Desigualdades

Entrenamiento #8 para 4ª etapa
5-8 de agosto de 2016
Por: Fernando y Argel ft. Lulú

Resumen

Bienvenidos a uno de los temas importante de Álgebra. Esta área es famosa por requerir de "fuerza bruta" y uno que otro truquito. Tal vez el nombre los espante, pero las desigualdades son una parte del álgebra muy parecido a las ecuaciones (igualdades), pero con diferencias sutiles. Es casi lo mismo. Por la garrita. Esta lista les puede parecer un poco larga, pero como verán, tiene más ejemplos y teoría que problemas, así que no se preocupen. Si bien, hay ciertas partes de la teoría que no precisamente son enfocadas a desigualdades, pero les pueden ayudar en este tipo de problemas y en muchos otros de álgebra e inclusive de Teoría de números. Esperamos que se diviertan con este entrenamiento.

1. Una desigualdad con aderezo, por favor.

No, una desigualdad no se come con eso. Una desigualdad refleja relaciones diferentes a una igualdad ($<, >, \leq, \geq$). Es importante recordar la recta numérica ya que permite observar que para dos números a y b, sólo se cumple una de las siguientes relaciones $a = b$, $a > b$, $a < b$. La única diferencia con respecto a las ecuaciones es que no puedes multiplicar ni dividir por un número negativo... y si lo hicieras, debes GIRAR el sentido de la desigualdad. Para que quede un poco más claro: $-3 < -1$ pero si se multiplica por -1 cada lado, se tiene que $3 < 1$, lo cual no es cierto; tendría que ser $3 > 1$.

Pero puedes sumar lo mismo de ambos lados, multiplicar por el mismo positivo de ambos lados, dividir entre el mismo positivo a ambos lados, elevar a la misma potencia por ambos lados o sacar raíces. Además sólo puedes sumar o multiplicar desigualdades si todas apuntan en la misma dirección (entiéndase que si $a > b$ y $d < c$, se sabe que $a + c > b + d$). De ahí en fuera, son básicamente ecuaciones, pero un poco más interesantes.

1.1. Cómo resolverlas y blablá

1. **SOS (Sum Of Squares)** Esto se basa en la desigualdad fundamental $x^2 \geq 0$ (¿te queda claro por que esto es cierto?). Si tienen una expresión conformada solamente por cuadrados, la expresión en sí es mayor o igual a 0. Para usar esta herramienta, es necesario que sepan factorizar trinomios para obtener un binomio al cuadrado. Te mostraremos unos cuantos ejemplos aplicando esto.

   - *Demuestra que $x^2 + y^2 \geq 2xy$ para todo x y y que pertenezcan a los números reales.* Muy bien, si sumamos el término $-2xy$ a ambos miembros de la expresión, la desigualdad anterior es equivalente a $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$. Después de factorizar ese trinomio obtenemos que

     $$(x - y)^2 \geq 0$$

     pero todo cuadrado es mayor o igual a 0, entonces esta última desigualdad se cumple. De aquí es fácil ver que las desigualdades anteriores se cumplen en sucesión (como si fuera un dominó o inducción matemática) y por tanto la desigualdad inicial se cumple. Esto sucede porque todo paso que hacemos es "regresable".

     ¡ESPEREN! ¡No hemos terminado! ¿Saben qué hace falta para finalizar la demostración?... ¿no? Fíjense bien en el problema: tenemos un signo de $\geq$ el cual implica que la expresión puede ser una inecuación para la mayoría de los números, pero para algunos en específico se da la igualdad (o dicho de otra forma, la expresión $x^2 + y^2$ alcanza su valor mínimo). Entonces falta mencionar cuándo se da la igualdad. ¿Qué cuadrado es igual a 0? Al que no lo sepa se le dará un sape para "refrescar la memoria". El 0 claramente es el único cuadrado que cumple que es igual a 0 (valga la redundancia u obviedad). Entonces necesitamos que $x - y = 0$. Eso se cumple si y sólo si $x = y$. Si hacemos una sustitución directa de las variables vemos que se da la igualdad. Entonces $x^2 + y^2 \geq 2xy$ para toda x, y, con igualdad si y sólo si $x = y$.

Entonces, como nota importante: es necesario mostrar en las desigualdades con signo $\geq$ o $\leq$ cuándo se da la igualdad. Si tiene el signo de $>$ o $<$ se debe demostrar que no se puede dar la igualdad, dependiendo la herramienta que se use. Eso se mostrará en el siguiente ejemplo.

