se aplica esto en las siguientes demostraciones.

b) $\boldsymbol{\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}}$ **(MH,MG)**

Aplicaremos una serie de pasos algebraicos, como se muesta:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow 2 \leq \sqrt{ab}\left(\frac{a+b}{ab}\right) \Leftrightarrow 2 \leq \frac{a+b}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow 4 \leq \frac{(a+b)^2}{ab}$$
$$\Leftrightarrow 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 \Leftrightarrow 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 \Leftrightarrow 0 \leq (a-b)^2$$

Como llegamos a algo que es cierto (ver las desigualdades con cuadrados), nos podemos regresar y concluir que la desigualdad inicial es cierta.

c) $\boldsymbol{\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}}$ **(MG,MA) MUY ÚTIL**

Nuevamente aplicaremos álgebra para ver si podemos llegar a algo útil o conocido.

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \Leftrightarrow 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 \Leftrightarrow 0 \leq a^2 - 2ab + b^2$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq (a-b)^2$$

Como llegamos a algo que es cierto (ver las desigualdades con cuadrados), nos podemos regresar y concluir que la desigualdad inicial es cierta. Esta desigualdad es sumamente útil, para que no la olvides.

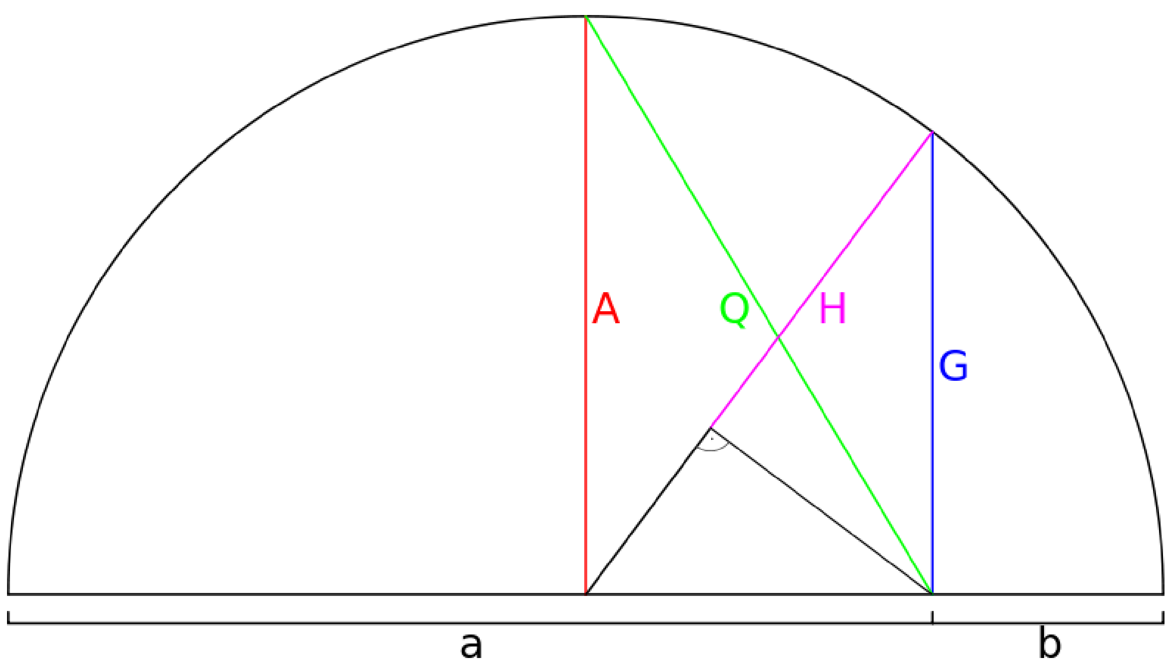
d) $\boldsymbol{\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}$ **(MA,MQ)**

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2 \Leftrightarrow 0$$
$$\leq 2a^2 - a^2 - 2ab + 2b^2 - b^2 \Leftrightarrow 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 \Leftrightarrow 0$$
$$\leq (a-b)^2$$

e) $\boldsymbol{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \max(a,b)}$ **(MQ,máximo)**

Demuestrala tú como ejercicio.

Estas desigualdades también tienen una **demostración geométrica**. ¿Se te ocurre cómo? Observa esta figura para ver si se te ocurre. Recuerda que Q es cuadrática, A es artimética, G es geométrica y H es armónica.



Si ya tienes una idea y quieres comprobar tu solución, o si ya te atoraste, te recomiendo que veas este vídeo. Está en inglés, pero puedes activar los subtítulo en español que con mucho cariño escribí para todos ustedes (si encuentras un error me avisas, por favor).

Veamos ahora un ejemplo de aplicación.

