Desigualdades

José H. Nieto (jhnieto@yahoo.com)

1. Introducción

Las desigualdades juegan un rol fundamental en matemática. Existen libros completos dedicados a su estudio, y en las competencias internacionales de problemas aparecen con frecuencia. Todo solucionista experto debe estar familiarizado con varias de ellas y con las técnicas generales para su manejo.

En lo que sigue se supone que el lector domina las propiedades básicas de las desigualdades entre números reales.

La desigualdad fundamental satisfecha por cualquier número real, y de la cual en cierto sentido se derivan todas las demás, es sencillamente

$$x^2 \geq 0,$$

con igualdad si y sólo si $x = 0$. Más en general

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + \geq 0,$$

con igualdad si y sólo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

2. Algunos ejemplos sencillos

Si x e y son reales no negativos entonces $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$, de donde se deduce que $x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$ o bien

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy},$$

con igualdad si y sólo si $x = y$.

La desigualdad anterior establece que la *media aritmética* $A = (x+y)/2$ de dos reales no negativos x, y es mayor o igual que su *media geométrica* $G = \sqrt{xy}$. Otras medias importantes son la *media armónica* $H = 2xy/(x+y)$ y la *media cuadrática* $C = \sqrt{(x^2+y^2)/2}$. Es fácil ver que $C \geq A \geq G \geq H$

y que una cualquiera de las igualdades (y por lo tanto todas) se da si y sólo si $x = y$.

Como segundo ejemplo consideremos la desigualdad

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0,$$

la cual obviamente se cumple para reales cualesquiera x, y, z con igualdad si y sólo si $x = y = z$. De esta desigualdad se deduce que

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx,$$

con igualdad si y sólo si $x = y = z$. Veamos una aplicación.

Ejemplo 1. Si se sabe que la ecuación $x^3 + mx^2 + x + n = 0$ tiene raíces reales positivas cuyos cuadrados suman 1, ¿cuánto valen m, n y las raíces?

Solución. Si las raíces son α, β y γ, entonces $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1$ y $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = 1$ (Vieta), entonces por la desigualdad anterior $\alpha = \beta = \gamma$. Entonces $3\alpha^2 = 1$ de donde $\alpha = \sqrt{3}/3$, $m = -3\alpha = -\sqrt{3}$ y $n = -\alpha^3 = -\sqrt{3}/9$. □

Y ahora un ejemplo olímpico:

Ejemplo 2 (IMO 1961)**.**
Sean a, b y c los lados de un triángulo y Δ su área. Probar que

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\Delta.$$

Solución. Para este problema hay numerosas soluciones, pero veamos que se puede resolver con los recursos más elementales. Si el triángulo fuese equilátero entonces su altura sería $a\sqrt{3}/2$ y su área $a^2\sqrt{3}/4$, por lo tanto se cumpliría la igualdad. Para un triángulo cualquiera supongamos que a sea el lado mayor y sea P el pie de la altura trazada desde el vértice A. Sea $x = BP - a/2$ (por lo tanto $BP = a/2 + x$ y $PC = a/2 - x$). Sea $y = h_a - a\sqrt{3}/2$ (de donde $h_a = y + a\sqrt{3}/2$). La idea para introducir x e y es que estas cantidades representan la desviación del triángulo respecto a uno equilátero. Entonces, por el Teorema de Pitágoras aplicado a los triángulos ABP y APC se tiene

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 + c^2 - 4\Delta\sqrt{3} &= a^2 + (\frac{a}{2} + x)^2 + (\frac{a}{2} - x)^2 + 2h_a^2 - 2a\sqrt{3}h_a \\
&= \frac{3}{2}a^2 + 2x^2 + 2h_a(h_a - a\sqrt{3}) \\
&= \frac{3}{2}a^2 + 2x^2 + 2(a\sqrt{3}/2 + y)(-a\sqrt{3}/2 + y) \\
&= \frac{3}{2}a^2 + 2x^2 + 2y^2 - \frac{3}{2}a^2 = 2(x^2 + y^2) \geq 0.
\end{aligned}$$

Esto prueba la desigualdad y de paso muestra que hay igualdad si y sólo si $x = y = 0$, lo que equivale a que el triángulo sea equilátero. □

3. Algunas desigualdades importantes

Una desigualdad muy básica cuando se trabaja con números positivos y negativos es la llamada *desigualdad triangular*:

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

La igualdad se da si y sólo si todos los x_i no nulos son del mismo signo.