- *Encuentra todas los cuartetos de números reales* (a, p, q, r) *tales que* $p, q, r > 0$ *y que satisfacen la ecuación* $4a^2 + 12a = -10 - pqr$ ¿Muchas variables? No se preocupen. Sumemos $+9$ a ambos miembros de la ecuación y factoricemos la expresión de la izquierda. Obtenemos que

$$(2a + 3)^2 = -1 - pqr$$

pero el miembro derecho es negativo, y sabemos que $(2a+3)^2 \geq 0$ para todo número real a. Entonces la ecuación no se puede cumplir bajo las condiciones pedidas. Aquí fue un problema donde aplicamos esa desigualdad fundamental de los cuadrados.

La mayoría de esta lista son puras desigualdades, pero aún así no descarten a las desigualdades como una herramienta para otras áreas, como Teoría de Números, Combinatoria e inclusive Geometría.

2. **Usar medias (no calcetines)** Las medias son expresiones que tienen ciertas relaciones entre sí y que pueden ser muy útiles para resolver desigualdades. Si se tienen los números no negativos a_1, a_2,...,a_n, con $n \geq 2$, se tienen las siguientes expresiones que se denominan "medias".

a) Media Armónica (MH)

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

b) Media Geométrica(MG)

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}$$

c) Media Aritmética (MA)(¿Tienes algún otro nombre para esta expresión?)

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

d) Media Cuadrática (MQ)

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$

La relaciones que existen entre las medias son las siguientes

$$min(a_1, a_2, ...a_n) \leq MH \leq MG \leq MA \leq MQ \leq max(a_1, a_2, ..., a_n)$$

donde $min(a_1, a_2, ..., a_n)$ denota el menor de los números a_i y $max(a_1, a_2, ..., a_n)$ representa al mayor de los a_i. En esta lista la mayoría de los problemas que se pueden resolver con la aplicación de las desigualdades entre las medias son con $n = 2$ y $n = 3$, ¡pero no piensen que no puede haber alguno que utilice una cantidad distinta de elementos! Mostraremos un ejemplo de su aplicación. Recuerden definir correctamente quiénes serán sus números a_i y asegúrense que sean positivos. No vamos a sustituir una desigualdad en otra, eso está mal dicho. Más bien vamos a obtener desigualdades equivalentes a la que nos proponen los problemas y encargarnos de demostrar otra desigualdad mucho más sencilla. Imagínense que vamos en escalera, descendiendo gracias a las desigualdades que representan nuestros escalones, hasta llegar a conectar con el fin de la escalera.

- *Demuestra que*

$$\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+...+\frac{n}{n-1} \geq n\sqrt[n]{n}$$

Lo que haremos es dividir por n ambos miembros de la desigualdad.

$$\frac{\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+...+\frac{n}{n-1}}{n} \geq \sqrt[n]{n}$$

Usaremos la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica de los números $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, ..., $\frac{n}{n-1}$. Tenemos que

$$\frac{\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+...+\frac{n}{n-1}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot...\cdot\frac{n}{n-1}} = \sqrt[n]{\frac{n}{1}} = \sqrt[n]{n}$$

La primera igualdad se debe a que se cancelan términos y la segunda... pues es bastante obvio... n entre 1 es igual a n, y su raíz n-ésima es igual a $\sqrt[n]{n}$. Vemos que se hace una especie de "escalera" que nos dirige desde la primera suma de fracciones hasta el número con el que queríamos compararlo. Si extraemos los "escalones" del medio en la expresión anterior, nos quedamos con que

$$\frac{\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+...+\frac{n}{n-1}}{n} \geq \sqrt[n]{n},$$

que era lo que queríamos demostrar. La desigualdad original del problema se cumple porque esta última se cumple. Con esto hemos demostrado la desigualdad inicial del problema.

