DESIGUALDADES ENTRE LAS MEDIAS Y SUS APLICACIONES

2017-12-02 IES Martín García Ramos, Albox

Enrique de Amo Artero

Una expresión muy común en la literatura matemática es la de considerar "*Sean a y b dos números reales no nulos*". ¿Cómo expresar de manera sencilla esa relación? Hay dos formas inmediatas: por un lado, "*sean a y b tales que* $ab \neq 0$", o bien "*sean a y b tales que* $a^2 + b^2 > 0$". Esta última, y su versión simplificada, $a^2 \geq 0$, para cualquier $a \in \mathbb{R}$, es muy útil para trabajar desigualdades numéricas. En particular, en este documento trabajaremos desigualdades relacionadas con la comparación de medias.

Comenzaremos señalando qué es una media: En general, dada una familia de parámetros $\{a, b, c\}$, una media para ella será cualquier M tal que (i) $\text{mín}\{a, b, c\} \leq \text{M} \leq \text{máx}\{a, b, c\}$ (en particular, si todos son iguales sólo puede haber un valor para esa media), y (ii) si $\{x, y, z\}$ es cualquier otra familia tal que $a \leq x$, $b \leq y$, $c \leq z$, y M' es la correspondiente media asignada a $\{x, y, z\}$ mediante un proceso análogo en el que M fue asociada a $\{a, b, c\}$, ha de verificarse $\text{M} \leq \text{M}'$.

Vamos a presentar las cuatro medias más conocidas para cualesquiera par de números reales x e y:

1. *La relación entre las medias armónica (MH), geométrica (MG), aritmética (MA) y cuadrática (MC) de dos números x e y:*

$$\text{MH}(x, y) = \tfrac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}; \quad \text{MA}(x, y) = \tfrac{x+y}{2};$$
$$\text{MG}(x, y) = \sqrt{xy}; \quad \text{MC}(x, y) = \sqrt{\tfrac{x^2+y^2}{2}};$$

viene dada por:

$$\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}.$$

Resolución. Se hará "razonando hacia atrás", empezando por la primera desigualdad:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \quad \leq \quad \sqrt{xy} &\iff \frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} \\ &\iff \left(\frac{2xy}{x+y}\right)^2 \leq xy \\ &\iff 4xy \leq (x+y)^2 \\ &\iff 0 \leq (x-y)^2, \end{aligned}$$

donde hemos usado el hecho señalado arriba ($a^2 \geq 0$); luego

$$\text{MH}(x, y) \leq \text{MG}(x, y).$$

Para la segunda desigualdad:

$$\begin{aligned}
\sqrt{xy} &\leq \frac{x+y}{2} \iff xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \\
&\iff 4xy \leq (x+y)^2 \\
&\iff 0 \leq (x-y)^2,
\end{aligned}$$

luego

$$\mathrm{MG}\,(x,y) \leq \mathrm{MA}\,(x,y).$$

Finalmente, la tercera y última:

$$\begin{aligned}
\frac{x+y}{2} &\leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \iff \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leq \frac{x^2+y^2}{2} \\
&\iff \frac{x^2+2xy+y^2}{4} \leq \frac{x^2+y^2}{2} \\
&\iff x^2+2xy+y^2 \leq 2\left(x^2+y^2\right) \\
&\iff 0 \leq (x-y)^2,
\end{aligned}$$

luego

$$\mathrm{MA}\,(x,y) \leq \mathrm{MC}\,(x,y).$$

2. *Construcción geométrica de las medias de dos números positivos sobre una circunferencia*:

   1. Sean reales positivos $0 < b < a$, y construyamos la circunferencia de diámetro $a - b > 0$. Llamemos A a su centro.
   2. Prologamos su diámetro central (de longitud $a - b$) sumando una longitud b. Llamemos M al punto extremo sobre ese diámetro.
   3. Llamamos *media aritmética* de a y b a la longitud MA.
   4. Dejando caer el punto A sobre la vertical, obtendremos un C sobre la circunferencia.
   5. Llamaremos *media cuadrática* de a y b a la longitud MC.
   6. Construimos la tangente a la circunferencia en su hemisferio norte desde M. Obtendremos un punto G.
   7. Llamaremos *media geométrica* de a y b a la longitud MG.
   8. Dejando caer el punto G en su vertical sobre el diámetro horizontal obtendremos un punto H.
   9. Llamaremos *media armónica* de a y b a la longitud MH.