La desigualdad entre las medias aritmética, geométrica, armónica y cuadrática se puede generalizar para n términos. Comencemos por las dos primeras.

3.1. Desigualdad Aritmético-Geométrica (AG)

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales no negativos entonces

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

y la igualdad se da solamente si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Existen muchas demostraciones de esta importante desigualdad. Una de las más elegantes es la siguiente:

Sea A la media aritmética y G la media geométrica de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Es claro que si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ entonces $A = G$. De lo contrario deben existir x_i, x_j tales que $x_i < A < x_j$. Si sustituímos x_j por A y x_i por $x_i + x_j - A$ es claro que la media aritmética no cambia. En cambio la media geométrica aumenta estrictamente ya que $A(x_i + x_j - A) - x_i x_j = (A - x_i)(x_j - A) > 0$. Repitiendo este proceso suficientes veces llegaremos a un conjunto de n números iguales, cuya media aritmética A será igual a su media geométrica. y ésta estrictamente mayor que G.

Las siguientes desigualdades, en las cuales x_1, x_2,…,x_n son reales positivos, son equivalentes a AG:

$$\begin{aligned} x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n &\geq n x_1 x_2 \cdots x_n, \\ \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} &\geq 1, \\ \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} &\leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}. \end{aligned}$$

Observe que la última es la desigualdad $H \leq G$ entre las medias armónica y aritmética.

Ejemplo 3 (IMO 1964).
Sean a, b y c los lados de un triángulo. Pruebe que

$$a^2(-a+b+c)+b^2(a-b+c)+c^2(a+b-c) \leq 3abc. \tag{1}$$

Solución. Puesto que

$$\begin{aligned}(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) &= (-a+b+c)(a^2-(b-c)^2)\\ &= a^2(-a+b+c)+a(b-c)^2-(b^2-c^2)(b-c))\\ &= a^2(-a+b+c)+b^2(a-b+c)+c^2(a+b-c)-2abc\end{aligned}$$

la desigualdad propuesta es equivalente a

$$(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \leq abc. \tag{2}$$

Pero como los tres factores del miembro izquierdo son positivos (por la desigualdad triangular), aplicando AG se tiene:

$$(-a+b+c)(a-b+c) \leq \left(\frac{-a+b+c+a-b+c}{2}\right)^2 = c^2,$$

y análogamente

$$\begin{aligned}(a-b+c)(a+b-c) &\leq a^2,\\ (-a+b-c)(a+b-c) &\leq b^2.\end{aligned}$$

Multiplicando estas tres desigualdades y extrayendo la raíz cuadrada queda probada 2. La igualdad se da si y sólo si

$$-a+b+c = a-b+c = a+b-c,$$

lo que equivale a $a=b=c$.

Es interesante señalar que en realidad 1 y 2 valen para reales no negativos cualesquiera. En efecto, si dos de los factores del miembro izquierdo de 2 fuesen negativos, sumándolos se llega a que a, b o c es negativo, lo cual es absurdo. por lo tanto a lo sumo uno de los tres factores puede ser negativo. Acabamos de probar que si ninguno de los tres factores es negativo, la desigualdad es cierta. Pero si uno es negativo y los otros dos no negativos, el miembro izquierdo es no positivo y el derecho no negativo, por lo cual también se cumple la desigualdad. $\square$

Ejemplo 4.
Probar que en cualquier triángulo $R \geq 2r$.

