Desigualdades II

Tarea #3 rumbo al nacional
18-22 de septiembre de 2016
Por: Argel y Fernando

1. Tchevyshev

Sean $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ y $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ entonces

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_n + \cdots + a_n b_n}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}.$$

Ahora les toca demostrarla.

2. Jensen

¿Se acuerdan de la ecuación funcional de Jensen? Pues ahora vamos a ver la desigualdad de Jensen. Si f es convexa en un intervalo I con $x_1, x_2, \ldots x_n$ en I, se cumple que

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}(f(x_1) + \cdots + f(x_n))$$

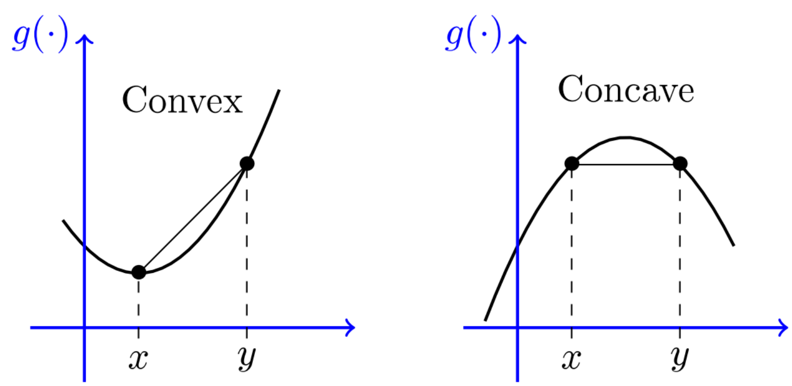
Para las funciones cóncavas se voltea la desigualdad, es decir

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \geq \frac{1}{n}(f(x_1) + \cdots + f(x_n))$$

Existe una versión generalizada de esta desigualdad. Sea f convexa en el intervalo I. Si $x_1, x_2, \cdots, x_n$ están en I y $0 < t_1, t_2, \cdots, t_n < 1$ con $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$, entonces

$$f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_n x_n) \leq t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \cdots + t_n f(x_n)$$

¿Pero exactamente que es una función convexa o cóncava en un intervalo? Se dice que una función f es convexa en un intervalo, si para toda a y b del intervalo, el segmento rectilíneo que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ se encuentra por encima de la gráfica de f, sucede lo inverso para las cóncavas. Esto se puede observar en la siguiente imagen



2.1. Criterios de convexidad

Para determinar que una función es convexa en un cierto intervalo existen diversos criterios. **Criterio 1** Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es convexa en el intervalo $I = [a, b]$, si para cada $t \in [0, 1]$ y para $a \leq x < y \leq b$, se tiene

$$f(ty + (1-t)x) \leq tf(y) + (1-t)f(x).$$

Criterio 2 Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es convexa si y sólo si el conjunto $\{(x, y)|a \leq x \leq b, f(x) \leq y\}$ es convexo.
Criterio 3 Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es convexa si y sólo si para cada $x_0 \in [a, b]$ se cumple que la función $P(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ es no-decreciente para $x \neq x_0$.
Criterio 4 Si la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es derivable con derivada no-decreciente, entonces f es convexa. Si f es dos veces derivable y $f''(x) \geq 0$ entonces la función es convexa.

2.2. Ejemplo

Si $r_1, \cdots, r_n$ son números reales mayores que 1, muestre que

$$\frac{1}{1+r_1} + \cdots + \frac{1}{1+r_n} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{r_1 \cdots r_n} + 1}$$

Consideremos la función $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$, se tiene $f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$ y $f''(x) = \frac{e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3} \geq 0$, para $x > 0$, por lo tanto la función es convexa para $\mathbb{R}^+$. Si $r_i > 1$, entonces $r_i = e^{x_i}$, empleando la desigualdad de Jensen se obtiene

$$\frac{1}{e^{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}} + 1} \leq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+e^{x_1}} + \cdots + \frac{1}{1+e^{x_n}}\right)$$

La anterior desigualdad se puede manipular para obtener

$$\frac{n}{\sqrt[n]{r_1 \cdots r_n} + 1} \leq \frac{1}{1+r_1} + \cdots + \frac{1}{1+r_n}$$

3. Muirhead

Una desigualdad para gobernarlas a todas. Una desigualdad para encontrarlas,
Una desigualdad para resolver a todos y atarlos en las tinieblas
en la tierra de Erdos-Mordel donde se extienden las sombras.