   Se tiene la siguiente relación de las medias:

$$b < \mathrm{MH} < \mathrm{MG} < \mathrm{MA} < \mathrm{MC} < a.$$

Resolución. La demostración geométrica es trivial (si $a = b$ trivializaríamos la figura, de modo que todas las medias serían la misma); y los cálculos sobre la figura, lo son igualmente (véase la figura al final de este documento):

i. $\mathrm{MA} = a - \frac{a-b}{2} = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$, en cualquier caso.

ii. $\mathrm{MC}^2 = \mathrm{MA}^2 + \mathrm{AC}^2$, de donde $\mathrm{MC} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

iii. $\mathrm{MG}^2 = \mathrm{MA}^2 - \mathrm{GA}^2$, de donde $\mathrm{MG} = \sqrt{ab}$.

iv. $\mathrm{MG/MA{=}MH/MG} \iff \mathrm{MH{=}MG^2/MA}$, de donde $\mathrm{MH} = 2\frac{1}{1/a+1/b}$.

La primera relación entre medias que suele ser de interés para los estudiantes es ¿por qué es la media aritmética la que se usa? Buena iniciación al sindicalismo matemático...

Después de probar las desigualdades anteriores para cualesquiera par de números reales, procedemos a presentar las correspondientes para cualquier familia finita de n elementos. Obviamos señalar que el dominio de los números reales en los que es válida cada una de las fórmulas no es común a todas ellas. (Puede ser un buen ejercicio discutir este asunto.)

3. (*Desigualdad de Cauchy-Schwarz-Bunyakowski*) *Para* $2N$ *números reales positivos* $a_1, a_2, \ldots, a_N, b_1, b_2, \ldots, b_N$, *se tiene*

$$\sum_{k=1}^{N} a_k b_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{N} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{N} b_k^2},$$

y se alcanza la igualdad si y sólo si $\frac{a_1}{b_1} = \cdots = \frac{a_N}{b_N}$. *(Obsérvese que no se precisa que todos los números sean positivos, pues*

$$\sum_{k=1}^{N} a_k b_k \leq \sum_{k=1}^{N} |a_k|\,|b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{N} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{N} b_k^2},$$

en cuyo caso la igualdad se alcanza en el caso señalado arriba o bien cuando todos los coeficientes son nulos.)

Resolución. Consideremos el polinomio siguiente:

$$p(x) := \sum_{k=1}^{N} (a_k - b_k x)^2, \forall x \in \mathbb{R},$$

es decir, para cada $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{k=1}^{N} \left(a_k^2 - 2a_k b_k x + b_k^2 x^2\right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{N} b_k^2\right) x^2 - 2\left(\sum_{k=1}^{N} a_k b_k\right) x + \sum_{k=1}^{N} a_k^2. \end{aligned}$$

Como p no puede tomar valores negativos, su discriminante Δ será negativo (y será nulo si y sólo si $p(x) = 0$, con una única raíz $x = \frac{a_1}{b_1} = \cdots = \frac{a_N}{b_N}$):

$$\begin{aligned} 0 &\geq \left(-2\sum_{k=1}^{N} a_k b_k\right)^2 - 4\left(\sum_{k=1}^{N} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{N} b_k^2\right) \\ &\Longrightarrow \left(\sum_{k=1}^{N} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{N} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{N} b_k^2\right), \end{aligned}$$

que es lo deseado.

4. (*Aplicaciones de la desigualdad de Cauchy-Schwarz-Bunyakowski*) *Prueba que dados $a_1, \ldots, a_N$ reales arbitrarios, se verifica que su media aritmética* MA *no supera a la media cuadrática* MC*; es decir:*

$$\begin{aligned} \mathrm{MA}\,(a_1, \ldots, a_N) \quad : &= \frac{a_1 + \cdots + a_N}{N} \\ &\leq \frac{|a_1 + \cdots + a_N|}{N} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_N^2}{N}} =: \mathrm{MC}\,(a_1, \ldots, a_N). \end{aligned}$$