Solución. Si Δ es el área del triángulo entonces

$$\Delta^2 = \frac{1}{16}(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = (pr)^2 = \frac{1}{4}(a+b+c)^2r^2.$$

Esta desigualdad es también un corolario del Teorema de Euler según el cual $OI^2 = R^2 - 2Rr$. □

Otra desigualdad importante es la siguiente:

3.2. Desigualdad de Cauchy-Schwarz (CS)

Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ son números reales cualesquiera entonces

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

y la igualdad se da si y sólo si los a_i y los b_i son proporcionales.

Esta desigualdad puede probarse partiendo de

$$(a_1 - tb_1)^2 + (a_2 - tb_2)^2 + \cdots + (a_n - tb_n)^2 \geq 0$$

de donde

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) + t^2(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq 2t(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)$$

Si los b_i son todos nulos es claro que se cumple la igualdad. En caso contrario tomamos

$$t = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}$$

y se llega fácilmente a la desigualdad deseada. Obviamente la igualdad se dará solamente si $a_i = tb_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Una consecuencia inmediata de la desigualdad CS es la siguiente: tomemos $b_i = 1$ para $i = 1, \ldots, n$. Entonces por CS se tiene

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)$$

Dividiendo entre n^2 y extrayendo la raíz cuadrada resulta

$$\frac{|a_1 + a_2 + \cdots + a_n|}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$

Esta desigualdad nos dice que *la media aritmética es menor o igual que la media cuadrática.* La igualdad se da si y sólo si los a_i son todos iguales y no negativos.

Ejemplo 5 (IMO 1995). Sean a, b, c reales positivos con $abc = 1$. Probar que:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Solución. No se desanime si sus primeros intentos resultan infructuosos. A decir verdad este problema es capaz de resistir durante varias horas los asaltos de un matemático experimentado. La aplicación directa de la desigualdad AG no conduce a nada, por ejemplo

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$$

y ahora parece que estamos cerca, ya que $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$. Pero no, de esto solamente se sigue que

$$\frac{9}{2(a+b+c)} \leq \frac{3}{2}$$

y no podemos continuar la cadena de desigualdades que habíamos iniciado. Luego de varios intentos fallidos similares nos convencemos de que AG por sí sola no nos conducirá a la solución. Por otra parte la segunda desigualdad importante que hemos visto, la CS, no parece que se pueda aplicar en este problema. Si interpretamos el miembro izquierdo como una suma de productos obtendríamos uns desigualdad de tipo contrario al deseado (además de unas indeseables raíces cuadradas). Interpretarlo como una suma de cuadrados tampoco parece factible, en particular por los molestos cubos. Sin embargo hay una condición que no hemos utilizado, a saber que $abc = 1$. Por ejemplo:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} = \frac{1}{a^2(ab+ac)} = \frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

esto nos da la idea de transformar la desigualdad original mediante el cambio de variables $x = 1/a$, $y = 1/b$, $z = 1/c$, para obtener

$$\frac{x^2}{y+z)} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Ahora podemos interpretar el miembro izquierdo como una suma de cuadrados, y si lo multiplicamos por $(y+z)+(z+x)+(x+y)$ se puede aplicar la DCS:

$$\left(\frac{x^2}{y+z)} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}\right)((y+z)+(z+x)+(x+y)) \geq (x+y+z)^2,$$

y finalmente

$$\frac{x^2}{y+z)}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{x+y+z}{2}\geq\frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz}=\frac{3}{2},$$

Bueno, ¡finalmente aplicamos también la desigualdad AG después de todo!

$\square$

3.3. Desigualdad del reordenamiento

Dados $2n$ números reales positivos $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ y $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ sea σ una permutación de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Entonces

$$a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1 \leq a_1b_{\sigma(1)}+a_2b_{\sigma(2)}+\cdots+a_nb_{\sigma(n)} \leq a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

Esta desigualdad tiene una interpretación física: si se tiene una barra OP y se coloca un peso a_i a distancia $b_{\sigma(i)}$ del extremo O, entonces $a_1b_{\sigma(1)} + a_2b_{\sigma(2)} + \cdots + a_nb_{\sigma(n)}$ es el momento resultante respecto al punto O. La desigualdad dice que el momento es máximo cuando los pesos mayores se colocan más lejos y los menores más cerca de O, y es mínimo cuando se procede a la inversa.