3. **La útil:** Vamos a mostrarles un ejemplo del uso de la desigualdad útil, con el siguiente problema "Para $x, y \in \mathbb{R}^+$, muestre que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$" La útil nos dice que

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$$

Por ende con la útil se tiene

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{(2)^2}{x+y} = \frac{4}{x+y}$$

Pongamos otro problema de ejemplo: *Demuestra que*

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2$$

Este problema nos pide a gritos que lo resolvamos con la desigualdad útil, debido a que tiene números cuadrados. ¿Y las fracciones? Les diré que todo número puede ser representado como fracción. Si posee un denominador, pues ya está representado como fracción, y si no tiene denominador, le colocamos un 1 como nuevo denominador. Si hacemos eso con los números a^2, b^2 y c^2 obtenemos una desigualdad muy parecida a la Útil. Aplicando dicha desigualdad con las fracciones que construimos tenemos que

$$\frac{a^2}{1}+\frac{b^2}{1}+\frac{c^2}{1} \geq \frac{(a+b+c)^2}{1+1+1} = \frac{1}{3}(a+b+c)^2$$

La igualdad entre las últimas dos expresiones se debe a que.. pues $1+1+1=3$... simplemente simplificamos la operación y extrajimos el denominador como un factor fraccionario. En esta cadena de relaciones, si quitamos la expresión ubicado en medio, vemos que obtenemos la desigualdad que queríamos demostrar en un principio. El resultado se sigue de esta cadena de relaciones.

Muy bien, ahora es su turno de demostrar esa desigualdad. Tienen muchas herramientas a su disposición, aunque también puede demostrarse por fuerza bruta. También les será útil utilizar a Cauchy-Schwarz (aquí en baja se le hacer referencia como Cochy-Suárez). Es también sencillo demostrar la versión general para n fracciones. Si se tienen los números reales $a_1, a_2, ..., a_n$ y los reales positivos $x_1, x_2, ..., x_n$ se cumple que

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_1^2}{x_2} + ... + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{x_1 + x_2 + ... + x_n}$$

4. **La identidad útil:** ¿Ahora hay una identidad útil? Sí, así es. Esta identidad es muy útil para atacar problemas de desigualdades y otros problemas de álgebra, como ecuaciones (claramente no son de sólo despejar x) e incluso para algunos problemas de Números. Tenemos que para los números reales a, b y c se cumple que

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

o escrito de otra forma:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)\frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$$

Esta identidad arroja un resultado aún más útil. Si $a + b + c = 0$ y/o $a = b = c$ se tiene que

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

En verdad eso es útil, y te mostraremos el poder de esta identidad con el siguiente ejemplo.

- *Factoriza* $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$. Tenemos que si $a + b + c = 0$, por nuestra identidad útil tenemos que $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. En este caso, nuestros números a, b y c son $(x - y)$, $(y - z)$, $(z - x)$, respectivamente. Es fácil ver que $(x - y) + (y - z) + (z - x) = 0$, por lo tanto, tenemos que $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 3(x - y)(y - z)(z - x)$

5. Ahora sí, **Cauchy-Schwarz**. Otra de las recomendaciones consiste en usar esta desigualdad, en la que si $a_1, a_2, ... a_n, b_1, b_2, b_n$ son números reales, entonces se cumple

$$(a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2$$

Va un ejemplo: *Demuestra que*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a + b + c)^2$$

Hay veces en que simplemente deben aplicar directamente alguna herramienta conocida para demostrar una desigualdad, pero en otras ocasiones ustedes deben hacer algún truquito o definir algunos números especiales para usarlos en su desigualdad. Para Cauchy-Scharwz necesitamos dos conjuntos de números, pero sólo se ve uno, ¿verdad? Nos referimos al grupo de números a, b y c. Pues es nuestro turno de definir el otro grupo. Tomemos los números 1, 1 y 1. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Scharwz tenemos que

$$(1^2 + 1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1)^2$$

Simplificando las operaciones de cada lado de la desigualdad obtenemos

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$$

Y al multiplicar ambos lados por $\frac{1}{3}$ se llega a

$$(a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{1}{3}(a + b + c)^2,$$

que es lo que se deseaba demostrar. ¡No se queden con esta única solución! Hay varias con distintas herramientas. Ya vieron en la sección 4 que esta misma desigualdad se podía demostrar con la desigualdad útil. Encuentren qué otras herramientas pueden demostrar la relación propuesta por el problema. Si bien, la mayoría de los problemas de esta lista no requieren Cauchy-Schwarz, deberían intentar los problemas más difíciles o los que ya resolvieron con esta herramienta para adquirir destreza y aprender cuándo es el momento más óptimo para usar esta arma.