Resolución. (Obviamente sólo probaremos la segunda desigualdad; la primera es una trivialidad.) Basta con hacer $b_1 = \cdots = b_N = 1$, de donde

$$\left(\sum_{k=1}^{N} a_k\right)^2 \leq N\left(\sum_{k=1}^{N} a_k^2\right) = N^2\left(\frac{\sum_{k=1}^{N} a_k^2}{N}\right),$$

lo que equivale a

$$\left|\frac{\sum_{k=1}^{N} a_k}{N}\right|^2 \leq \frac{\sum_{k=1}^{N} a_k^2}{N}.$$

5. *Prueba que dados $a_1, \ldots, a_N$ reales positivos, se verifica que su media geométrica* MG *no supera a la media aritmética* MA, *y la armónica* MA *no supera a ninguna de las dos anteriores; es decir:*

$$\begin{aligned} \mathrm{MH}\,(a_1, \ldots, a_N) \quad : &= \frac{N}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_N}} \\ &\leq \sqrt[N]{a_1 \times \cdots \times a_N} := \mathrm{MG}\,(a_1, \ldots, a_N) \\ &\leq \frac{a_1 + \cdots + a_N}{N} =: \mathrm{MA}\,(a_1, \ldots, a_N). \end{aligned}$$

Resolución. Primera demostración (de Cauchy) de cómo

$$\sqrt[N]{a_1 \times \cdots \times a_N} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_N}{N}$$

en tres pasos:

Paso 1^o (ya probado): La desigualdad es cierta para $N = 2$.
Paso 2^o: si es cierta para N, entonces también lo será para $N - 1$.
Paso 3^o: si es cierta para N, entonces también lo será para $2N$.
Prueba del paso 2^o: llamemos $a := \sqrt[N-1]{a_1 \times \cdots \times a_{N-1}}$. Entonces:

$$\frac{a_1 + \cdots + a_{N-1} + a}{N} \geq \sqrt[N]{a_1 \times \cdots \times a_{N-1} \times a} = \sqrt[N]{a^{N-1} \times a} = a,$$

de donde

$$a_1 + \cdots + a_{N-1} \geq (N-1)\, a$$

y, por tanto,

$$\frac{a_1 + \cdots + a_{N-1}}{N-1} \geq \sqrt[N-1]{a_1 \times \cdots \times a_{N-1}}.$$

Prueba del paso 3^o: para $a_1, \ldots, a_{2N} \geq 0$ se sigue que (usando la hipótesis para pasar de la 2^a a la 3^a línea):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2N} a_k &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2N-1} + a_{2N}) \\
&\geq 2\left(\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4} + \cdots + \sqrt{a_{2N-1} a_{2N}}\right) \\
&\geq 2N \sqrt[N]{\sqrt{a_1 a_2}\sqrt{a_3 a_4} \cdots \sqrt{a_{2N-1} a_{2N}}} \\
&\geq 2N \sqrt[2N]{a_1 a_2 a_3 a_4 \cdots a_{2N-1} a_{2N}}.
\end{aligned}$$

Observa que, una vez probado que

$$\mathrm{MG}\,(a_1, \ldots, a_N) \leq \mathrm{MA}\,(a_1, \ldots, a_N)\,,$$

la desigualdad

$$\mathrm{MH}\,(a_1, \ldots, a_N) \leq \mathrm{MG}\,(a_1, \ldots, a_N)$$

es trivial. (¿Por qué? Considera los puntos $x_k := 1/a_k$, con $k = 1, \ldots, N$, e intenta razonar "hacia atrás".)

Segunda demostración: Llamemos $a = \frac{a_1 + \cdots + a_N}{N}$, y consideraremos un par de los términos de esa media (podemos elegirlos como los dos primeros, sin pérdida de generalidad), de modo que sean, con $h, k > 0$:

$$a_1 - k < A < a_2 + h.$$

Ahora los vamos a sustituir a_1 y a_2 por nuevos números a_1' y a_2' tales que se mantenga su suma pero se incremente su producto:

$$a_1' := a \text{ y } a_2' := a - h + k.$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
a_1' + a_2' &= a + (a - h + k) = (a + k) + (a - h) = a_1 + a_2 \\
a_1' a_2' &= a\,(a - h + k) = a^2 - ah + ak = a^2 + a\,(k - h) \\
a_1 a_2 &= (a + k)\,(a - h) = a^2 - ah + ak - hk = a_1' a_2' - hk < a_1' a_2';
\end{aligned}$$

y, por tanto, se verifica lo deseado: se mantiene la suma e incrementa el producto de los n puntos.