La desigualdad de Muirhead es una generalización de la desigualdad de la media aritmética contra la media geométrica. Primero presentamos el concepto de la media p, sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y $p = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$, la media p de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se define por

$$[p] = \frac{1}{n!}\sum x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n}$$

, por ejemplo

$$[2, 1, 0] = \frac{1}{3!}(x^2(y+z) + y^2(x+z) + z^2(x+y)).$$

3.1. Mayorización

Sean $p = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ y $q = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$ que cumplen las condiciones

$$p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n \ y \ q_1 \geq q_2 \geq \cdots \geq q_n$$

$$p_1 \geq q_1, \quad p_1 + p_2 \geq q_1 + q_2, \quad p_1 + p_2 + \cdots + p_n \geq q_1 + q_2 + \cdots + q_n$$

$$p_1 + p_2 + \cdots p_n = q_1 + q_2 + \cdots + q_n$$

Se dice entonces que $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ mayoriza a $(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ que se escribe como

$$(p_1, p_2, \cdots, p_n) \succ (q_1, q_2, \cdots, q_n).$$

A continuación se presenta una forma situación en la que si se llega a la mayorización y otras en las que no

$$(0, 3, 0) \succ (1, 0, 2)$$

$$(4, 0, 0, 0) \not\succ (2, 0, 2) \text{ ya que la cantidad de elementos es distinta}$$

$$(5, 0, -1) \not\succ (2, 2, 0) \text{ los términos no pueden ser negativos}$$

$$(2, 1, 1, 1) \not\succ (1, 1, 1, 1) \text{ Ya que } 2 + 1 + 1 + 1 \neq 1 + 1 + 1 + 1$$

$$(4, 1, 1, 1) \not\succ (3, 3, 1, 0) \text{ Ya que } 4 + 1 \not\geq 3 + 3$$

El teorema de muirhead $[b] \leq [a]$ para cualesquiera valores no negativos de las variables $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ si y solo si $(a) \succ (b)$.La igualdad sólo se tiene cuando (b) y (a) son idénticos o cuando todos los x_i son iguales.

3.2. Ejemplo 1

Un ejemplo sencillo del uso de Miurhead, es con una desigualdad que ya han demostrado. Para cualesquiera $a, b, c > 0$, pruebe que

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$$

$$(a + b)(b + c)(c + a) = a^2b + ac^2 + b^2c + ab^2 + bc^2 + a^2c + 2abc$$

Por lo tanto la desigualdad se puede expresar como

$$a^2b + ac^2 + b^2c + ab^2 + bc^2 + a^2c \geq 6abc$$

Esto es equivalente a demostrar

$$[2, 1, 0] \geq [1, 1, 1]$$

Por la desigualdad de Muirhead

$$[2, 1, 0] \succ [1, 1, 1]$$

Con lo anterior hemos concluido.

3.3. Ejemplo 2: con truco incluido

(IMO,1995) Para cualesquiera $a, b, c > 0$ con $abc = 1$, pruebe que

$$\frac{1}{a^3(b + c)} + \frac{1}{b^3(a + c)} + \frac{1}{c^3(a + b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Realizando el álgebra necesaria llegamos a

$$2(a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4) + 2(a^4b^3c + a^4c^3b + b^4c^3a + b^4a^3c + c^4a^3b + c^4b^3a) + 2(a^3b^3c^2 + b^3c^3a^2 + c^3a^3b^2) \geq$$

$$3(a^5b^4c^3 + a^5c^4b^3 + b^5c^4a^3 + b^5a^4c^3 + c^5a^4b^3 + c^5b^4a^3) + 6a^4b^4c^4$$