Esta desigualdad es fácil de probar, para ello pongamos $c_k = b_{\sigma(k)}$ para $k = 1, 2, \ldots, n$, sea $i < j$ y consideremos las sumas

$$\begin{aligned} S &= a_1c_1 + \cdots + a_ic_i + \cdots + a_jc_j + \cdots + a_nc_n \\ S' &= a_1c_1 + \cdots + a_ic_j + \cdots + a_jc_i + \cdots + a_nc_n, \end{aligned}$$

que difieren solamente en que se han transpuesto c_i con c_j. Entonces

$$S' - S = a_ic_j + a_jc_i - a_ic_i - a_jc_j = (a_j - a_i)(c_i - c_j)$$

y se ve que si $c_i > c_j$ entonces $S' \geq S$, mientras que si $c_i < c_j$ entonces $S' \leq S$. De aquí se sigue que el valor máximo de la suma se obtiene cuando $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n$ y el mínimo cuando $c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_n$.

De esta desigualdad se pueden deducir fácilmente muchas otras, en particular AG y CS. Veamos como ejemplo la siguiente:

3.4. Desigualdad de Chebyshev

Sean $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ y $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ dos sucesiones de números reales, entonces

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\,\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n} \leq \frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n}.$$

Demostración. Por la desigualdad del reordenamiento se tiene

$$\begin{array}{rcl}
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n & = & a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \\
a_1b_2 + a_2b_3 + \cdots + a_nb_1 & \leq & a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \\
a_1b_3 + a_2b_4 + \cdots + a_nb_2 & \leq & a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_1b_n + a_2b_1 + \cdots + a_nb_{n-1} & \leq & a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n
\end{array}$$

y sumando resulta

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \leq n(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n),$$

de donde dividiendo entre n^2 resulta la desigualdad de Chebyshev. □

El mismo argumento sirve para probar la siguiente variante de la desigualdad!de Chebyshev:

Si $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ y $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ son dos sucesiones de números reales, entonces

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\,\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \geq \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n}.$$

4. Funciones convexas y Desigualdad de Jensen

Una función $f : D \to \mathbb{R}$ (donde D es $\mathbb{R}$ o un intervalo de números reales) se dice que es *convexa* si para cualquier par de puntos $x, y \in [a, b]$ y cualquier real t tal que $0 < t < 1$ se cumple

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Si la desigualdad es estricta se dice que la función es estrictamente convexa. Geométricamente la convexidad significa que en cada intervalo $[x, y] \subset D$ la gráfica de f queda por debajo del segmento que va de $(x, f(x))$ a $(y, f(y))$.

Algunas funciones convexas importantes son:

- $f(x) = x^n$ con n natural par, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = |x|^a$ donde $a > 1$ es una constante, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = e^{kx}$ donde k es una constante real, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = x^a$ donde $a > 1$, para $x > 0$.

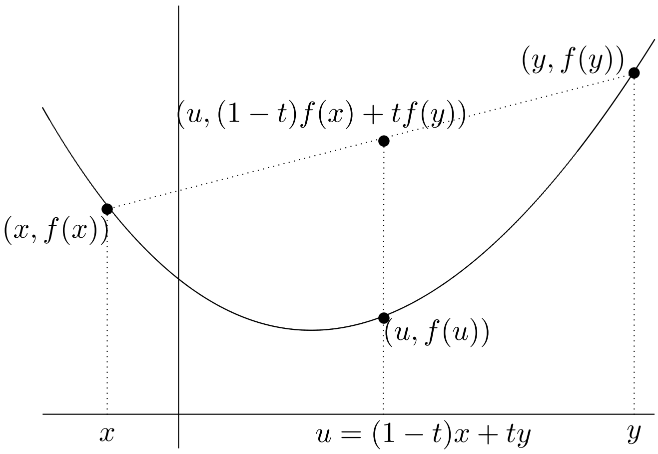

Figura 1: Función convexa

- $f(x) = \log_a x$ con base $0 < a < 1$, para $x > 0$.
- $f(x) = x \log_a x$ con base $a > 1$, para $x > 0$.
- $f(x) = \tan x$, para $0 \leq x < \pi/2$.