Si ahora es

$$a = a'_1 = a'_2 = a_3 = \cdots = a_N,$$

habremos logrado la igualdad, y ya no hay nada que probar. En caso contrario, podremos encontrar dos términos entre ellos, uno menor que a y otro mayor; digamos $a'_2 < a$ y $a_3 > a$, y repetiremos el proceso anterior. Pero este proceso es finito: no podrá irse más allá de n pasos.

6. *Es muy útil la expresión de estas desigualdades para valores concretos de* N; por ejemplo, para $N = 3$:

$$\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

7. (*Una aplicación de la desigualdad* MG$\leq$MA *para* $N = 4$) *Encuentra el valor máximo de la expresión*

$$x\left(1 - x^3\right)$$

sabiendo que $x \in [0, 1]$.

Resolución. Consistirá en encontrar un mayorante para esa expresión y ver que, efectivamente, se puede alcanzar en dicha expresión para un valor concreto. La idea pasa por hacer

$$\begin{aligned} y &= x\left(1 - x^3\right) \\ &\iff 3y^3 = 3x^3\left(1 - x^3\right)^3 \\ &\iff 3y^3 = 3x^3\left(1 - x^3\right)\left(1 - x^3\right)\left(1 - x^3\right), \end{aligned}$$

de modo que la desigualdad geométrico-aritmética nos da:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{3y^3} &\leq \frac{3x^3 + \left(1 - x^3\right) + \left(1 - x^3\right) + \left(1 - x^3\right)}{4} = 3/4 \\ &\iff 3y^3 \leq (3/4)^4 \iff y \leq \sqrt[3]{3^3/4^4} = \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}. \end{aligned}$$

Por tanto $x\left(1 - x^3\right) \leq \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$, cuyo máximo se alcanzará cuando $3x^3 = 1 - x^3$ (es decir, cuando se satisfaga la igualdad geométrico-aritmética para $\left\{3x^3, 1 - x^3, 1 - x^3, 1 - x^3\right\}$), lo cual se dará para $x = 1/\sqrt[3]{4}$.

8. (*Una aplicación más de la desigualdad* MG$\leq$MA..., *después de parecer que no va servir para nada.*) *Si tres reales positivos* a, b *y* c *están en relación* $abc = 1$, *entonces*

$$\frac{3}{2} \leq \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)}.$$

Resolución. Los primeros intentos de resolución de este problema, pueden ser terriblemente infructuosas. Los tres sumandos y un factor 3 en el otro miembro pueden sugerir comenzar por aplicar MG≤MA (dos veces consecutivas):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} &\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{(b+c)(c+a)(a+b)}} \\
&= \frac{3}{\sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)}} \\
&\geq 3\frac{3}{(b+c)+(c+a)+(a+b)} \\
&= \frac{9}{2(a+b+c)},
\end{aligned}$$

y aunque parece que andamos cerca, pues $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}=3$, nuestro gozo se queda en un pozo, pues de ahí se colige que $2(a+b+c)/9 \geq 2/3$, siendo la desigualdad contraria la que necesitamos...

La otra gran herramienta que tenemos a mano es la desigualdad de Cauchy-Schwarz-Bunyakowski, pero se antoja impensable queriendo ver una suma de cuadrados en la expresión $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}$; sobre todo, por los tan desagradables cubos.

... Y es que hay una condición que no hemos usado: la $abc=1$. Observemos cómo, en general, para cada uno de los tres sumandos:

$$\frac{1}{\alpha^3(\beta+\gamma)}=\frac{1}{\alpha^2(\alpha\beta+\alpha\gamma)}=\frac{1/\alpha^2}{(\alpha\beta+\alpha\gamma)}=\frac{1/\alpha^2}{(\alpha\beta+\alpha\gamma)/\alpha\beta\gamma}=\frac{1/\alpha^2}{1/\beta+1/\gamma},$$

lo que puede inducirnos a introducir un cambio de variables $x=1/a$, $y=1/b$ y $z=1/c$, de modo que lo que queremos probar es que

$$\frac{3}{2} \leq \frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}.$$

Interpretando el miembro de la derecha como una suma de cuadrados, pensando en poder aplicar la Desigualdad de Cauchy-Schwarz-Bunyakowski, hacemos:

$$\left(\frac{x^2}{\sqrt{(y+z)^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{(z+x)^2}}+\frac{z^2}{\sqrt{(x+y)^2}}\right)\underbrace{\left(\sqrt{(y+z)^2}+\sqrt{(z+x)^2}+\sqrt{(x+y)^2}\right)}_{\overset{\|}{2(x+y+z)}}$$

$$\geq (x+y+z)^2,$$

de donde se sigue que

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}\frac{3}{3} \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz}=3/2,$$

y, ¡mira por dónde!, al final sí que hemos aplicado la desigualdad geométrico-aritmética para tres términos.

