Desigualdades

Lista extra

Por: Fernando y Argel ft. Lulú

Resumen

En teoría ya sabes desigualdades. Pero eso no se acaba ahí, con expresiones algebraicas aparentemente azarosas. No. También hay expresiones algebraicas aparentemente azarosas que involucran lados o ángulos de algún triángulo. A veces puedes recurrir a construcciones importantes, a trigonometría o a conocimientos del estilo de “la hipotenusa es el lado más largo en un triángulo rectángulo”. Total, algunas herramientas y estrategias las verás adelante. ¡En garde!

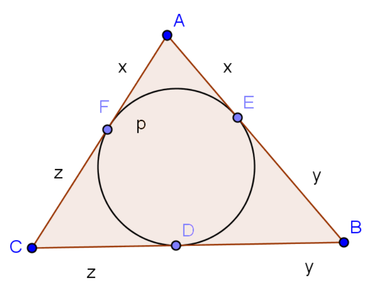
1. Extra: Desigualdades geométricas

1.1. La desigualdad del triángulo

Ya hemos visto la desigualdad del triángulo en relación a las desigualdades anteriores, en el caso de las desigualdades geométricas es una herramienta básica que es útil tomar en cuenta en problemas de este tipo. La desigualdad del triángulo consiste en que, dado un triángulo, la suma de dos de sus lados es mayor que el tercero, es decir, en un $\triangle ABC$, se cumple que $AB + BC > AC$. A su vez se demuestra que si a, b y c son números positivos tales que $a < b + c$, $b < a + c$ y $c < a + b$, entonces a, b, c son los lados de un triángulo. Pues adelante, a demostrarlo...espera quería decir: ¿y cuál es tu chamba ahorita? ¡exacto!

1.2. Transformación de Ravi

Es una herramienta que nos permite demostrar desigualdades que involucran los lados de un triángulo. Se basa en el hecho que se puede armar un triángulo con segmentos de longitudes a, b, c si y sólo si existen números positivos x, y, z tales que $a = y + z$, $b = x + z$, $c = x + y$



Los invitamos a que lo demuestren.

1.3. Problemas

1. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Demuestra que $AB + CD < AC + BD$
2. Sea ℓ una línea que divide al plano en dos semiplanos. Sean A y B dos puntos cualesquiera en el mismo semiplano. Encuentra el punto P en ℓ tal que $AP + PB$ sea mínimo.
3. Sea O un punto en el interior de $\triangle ABC$. Demuestra que $AO + OC < AB + BC$

4. Demuestra que las longitudes de los lados a, b y c de un triángulo cumplen que

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc$$

5. Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo. Demuestra que $\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$

6. Si a, b c son los lados de un triángulo, demuestra que

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3+3abc}{2}} \geq max(a,b,c)$$

7. Dados los lados a, b, c de un triángulo ABC, expresa el área $|ABC|$, el inradio r y el circunradio R en función de x, y, z que salen a partir de la transformación de Ravi.

8. Demuestra que la longitud m_a de la mediana AA' de un triángulo ABC cumple que $m_a > \frac{b+c-a}{2}$.

9. Sea O un punto en el interior del triángulo ABC. Demuestra que

$$p \leq AO+BO+CO \leq 2p$$

donde p es el semiperímetro de ABC.

10. Sea ABC un triángulo tal que $\measuredangle A > \measuredangle B$. Demuestra que $BC > \frac{1}{2}AB$

11. Si m_a, m_b y m_c son las longitudes de las medianas de un triángulo de lados a, b, c, demuestra que se puede armar un triángulo de lados m_a, m_b y m_c y que

$$\frac{3}{4}(a+b+c) \leq m_a+m_b+m_c \leq a+b+c$$

12. Demuestra que las longitudes de los lados a, b, c de un triángulo satisfacen que

$$a(b+c-a) < 2bc$$

13. Si a, b, c son los lados de un triángulo, demuestra que

$$3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 \leq 4(ab+bc+ca)$$

14. Si a, b, c son los lados de un triángulo, demuestra que

$$ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2 \leq 2(ab+bc+ca)$$

15. Si a, b, c son los lados de un triángulo demuestra que

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

16. Si a, b, c son los lados de un triángulo, demuestra que

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a) \geq 0$$

17. Si a, b, c son los lados de un triángulo, demuestra que

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq 3abc$$

18. Sean a, b, c longitudes de los lados de un triángulo ABC. Si construimos un triángulo $A'B'C'$ con los lados de longitud $a + \frac{b}{2}$, $b + \frac{c}{2}$, $c + \frac{a}{2}$, demuestra que $|A'B'C'| \geq \frac{9}{4}|ABC|$

19. El área de un cuadrilátero de lados a, b, c, d es igual a S. Demuestra que

$$S \leq \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$$

20. Sean A, B y C los vértices de un triángulo inscrito en un circulo de radio 1 y sea P un punto sobre uno de los lados del triángulo ABC. Demuestre que:

$$PA \cdot PB \cdot PC \leq \frac{32}{27}$$

y determine cuándo se da la igualdad.

21. Demuestra que el triángulo pedal es el triángulo de menor perímetro que se puede formar inscrito en un triángulo agudo.

22. Busca una construcción geométrica para demostrar las medias.