6. **La estrategia de sustitución** En otras ocasiones será necesario cambiar la expresión que se desea demostrar, lo cual se puede lograr al realizar una sustitución estratégica, un ejemplo : "Si a, b, c son números reales positivos y menores que 1, con $a + b + c = 2$, se tiene que $(\frac{a}{1-a})(\frac{b}{1-b})(\frac{c}{1-c}) \geq 8$". Se realiza la siguiente sustitución $x = 1 - a, y = 1 - b, z = 1 - c$, de lo cual se obtiene que $x + y + z = 3 - (a + b + c)$, $a = 1 - x = y + z, b = z + x, c = x + y$. Por lo tanto la desigualdad es equivalente a

$$(\frac{y + z}{x})(\frac{z + x}{y})(\frac{x + y}{z}) \geq 8$$

Esta desigualdad ya es más sencilla de demostrar.

7. **Aplicación de las desigualdades en problemas de divisibilidad**. Recordemos una condición importante para que dos números a y b cumplan que $a|b$, la cual es que $|a| \leq |b|$. Si ambos son positivos, simplemente podemos escribir que $a \leq b$. Si esa desigualdad no se da, no importa que tan bonitos estén los primos en su descomposición canónica, simplemente no ocurrirá la divisibilidad entre esos dos números. Veamos un ejemplo de aplicación.

   Sean a y b dos enteros positivos con $a \leq b$. Si $b|4a - 3b$, demuestra que $a = b$. De la condición de divisibilidad que nos da el problema tenemos que $b \leq 4a - 3b$ pero como $b \geq a$, tenemos que $-3b \leq -3a$, por lo que $4a - 3b \leq 4a - 3a = a$. De esta manera, obtenemos que $b \leq 4a - 3b \leq a$, por lo que $b \leq a$, pero la condición inicial del problema es que $a \leq b$, de aquí es fácil ver que $a = b$.

   También recordemos que si un número entero r es múltiplo de otro número q, se tiene que $r = kq$ para algún k entero. Eso lo usaremos para nuestro siguiente ejemplo. *Sean p, q, r tres números enteros positivos que cumplen que $p > q > r$ y que $p|q + r$. Demuestra que $p = q + r$.* De la divisibilidad, tenemos que $q+r = kp$ para algún entero k. Como $p > q$ y $p > r$, al sumar estas dos desigualdades, miembro a miembro, tenemos que $2p > q + r$. Ahora procesemos en nuestra mente estos dos datos obtenidos. Teníamos que $q + r = kp$, entonces si sustituimos eso en la desigualdad anterior tenemos que

$$2p > kp.$$

   ¿Ahora pueden ver el valor de k? ¿Aún no? Dividan ambos lados de la desigualdad entre p (esto es posible porque p es positivo, pero si no lo fuera, recuerden que deberían además girar el signo de la desigualdad). Tenemos que $2 > k$. Si k es un entero positivo menor a 2, su único valor debe ser 1. De esta manera, al ser $q + r = kp$ tenemos que $q + r = p$, como se quería demostrar.

8. **Otros tips y consideraciones**
   - Las medias pueden ser muy útiles, en especial con MA(Media Aritmética) vs MG (Media Geométrica)
   - La desigualdad útil, como su nombre dice, puede ser muy útil. No necesariamente deben tener fracciones o cuadrados escritos de forma explícita en la redacción del problema. Pueden colocar denominadores iguales a 1 ó, si tienen una fracción de la forma $\frac{a}{x}$ pueden multiplicar y dividir por a y obtendrán $\frac{a^2}{ax}$ y de esta forma adaptan las expresiones de una desigualdad para utilizar la desigualdad útil.

- Para demostrar expresiones que tengan raíces o aquellas que se simplifican mejor al cuadrado, puede elevarse al cuadrado ambos lados de la desigualdad SOLAMENTE cuando ambos lados son positivos. También en los problemas de valores absolutos es buena idea elevar al cuadrado si se tienen las condiciones anteriores. Es importante que sepan la siguiente identidad $|x|^2 = x^2$.
- En algunas desigualdades es importante que definan el orden de los números reales que les presentan. Por ejemplo, si tienen una desigualdad involucrando a los números a, b, c, es buena idea definir, sin pérdida de generalidad, que $a > b > c$ y en base a eso trabajan la desigualdad que desean demostrar. Esto sin duda es muy necesario en problemas que les piden comparar una expresión con el máximo o mínimo de los reales definidos.
- Los problemas de desigualdades que involucran a expresiones de la forma