9. (*Desigualdad numérica de Jensen*) *Para cada función f convexa y convenientes escalares positivos $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ tales que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_N = 1$, se tiene que*

$$f\left(\sum_{k=1}^{N} \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{N} \alpha_k f(x_k)$$

para cualesquiera puntos $x_1, \ldots, x_N$.

Resolución. La prueba de esta desigualdad se hace por inducción sobre $N \geq 2$: para $N = 2$ se sigue la veracidad de la afirmación a partir de la convexidad (*) de f. Probemos que:

$$f\left(\sum_{k=1}^{N+1} \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{N+1} \alpha_k f(x_k).$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{k=1}^{N+1} \alpha_k x_k\right) &= f\left(\sum_{k=1}^{N} \alpha_k x_k + \alpha_{N+1} x_{N+1}\right) \\
&= f\left((1-\alpha_{N+1}) \sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{N+1}} x_k + \alpha_{N+1} x_{N+1}\right) \\
&\leq (1-\alpha_{N+1}) f\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{N+1}} x_k\right) + \alpha_{N+1} f(x_{N+1}) \\
&\leq (1-\alpha_{N+1}) \sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{N+1}} f(x_k) + \alpha_{N+1} f(x_{N+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{N+1} \alpha_k f(x_k),
\end{aligned}$$

donde hemos usado la hipótesis de inducción para la última desigualdad.

(*) Una función f es *convexa* en $\mathbb{R}$ sii $f(ax + (1-a)x) \leq af(x) + (1-a) f(x)$ para cualesquiera x en $\mathbb{R}$ y a en $[0, 1]$.

10. (*Aplicaciones de la desigualdad numérica de Jensen*) *Llamaremos M_p media de orden $p > 0$ a la expresión*

$$M_p(x_1, \ldots, x_N) := \left(\sum_{k=1}^{N} x_k^p\right)^{1/p}.$$

(Observemos que, dada una familia finita de N puntos, entonces en particular, $\mathrm{M}_{-1} = \mathrm{MH}$, $\lim_{p \to 0} \mathrm{M}_p = \mathrm{MG}$, $\mathrm{M}_1 = \mathrm{MA}$ y $\mathrm{M}_2 = \mathrm{MC}$.) *Entonces*

$$a < b \implies \mathrm{M}_a(x_1, \ldots, x_N) < \mathrm{M}_b(x_1, \ldots, x_N).$$

Resolución. La demostración se basa en el uso de la convexidad (**) de la función $x \longrightarrow x^{\alpha}$ para $x > 0$ y $\alpha > 1$. Tomando $f(x) := x^{b/a}$ y $\alpha_1 = \cdots = \alpha_N = 1/N$ se sigue que :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k^a\right)^{b/a} &= f(x) = f\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k^a\right) \\ &\leq \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(x_k^a) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} (x_k^a)^{b/a} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k^b,\end{aligned}$$

de donde tomando raíces b-ésimas en los extremos de la desigualdad se sigue el resultado.

(**) La convexidad de la función $x \to x^{\alpha}$ para $x > 0$ y $\alpha > 1$ es evidente, pues siempre: $f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} > 0$; y la convexidad está así caracterizada para las funciones derivables.