Algunas funciones cóncavas importantes son:

- $f(x) = x^a$ con $0 < a < 1$, para $x > 0$.
- $f(x) = \log_a x$ con base $a > 1$, para $x > 0$.
- $f(x) = \arctan x$, para $x > 0$.

Para los que conozcan el cálculo diferencial, si f es una función derivable entonces f es convexa en D si y sólo si su derivada f' es creciente en D. Si f es derivable dos veces entonces f es convexa en D si y sólo si su derivada segunda f'' es no negativa en D.

Una función f es *cóncava* si $-f$ es convexa.

La desigualdad de Jensen afirma lo siguiente:
Si f es una función convexa en D, x_1, x_2,…,$x_n \in D$, r_1,r_2,…,r_n son reales positivos y $r_1 + r_2 + \cdots + r_n = 1$, entonces

$$f(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} r_i f(x_i).$$

Si f es estrictamente convexa entonces la desigualdad anterior es estricta. Para funciones cóncavas se invierte el sentido de la desigualdad.

La desigualdad de Jensen se prueba fácilmente por inducción en n. Para $n = 2$ es la propia definición de convexidad. Si $n > 2$ y suponemos que es cierta para $n-1$, entonces

$$\begin{aligned} f(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i) &= f((1-r_n)\sum_{i=1}^{n-1} \frac{r_i}{1-r_n} x_i + r_n x_n) \\ &\leq (1-r_n) f(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{r_i}{1-r_n} x_i) + r_n f(x_n) \\ &\leq (1-r_n)\sum_{i=1}^{n-1} \frac{r_i}{1-r_n} f(x_i) + r_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} r_i f(x_i). \end{aligned}$$

La desigualdad entre la media aritmética y la media cuadrática, probada más arriba, se obtiene de inmediato aplicando la desigualdad de Jensen con $r_i = 1/n$ y $f(x) = x^2$. Más en general si $b > a > 0$, usando la convexidad de $f(x) = x^{b/a}$ resulta que

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^a\right)^{b/a} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i^a)^{b/a}$$

o sea

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^a\right)^{1/a} \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^b\right)^{1/b}.$$

Esta desigualdad puede interpretarse así: si $a < b$ entonces la media de orden a de n reales positivos es menor o igual que la media de orden b.

Si a_1, a_2,...,a_n son números reales no negativos tales que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ y x_1, x_2,...,x_n son números reales positivos, se define la *media aritmética pesada* de los x_i con pesos a_i como $A = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$. Análogamente se define la *media geométrica pesada* como $G = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ y la *media armónica pesada* como

$$H = \frac{1}{\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \cdots + \frac{a_n}{x_n}}.$$

Entonces la desigualdad aritmético-geométrica-armónica con pesos afirma que $A \geq G \geq H$. La parte $A \geq G$ se puede probar aplicando la desigualdad de Jensen a la función cóncava $f(x) = \log(x)$:

$$\log(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) \geq a_1 \log(x_1) + a_2 \log(x_2) + \cdots + a_n \log(x_n),$$

y tomando la exponencial de ambos miembros queda

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} \leq a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n.$$

La parte $G \geq H$ se obtiene aplicando la desigualdad $A \geq G$ a los recíprocos de los x_i.

Si $a, b, p, q > 0$ y $\frac{1}{p}\frac{1}{q} = 1$ entonces la *desigualdad de Young* afirma que

$$ab \leq \frac{a^p}{p}\frac{b^q}{q}.$$

La prueba consiste en aplicar la desigualdad de Jensen a la función cóncava $f(x) = \log x$:

$$\log(ab) = \frac{log(a^p)}{p} + \frac{\log(b^q)}{q} \leq \log(\frac{a^p}{p}\frac{b^q}{q}),$$

y aplicando la exponencial se completa la demostración.