Sin embargo es posible darse cuenta que $4{+}4{+}0 = 4{+}3{+}1 = 3{+}3{+}2 = 8$ y que $5{+}4{+}3 = 4{+}4{+}4 = 12$, entonces no podemos usar Muirhead directamente, hace falta recurrir a un truco. Cuando el producto de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es 1, se tiene

$$[(p_1, p_2, \ldots, p_n)] = [(p_1 - r, p_2 - r, \ldots, p_n - r)]$$

para cualquier número real r. Ahora, haciendo $r = \frac{4}{3}$, $[(5,4,3)] = [(\frac{11}{3}, \frac{8}{3}, \frac{5}{3})]$ y $[(4,4,4)] = [(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, \frac{8}{3})]$. De lo anterior

$$(4,4,0) \succ \left(\frac{11}{3}, \frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right)$$
$$(4,3,1) \succ \left(\frac{11}{3}, \frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right)$$
$$(3,3,2) \succ \left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

De aquí se puede terminar con Muirhead

4. Normalización y homogenización de variables

A continuación les presentaremos dos técnicas que pueden ser útiles para la solución de desigualdades

4.1. Normalización

Cuando existen desigualdades homogeneas (es decir que la transformación de a, b, c a ka, kb, kc no cambia nada) podemos aplicar condiciones adicionales a la desigualdad sin pérdida de la generalidad. Algunas de las más comunes son $abc = 1$ y $a + b + c = 1$, la normalización es principalmente dependiente del problema. ¿Pero exactamente como funciona? Consideremos $abc = k^3$, sean $a = kx$, $b = ky$, $c = kz$, entonces

$$k^3xyz = k^3 \text{ de donde se obtiene } xyz = 1$$

4.2. Homogenización

Es el proceso inverso a la normalización. Cuando tenemos condiciones como $abc = 1$ podemos considerar sustituciones como $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$, $c = \frac{z}{x}$ y en el caso de $a + b + c = 1$ se puede considerar la sustitución $a = \frac{x}{x+y+z}$, $b = \frac{y}{x+y+z}$ y $c = \frac{z}{x+y+z}$.

5. Problemas

1. Sean $a_1, a_2, \dots, a_n$ números positivos con $a_1a_2\cdots a_n = 1$. Muestre que

$$a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \cdots + a_n^{n-1} \geq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}.$$

2. Sea $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomio cuadrático con coeficientes reales no negativos. Muestre que, para cualquier número positivo x,

$$P(x)P\left(\frac{1}{x}\right) \geq (P(1))^2.$$

3. Si a, b, c son reales positivos, prueba que

$$a(1-b) > \frac{1}{4}, \quad b(1-c) > \frac{1}{4}, \quad c(1-a) > \frac{1}{4}$$

no se pueden dar simultáneamente

4. Sean a, b, c reales positivos. Prueba que

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca$$

5. Si $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, muestre que

$$n(n+1)^{\frac{1}{n}} < n + H_n, \quad para \quad n \geq 2.$$

6. Si a, b, c son reales positivos, prueba que

$$abc(a+b+c) \leq a^3b + b^3c + c^3a.$$

7. Sean $a_1 \geq 1$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Demuestra que

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq \frac{2^n}{n+1}(1+a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

8. Si a, $b > 0$ y m es un entero positivo, prueba que

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^m + \left(1+\frac{b}{a}\right)^m \geq 2^{m+1}$$

9. Dado un número entero positivo n, sea $f(n)$ el promedio de todos sus divisores positivos. Por ejemplo

$$f(3) = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$f(12) = \frac{1+2+3+4+6+12}{6} = \frac{14}{3}$$

   Demuestre que

$$\sqrt{n} \leq f(n) \leq \frac{n+1}{2}$$

10. Para números reales no-negativos x, y, z, muestre que

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq xyz + \frac{3}{4}|(x-y)(y-z)(z-x)|$$

11. Sean a, b, c números reales positivos que satisfacen $a+b+c=1$. Muestra que:

$$\sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ca} + \sqrt{c+ab} \leq 2$$