11. *Algunas conclusiones (pensando en cómo puntuar la evaluación de un estudiante)*:

    1. Si $p > 1$, la media de orden p dará más peso a las puntuaciones más altas, premiando el logro de las mismas: un 8 y un 10 frente a dos 9 será
    $$\mathrm{M}_2(8, 10) = \sqrt{82} > \mathrm{M}_2(9, 9) = \sqrt{81}.$$
    2. Si $p < 1$, la media de orden p dará más peso a las puntuaciones más bajas, premiando la constancia:
    $$\mathrm{M}_{-1}(8, 10) = 80/9 < \mathrm{M}_{-1}(9, 9) = 9.$$
    3. Si $p \to -\infty$, entonces $\mathrm{M}_p(x_1, \ldots, x_N) \to \text{mín}\{x_1, \ldots, x_N\}$. Si $p \to +\infty$, entonces $\mathrm{M}_a(x_1, \ldots, x_N) \to \text{máx}\{x_1, \ldots, x_N\}$
    4. En el caso de que Paquito y Paquita hayan obtenido calificaciones respectivas de 9 y 6, y de 1 y 4, respectivamente, en cada evaluación, obsevemos que podríamos optar por darles cuatro tipos de puntuaciones medias (saca tus propias conclusiones):
    $$\begin{aligned}\mathrm{MH}(9, 1) &= 1,8; \mathrm{MG}(9, 1) = 3; \mathrm{MA}(9, 1) = 5; \mathrm{MC}(9, 1) = \sqrt{41} \\ \mathrm{MH}(6, 4) &= 4,8; \mathrm{MG}(6, 4) = \sqrt{24}; \mathrm{MA}(6, 4) = 5; \mathrm{MC}(6, 4) = \sqrt{26}.\end{aligned}$$

12. (*Otra aplicación de la desigualdad de Jensen*) *Prueba que si* $\frac{1}{ab} + \frac{1}{cb} + \frac{1}{ca} = 1$ *entonces*
$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Resolución. Introduciremos el cambio de variable

$$a = \tan A,\ b = \tan B,\ c = \tan C, \text{ con } A + B + C = \pi.$$

(Esto último se corresponde con la condición $\frac{1}{ab}+\frac{1}{cb}+\frac{1}{ca}=1$. En efecto, si multiplicamos ambos miembros de la igualdad por abc nos quedará $a+b+c=abc$, y sabemos que $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$ si y sólo si $A+B+C=\pi$.) Trabajando en el miembro de la izquierda:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}} &= \frac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}}+\frac{\tan B}{\sqrt{1+\tan^2 B}}+\frac{\tan C}{\sqrt{1+\tan^2 C}}\\
&= \frac{\tan A}{\sqrt{\sec^2 A}}+\frac{\tan B}{\sqrt{\sec^2 B}}+\frac{\tan C}{\sqrt{\sec^2 C}}\\
&= \mathrm{sen}A+\mathrm{sen}B+\mathrm{sen}C
\end{aligned}$$

donde usando la concavidad de la función seno en $[0,\pi]$, tendremos que

$$\mathrm{sen}A+\mathrm{sen}B+\mathrm{sen}C\leq 3\mathrm{sen}\left(\frac{A+B+C}{3}\right)=3\mathrm{sen}\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

13. (*Más utilidades de la desigualdad de Cauchy-Schwarz-Bunyakowski*) *Prueba que*

$$\begin{aligned}
\{a,b,c\}\,,\{x,y,z\} &\Longrightarrow ax+by+cz\leq\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\\
\{a,b,c\} &\Longrightarrow ab+bc+ca\leq a^2+b^2+c^2\\
\{a,b,c\} &\Longrightarrow abc\,(a+b+c)\leq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\\
\{a,b,c\}\,;a+b+c &= 1\Longrightarrow ab+bc+ca\leq 1/3
\end{aligned}$$

Resolución. La primera de ellas es de aplicación directa de la desigualdad de C-S-B. La segunda, igualmente, considerando como segunda familia $\{x,y,z\}$ la permutación $\{b,c,a\}$ de la primera. También puede obtenerse por técnicas directas de cálculo, sin más que tener presente la no negatividad de los cuadrados:

$$0\leq(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right).$$

Claramente, se alcanza la igualdad $ab+bc+ca=a^2+b^2+c^2$ cuando $a=b=c$.

La tercera es consecuencia de la primera:

$$\begin{aligned}
abc\,(a+b+c) &= (ac)\,(ab)+(ba)\,(cb)+(bc)\,(ac)\\
&\leq \sqrt{c^2a^2+a^2b^2+b^2c^2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\\
&\leq b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2.
\end{aligned}$$

Finalmente, de la segunda:

$$\begin{aligned}
ab+bc+ca &\leq a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2\,(ab+bc+ca)\\
&= 1-2\,(ab+bc+ca)\,,
\end{aligned}$$

de donde despejando, se tiene lo deseado.