A partir de esta desigualdad es fácil establecer las desigualdades de Hölder y Minkowski (ver Problemas).

5. Problemas propuestos

Problema 1. *[Desigualdad de Hölder]*
Si x_1, $x_2, \ldots$, x_n, y_1, $y_2, \ldots$, y_n son reales cualesquiera y $p, q > 0$ son tales que $1/p + 1/q = 1$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Problema 2. *[Desigualdad de Minkowski]*
Si x_1, $x_2, \ldots$, x_n, y_1, $y_2, \ldots$, y_n son reales cualesquiera y $p \geq 1$ entonces

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Problema 3.
Sean a, b, c reales positivos. Pruebe que

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1 + \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$

Problema 4. *[OIM 1985]*
Halle las raíces r_1, r_2, r_3 y r_4 de la ecuación:

$$4x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + 5 = 0$$

sabiendo que son reales, positivas y que

$$\frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{4} + \frac{r_3}{5} + \frac{r_4}{8} = 1.$$

Problema 5 (OMCC 2003)**.**
Sean a, b enteros positivos, con $a > 1$ y $b > 2$. Demostrar que $a^b+1 \geq b(a+1)$ y determinar cuándo se tiene la igualdad.

Problema 6. *[Olimpiada Asia Pacífico (APMO) 1996]*
Sean a, b y c los lados de un triángulo. Pruebe que

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

y determine cuándo se da la igualdad.

Problema 7. *[Olimpiada Matemática del Canada 1995]*
Sean a, b y c reales positivos. Pruebe que

$$a^a b^b c^c \leq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$$

Problema 8. *[IMO 2005]*
Sean x, y, z números reales positivos tales que $xyz \geq 1$. Pruebe que

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{y^5 + z^2 + x^2} \geq 0.$$

6. Soluciones

Problema 1

Sea

$$\|x\|_p = \left(\sum |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

entonces

$$\frac{|\sum_k x_k y_k|}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} \leq \sum_k \frac{|x_k|}{\|x\|_p} \frac{|y_k|}{\|y\|_q} \leq \frac{1}{p} \sum_k \frac{|x_k|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \sum_k \frac{|y_k|^q}{\|y\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Problema 2

Para $p = 1$ se reduce a la desigualdad triangular. Si $p > 1$ sea $q = p/(p-1)$. Entonces por la desigualdad de Hölder se tiene

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k||a_k + b_k|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k + b_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

y

$$\sum_{k=0}^{n} |b_k||a_k + b_k|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=0}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k + b_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Sumando miembro a miembro, dividiendo por el factor común de ambos miembros derechos y observando que $(p-1)q = p$ resulta

$$\left(\sum_{k=0}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Problema 3

Desarrollando el miembro izquierdo y simplificando la desigualdad se reduce a

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} \geq \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}$$

Escribiendo $(a+b)/c$ como $(a+b+c)/c - 1$, y procediendo análogamente con los otros dos términos del miembro izquierdo, esta desigualdad se puede escribir como

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - 3 \geq \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}.$$

Pero aplñicando AG se tiene

$$\begin{aligned}(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) &\geq \frac{3(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}} = \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} \\ &\geq \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}} + 3.\end{aligned}$$

Problema 4

Como $r_1 r_2 r_3 r_4 = 5/4$ se sigue que

$$\frac{r_1}{2}\frac{r_2}{4}\frac{r_3}{5}\frac{r_4}{8} = \frac{1}{256}$$

y entonces
$$\frac{\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}+\frac{r_3}{5}+\frac{r_4}{8}}{4}=\frac{1}{4}=\sqrt[4]{\frac{r_1}{2}\frac{r_2}{4}\frac{r_3}{5}\frac{r_4}{8}}$$
y por darse la igualdad en la desigualdad aritmético-geoétrica debe ser
$$\frac{r_1}{2}=\frac{r_2}{4}=\frac{r_3}{5}=\frac{r_4}{8}=\frac{1}{4},$$
de donde $r_1 = 172$, $r_2 = 1$ $r_3 = 5/4$, $r_4 = 2$.