Ejemplo: Demuestra que

$$\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\cdots+\frac{n}{n-1}\geq n\sqrt[n]{n}$$

Para resolverlo comenzamos dividiendo por n ambos miembros de la desigualdad

$$\frac{\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\cdots+\frac{n}{n-1}}{n}\geq \sqrt[n]{n}$$

Por la desigualdad entre la media aritmética y geométrica de los números $\frac{2}{1},\frac{3}{2},\ldots,\frac{n}{n-1}$ tenemos que

$$\frac{\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\cdots+\frac{n}{n-1}}{n}\geq \sqrt[n]{\frac{2}{1}*\frac{3}{2}*\ldots*\frac{n}{n-1}}$$

Si recordaras el taller de telescópicas, el lado derecho de la desigualdad colapsa y queda como $\sqrt[n]{n}$, de manera que la desigualdad completa es

$$\frac{\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\cdots+\frac{n}{n-1}}{n}\geq \sqrt[n]{n}$$

Que es lo que queríamos demostrar.

9. La desigualdad útil

La desigualdad útil es la siguiente:

Para $a,b,x,y\in\mathbb{R},\ x,y\neq 0$

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}$$

Nos saltaremos la demostración de esta desigualdad, puesto que ya tienes suficientes herramientas para demostrarla. No puedes pasar de aquí si no la demuestras ☺

Ejemplo: Muestre que $\frac{x+y}{xy}\geq\frac{4}{x+y}$

Si manipulamos el primer término obtenenmos $\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, por lo que la desigualdad queda como $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$. De aquí podemos aplicar la útil directamente: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{(1+1)^2}{x+y}$

El problema 12 se resuleve usando esta desigualdad, para que lo tomes en cuenta cuando lo intentes.

10. Problemas

1. Muestre que si $a \geq b$ y $x \geq y$, entonces $ax + by \geq ay + bx$
2. Sean a, b números reales con $1 \leq a \leq b \leq 1$, muestre que
    a. $0 \leq \frac{b-a}{1-ab} \leq 1$
    b. $0 \leq \frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} \leq 1$
    c. $0 \leq ab^2 - ba^2 \leq \frac{1}{4}$
3. Muestre que si x es real positivo $x \leq \sqrt{2}$ si y solo si $\sqrt{2} \leq 1 + \frac{1}{1+x}$. Followup: Muestre que si n, m son números enteros positivos, entonces $\frac{m}{n} \leq \sqrt{2}$ si y sólo si $\sqrt{2} \ \leq \frac{m+2n}{m+n}$.
4. (IMO 1960) Encuentra para qué valores de x se cumple la desigualdad
$$\frac{4x^2}{\left(1 - \sqrt{1+2x}\right)^2} < 2x + 9$$
5. Muestra que para cualquier número positivo *x* se tiene que $x + \frac{1}{x} \geq 2$
6. Encuentra, si existen, dos números cuya suma sea *n* y
    a. Su producto sea máximo
    b. Su producto sea mínimo
7. Si $x, y > 0$, entonces $\sqrt{\frac{x^2}{y}} + \sqrt{\frac{y^2}{x}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$
8. Demuestra que, para $x, y, z \in \mathbb{R}^+$:
    a. $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$
    b. $xy + yz + zx \geq x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy}$
    c. $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z$
9. Encuentra todos los valores reales de x tales que

$$\cosh x - \sinh x + 2\sinh x \cosh x \leq \sinh^2 x + \cosh^2 x$$

(Nota: $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ y $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$, donde $e \approx 2.7183$, y se le conoce como número de Euler[7])

10. Demuestra que sí $a, b, c > 0$, entonces

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq 9a^2b^2c^2$$

11. Para número reales a, b, c muestre que

$$|a| + |b| + |c| - |a + b| - |b + c| - |c + a| + |a + b + c| \geq 0$$

12. Demestra que $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a + b + c)^3$

13. (AoPS) Una jugadora de tenis calcula su porcentaje de juego dividiendo el número de partidos que ha ganado entre el total de partidos que ha jugado. Al inicio del fin de semana, su porcentaje de juego es de exactamente 0.500. Ese fin de semana jugó 4 partidos, ganando 3 y perdiendo 1. Al final de ese fin de semana, su porcentaje de juego fue mayor a 0.503. ¿Cuál es la mayor cantidad de partidos que pudo haber ganado antes de que el fin de semana comenzara?

11. Anexo

1. Capítulo 2 del libro "Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica", de Sowokowski y Cole.

https://drive.google.com/file/d/1Ln-gimmEEiTNCUSlvWp6QRPGS9hSlkNy/view?usp=sharing

2. Desigualdades, de los materiales de entrenamiento de la OMMBC.

http://ommbc.org/sitio/Material/Algebra/A1_Desigualdades.pdf

[7] Para mayor exactitud, e = http://www.vaxasoftware.com/doc_edu/mat/nume15000.pdf