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

  no son muy comunes como los problemas que implican ecuaciones y demostración de propiedades que presentan algunos números reales definidos bajo ciertas condiciones; en ambos casos, no olviden que tienen una arma secreta: "la identidad útil".
- Aunque esta lista tenga el propósito de introducirlos a las desigualdades, aprovechamos para mencionarles otro tip valioso: la desigualdad del triángulo. Si tienen problemas desigualdades geométricas, no es mala idea usar la desigualdad del triángulo, pero OJO, no necesariamente es la única herramienta que pueden usar. Todas las desigualdades vistas en esta lista pueden servirles.
- Es buena idea usar trucos matemáticos, tales como sumar cero o multiplicar por uno.
- Es importante tener cuidado al multiplicar en alguna desigualdad por -1, ya que voltea el signo de la desigualdad (de menor a mayor y viceversa).
- ¡¡¡INTENTEN TODOS LOS PROBLEMAS!!! Quizá en algunos no tengan ni la menor idea de qué hacer, pero aún así traten de mover la desigualdad, quizá de sustituir e inclusive revisar el caso cuando se da la igualdad. En un examen no pueden, bueno, no deben dejar un problema en blanco. Entrenen como si estuvieran resolviendo un examen y extraigan toda la información posible de las desigualdades. Para los problemas que se les da una condición extra, deben utilizarla o nunca les saldrá el problema. La condición extra puede implicar una sustitución, o una manipulación de la condición misma para acercarse a la desigualdad (por ejemplo, elevar al cuadrado una igualdad que se te da), siendo a veces necesario aplicar algunas de las desigualdades ya vistas en la teoría.

2. Unos cuantos ejercicios

1. Demuestra que para $x \geq 0$, $1 + x \geq 2\sqrt{x}$
2. Demuestra que para $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$
3. Muestra que si $a, b > 0$ entonces $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ y que la igualdad se da si y sólo si $a = b$.

3. Agregados culturales

1. Había una concursante en Tijuana que le encantaba filosofar cuestiones matemáticas, por ejemplo, de si un número podía tener dos mitades diferentes.
2. A la desigualdad útil también se le conoce como la Cauchy-Scharwz en la forma Engel.
3. A los ciudadanos de Mexicali se les conoce con el gentilicio de "cachanillas", alusivo a una planta desértica, endémica de la región con el mismo nombre.

4. La IMO con el corte para medalla de oro más alto fue en 1987. ¡Para obtener oro debías sacar 42 puntos (examen perfecto) y 22 personas lograron tal hazaña!

5. Axel $\equiv 0$ mod(esto).

6. Pese a su tierna apariencia, las ardillas son muy territoriales y son capaces de pelear hasta la muerte para defender su patria o sus crías.

7. Agregados sobre cucarachas $>$ Agregados de ardillas

4. Lista de problemas

1. Demostrar las medias

$$Min(a,b) \leq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq Max(a,b)$$

2. Para $x, y \in \mathbb{R}^+$, muestre que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$

3. Muestra que si $a, b, c > 0$ y $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$, entonces $abc \leq 1$

4. Sean $a, b, c > 0$ tales que $abc = 1$. Muestre que

$$\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+ac}{1+c} \geq 3$$

5. Para qué valores de x se cumple la desigualdad

$$\left(\frac{2x}{1-\sqrt{1+2x}}\right)^2 < 2x+9$$

6. Demostrar la desigualdad

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$$

7. Para $0 < b \leq a$, demuestre que

$$\frac{1}{8}\left(\frac{(a-b)^2}{a}\right) \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \frac{1}{8}\left(\frac{(a-b)^2}{b}\right)$$

8. Para $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, demuestre que

$$xy+yz+zx \geq x\sqrt{yz}+y\sqrt{zx}+z\sqrt{xy}$$

9. Para $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, demuestre que

$$x^2+y^2+1 \geq xy+x+y$$

10. Para $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, demuestre que

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+xz$$

11. Para $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, demuestre que

$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y} \geq x+y+z$$

12. Sean a, b, c números positivos con $a+b+c=1$, muestre que

$$\left(\frac{1}{a}+1\right)\left(\frac{1}{b}+1\right)\left(\frac{1}{c}+1\right)\geq 64$$

13. Sean a, b, c números positivos con $a+b+c=1$, muestre que

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)\geq 8$$

14. Sean a, b, c números positivos que satisfacen $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=1$, muestre que $abc\geq 8$

15. Muestre que, para los reales positivos a, b, c, se tiene que

$$(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)\geq 9a^2b^2c^2$$

16. Si a, b y c son enteros positivos con $a>b>c$ y que cumplen que a divide a $b+c$, b divide a $c+a$, y c divide a $a+b$. Demuestra que

$$\frac{abc}{a+b+c}$$

es un cuadrado perfecto.