Problema 5

Se procederá por inducción sobre b. Para $b = 3$, se tiene que $a^3 + 1 = (a+1)(a^2-a+1)$. Para mostrar que esta expresión es mayor que $3(a+1)$ es suficiente demostrar que $(a^2 - a+1) \geq 3$, lo cual es cierto pues $a^2 - a + 1 > a(a-1) \geq 2$.

Ahora supóngase que la expresión es cierta para algún valor de b, es decir, se cumple que $a^b + 1 \geq b(a+1)$. Se demostrará ahora para $b+1$. Nótese que
$$a^{b+1}+1=a(a^b+1)-(a+1)+2\geq ab(a+1)-(a+1)+2,$$
donde la última desigualdad se tiene por la hipótesis de inducción. La última expresión se puede reescribir como
$$ab(a+1)-(a+1)+2=(a+1)(ab-1)+2>(ab-1)(a+1).$$
Finalmente, $ab-1 \geq 2b-1 = (b+1)+(b-2) > b+1$, lo cual es cierto. Por tanto, la desigualdad se vuelve estricta después de $b = 3$. Retomando el caso $b = 3$, se observa que $a(a-1) = 2$ únicamente cuando $a = 2$. Por tanto, se ha demostrado por inducción que la desigualdad siempre se tiene, y que la igualdad se da únicamente en el caso $a = 2$, $b = 3$.

Problema 6

Sean $p = (a+b+c)/2$, $x = p-a$, $y = p-b$, $z = p-c$ (note que $x, y, z > 0$ por la desigualdad triangular). Entonces $a = y+z$, $b = z+x$ y $c = x+y$ y la desigualdad propuesta se convierte en
$$\sqrt{2x}+\sqrt{2y}+\sqrt{2z}\leq\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}+\sqrt{x+y}.$$
Pero
$$\begin{aligned}\sqrt{2x}+\sqrt{2y}+\sqrt{2z} &= \frac{\sqrt{2x}+\sqrt{2y}}{2}+\frac{\sqrt{2y}+\sqrt{2z}}{2}+\frac{\sqrt{2z}+\sqrt{2x}}{2}\\ &\leq \sqrt{\frac{2x+2y}{2}}+\sqrt{\frac{2y+2z}{2}}\leq\sqrt{\frac{2z+2x}{2}} \qquad \text{(por AC)}\\ &= \sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}.\end{aligned}$$

Problema 7

Supongamos sin pérdida de generalidad que $a \leq b \leq c$. Entonces

$$\log a \leq \log b \leq \log c$$

y por la desigualdad de Chebyshev

$$\frac{a+b+c}{3}\,\frac{\log a+\log b+\log c}{3} \leq \frac{a\log a+b\log b+c\log c}{3}$$

de donde

$$a\log a+b\log b+c\log c \geq \frac{a+b+c}{3}(\log a+\log b+\log c),$$

y por lo tanto

$$a^a b^b c^c \leq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

Problema 8

La siguiente solución, dada por un estudiante de Moldavia, mereció un premio especial por su sencillez y belleza:

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}-\frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)}=\frac{x^2(y^2+z^2)(x^3-1)^2}{x^3(x^5+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)} \geq 0,$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{\text{cíclica}} \frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} &\geq \sum_{\text{cíclica}} \frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\sum_{\text{cíclica}}\left(x^2-\frac{1}{x}\right)\\ &\geq \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\sum_{\text{cíclica}}(x^2-yz) \geq 0.\end{aligned}$$

Nota: la palabra *cíclica* en las sumatorias significa que las variables x, y, z deben permutarse cíclicamente. Así, por ejemplo,

$$\sum_{\text{cíclica}}(x^2-yz)=(x^2-yz)+(y^2-zx)+(z^2-xy) \geq 0,$$

ya que $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$.