12. Sean a, b, c números reales positivos tales que $abc = 1$. Muestra que

$$\frac{a^3}{a^3+2} + \frac{b^3}{b^3+2} + \frac{c^3}{c^3+2} \geq 1$$

   y que

$$\frac{1}{a^3+2} + \frac{1}{b^3+2} + \frac{1}{c^3+2} \leq 1$$

13. Sean a, b y c números reales positivos tales que $a+b+c=3$. Muestra que

$$\frac{a^2}{a+\sqrt[3]{bc}} + \frac{b^2}{b+\sqrt[3]{ca}} + \frac{c^2}{c+\sqrt[3]{ab}} \geq \frac{3}{2}$$

   y determina cuándo se alcanza la igualdad.

14. Considere dos colecciones de números $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$, $y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n$ y una permutación $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ de $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Muestre que

$$(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2 \leq (x_1-z_1)^2 + \cdots + (x_n-z_n)^2.$$

15. Sean x, y, z tres números reales no negativos tales que:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(xy + yz + xz)$$

Prueba que:

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{2xyz}$$

16. Sean a, b, c números reales tales que $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} = 1$ y $ab + bc + ca > 0$. Muestre que

$$a + b + c - \frac{abc}{ab + bc + ca} \geq 4.$$

17. Sean A, B, C los ángulos de un triángulo cumplen que

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

18. (**Desigualdad de Schur**) Si x, y, z son reales positivos y n es un entero positivo, se cumple

$$x^n(x - y)(x - z) + y^n(y - z)(y - x) + z^n(z - x)(z - y) \geq 0$$

Para el caso $n = 1$ la desigualdad puede tomar algunas formas muy interesantes, ejemplo

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x + y) + yz(y + z) + zx(x + z)$$

$$xyz \geq (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y).$$

$$Si \;\; x + y + z = 1, \;\; 9xyz + 1 \geq 4(xy + yz + zx).$$

19. (**Desigualdad de Bernoulli**) Para todo número real $x > -1$ y todo entero positivo n, se cumple

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

20. Si a, b y c son reales positivos, pruebe que

$$\frac{a}{(b + c)^2} + \frac{b}{(c + a)^2} + \frac{c}{(a + b)^2} \geq \frac{9}{4(a + b + c)}.$$

21. Sean x, y, z números reales positivos que cumplen $xyz = 1$, muestre que

$$\frac{1}{yz + z} + \frac{1}{zx + x} + \frac{1}{xy + y} \geq \frac{3}{2}.$$

22. Sean a, b, c números reales positivos que satisfacen $ab + bc + ca = abc$, muestre que

$$\frac{a^4 + b^4}{ab(a^3 + b^3)} + \frac{b^4 + c^4}{bc(b^3 + c^3)} + \frac{c^4 + a^4}{ca(c^3 + a^3)} \geq 1.$$

23. Cualesquiera tres números reales a, b y c, satisfacen que

$$a^5 + b^5 + c^5 \geq a^3bc + b^3ca + c^3ab.$$

24. Sean a, b, c reales positivos tales que $abc = 1$. Demuestra que

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1$$

25. Para cualesquiera $x, y, z > 0$ con $xyz \geq 1$, muestre que

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0$$

.

26. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $abc \leq 1$. Demuestra que

$$\frac{a}{b^2 + b} + \frac{b}{c^2 + c} + \frac{c}{a^2 + a} \geq \frac{3}{2}$$

27. Sean a, b, c reales positivos tales que $a + b + c = 1$. Prueba

$$\frac{1 + a}{1 - a} + \frac{1 + b}{1 - b} + \frac{1 + c}{1 - c} \leq 2\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right).$$

28. Sean a, b, c reales positivos. Demuestra que

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

29. Sean a, b, c reales positivos tales que $abc = 8$. Prueba que

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1 + a^3)(1 + b^3)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(1 + b^3)(1 + c^3)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(1 + c^3)(1 + a^3)}} \geq \frac{4}{3}$$