17. Determine todos los números primos positivos distintos p, q y r tales que:

$$\frac{q+r}{p}, \frac{r+2p}{q}, \frac{p+3q}{r}$$

sean enteros.

18. Si $a, b, c\geq 0$ entonces

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq (abc)(a+b+c)$$

19. Demuestra que para cualesquiera valores reales de los números a, b, c y d es válida la desigualdad

$$a^4+b^4+c^4+d^4\geq 4abcd$$

20. Sean a, b, c reales positivos. Prueba que

$$\frac{2ab}{a+b}+\frac{2bc}{b+c}+\frac{2ca}{c+a}\leq a+b+c$$

21. (**Desigualdad Útil**) Sean a, b números reales y x, y números reales positivos, muestre que

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}$$

22. (**Desigualdad de Nesbitt**) "¿Ves este sombrero? soy la señora Nesbitt"... Sean $a, b, c\geq 0$, muestre que

$$\frac{a}{b+c}+\frac{c}{a+b}+\frac{b}{a+c}\geq\frac{3}{2}$$

23. (**Desigualdad del Reacomodo**) Si $a\geq b$ y $x\geq y$, prueba que $ax+by\geq ay+bx$

24. (**Desigualdad del triángulo**) Para dos números reales a y b siempre se tiene que

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Además la desigualdad ocurre solamente cuando $ab \geq 0$

25. Determina el menor valor del número real k de manera que la desigualdad

$$(x^2+y^2+z^2)^2 \leq k(x^4+y^4+z^4)$$

se cumpla para todos los números reales x, y, z

26. Demuestre que si los números reales a, b y c satisfacen que $a^2+b^2+c^2=3$ entonces

$$\frac{a^2}{2+b+c^2} + \frac{b^2}{2+c+a^2} + \frac{c^2}{2+a+b^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{12}$$

27. Muestra para todos los reales a, b, c, d, que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}$$

28. Sean a, b y c tres enteros positivos tales que $a < b < c$. Prueba que si $a+b$ es un múltiplo de c, $b+c$ es un múltiplo de a y $a+c$ es un múltiplo de b, entonces el cociente $\frac{abc}{a+b+c}$ es un cuadrado.

29. Dado un número entero positivo n, sea $f(n)$ el promedio de todos sus divisores positivos. Por ejemplo

$$f(3) = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$f(12) = \frac{1+2+3+4+6+12}{6} = \frac{14}{3}$$

   a) Demuestre que

$$\sqrt{n} \leq f(n) \leq \frac{n+1}{2}$$

   b) Encuentre todos los números enteros positivos n para los cuales

$$f(n) = \frac{91}{9}$$

30. Sean a, b, c números reales positivos que satisfacen $a+b+c=1$. Muestra que:

$$\sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ca} + \sqrt{c+ab} \leq 2$$

31. Sea $n \geq 2$ un entero positivo y sean $x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_n, y_n$ números reales positivos tales que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$. Muestre que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq \frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \cdots \frac{x_n}{y_n}$$

32. Sean a, b, c números reales positivos tales que $abc = 1$. Muestra que

$$\frac{a^3}{a^3+2} + \frac{b^3}{b^3+2} + \frac{c^3}{c^3+2} \geq 1$$

y que

$$\frac{1}{a^3+2} + \frac{1}{b^3+2} + \frac{1}{c^3+2} \leq 1$$

33. Sean a, b y c números reales positivos tales que $a+b+c=3$. Muestra que

$$\frac{a^2}{a+\sqrt[3]{bc}}+\frac{b^2}{b+\sqrt[3]{ca}}+\frac{c^2}{c+\sqrt[3]{ab}}\geq\frac{3}{2}$$

y determina cuándo se alcanza la igualdad.

34. Sean a, b y c números reales. Si $a+b+c\geq 0$, demuestra que $a^3+b^3+c^3\geq 3abc$

35. Si a, b y c son reales positivos que cumplen que $a\geq b\geq c$ y $c+b>a$.Demuestra que $-a^3+b^3+c^3\geq -3abc$

36. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ reales positivos tales que $a_1+a_2+\ldots+a_n=b_1+b_2+\ldots+b_n$. Prueba que

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n}\geq\frac{1}{2}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$$

37. Sean $a, b.c$ reales positivos tales que: $a+b+c=6$ y $abc=3$, demuestra que:

$$\frac{1}{a(b+c)}+\frac{1}{b(a+c)}+\frac{1}{c(a+b)}\leq 1$$

y encuentra cuándo se da la igualdad.