14. *Para reales positivos a, b y c, si $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$, entonces $abc \leq 1$.*

Resolución. La condición de partida nos dice que

$$1 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + abc = 8.$$

Pero, por un lado, la desigualdad geométrico-aritmética nos dice que $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$; y por otro lado, la armónico geométrica nos da que $\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc}$, es decir, $3\,(abc)^{2/3} \leq ab+bc+ca$. Por ambas razones:

$$8 \geq 1 + 3\,(abc)^{1/3} + 3\,(abc)^{2/3} + abc = \left(1 + (abc)^{1/3}\right)^3,$$

de donde $\sqrt[3]{abc} \leq 1$, o equivalentemente, $abc \leq 1$.

Está claro que se alcanza la igualdad cuando y sólo cuando $abc = 1$. Es decir, basta que alguno de los tres sea distinto de 1 para que no se alcance la igualdad.

15. (*Una aplicación aeroportuaria.*) *Aunque pueda resultar extraño, la normativa de las aerolíneas, para el tamaño del equipaje permitido en cabina, sólo indica que permiten "una única pieza cuyas dimensiones largo+ancho+alto no exceda los 115 centímetros". Es evidente que el abanico de posibilidades es enorme. Es sugerente que se busque, tal y como se propone en el dossier que trabajan los estudiantes que visitan la Exposición Imaginary, qué dice cada compañía al respecto de la aplicación de la normativa general para sus normativas propias (Iberia es un $55 \times 40 \times 20$, Air Europa de $55 \times 35 \times 25$). Es claro que la condición $x+y+z = 115$ nos da un plano que corta a los ejes coordenados en los puntos $(115,0,0)$, $(0,115,0)$ y $(0,0,115)$; y deja debajo -dentro del primer octante del espacio- al deseado objeto. ¿Puedes dar las dimensiones que ha de tener la maleta de cabina para que tenga máxima capacidad?*

Resolución. Se trata de una aplicación inmediata de la desigualdad entre las medias MG y MA para tres dimensiones:

$$xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 = \left(\frac{115}{3}\right)^3 \approx 56328,7 = 38,3^3$$

de modo que buscamos una maleta cúbica de $38,3$ centímetros de lado.

16. *Para reales positivos a, b y c, se sigue que*

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

Resolución. Desarrollando en el primer miembro:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) &= 1+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{ab}{bc}+\frac{bc}{ca}+\frac{ca}{ab}+\frac{abc}{bca}\\ &= 2+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\\ &= 2+\left(\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}\right),\end{aligned}$$

lo que equivale a probar que

$$\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}\geq 2\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}.$$

Si reescribimos

$$\frac{c+a}{b}=\frac{a+b+c}{b}-1,\ \frac{a+b}{c}=\frac{a+b+c}{c}-1,\ \frac{b+c}{a}=\frac{a+b+c}{a}-1,$$

entonces la desigualdad a lograr se escribe como

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)-3\geq 2\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}.$$

Pero si aplicamos las desigualdades armónico-geométrica, primero, y la geométrico-aritmética, después, tenemos que

$$\begin{aligned}(a+b+c)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right) &\geq \frac{3\,(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}\\ &= \frac{2\,(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\\ &\geq \frac{2\,(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}+3,\end{aligned}$$

que era lo que andábamos buscando.

17. *Halla las cuatro raíces reales de la ecuación*

$$4x^4-ax^3+bx^2-cx+5=0$$

sabiendo que son positivas y satisfacen la relación

$$\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}+\frac{r_3}{5}+\frac{r_4}{8}=1.$$

Resolución. Es importante observar cómo las cuatro raíces han de satisfacer la relación $r_1r_2r_3r_4=5/4$ (¿sabes por qué?), de donde

$$\frac{r_1}{2}\frac{r_2}{4}\frac{r_3}{5}\frac{r_4}{8}=\frac{1}{256}.$$

Por tanto:
$$\frac{\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}+\frac{r_3}{5}+\frac{r_4}{8}}{4}=\frac{1}{4}=\sqrt[4]{\frac{r_1}{2}\frac{r_2}{4}\frac{r_3}{5}\frac{r_4}{8}},$$
lo que nos dice que se alcanza la igualdad en la desigualdad geométrico-aritmética; y, por tanto, los cuatro términos han de iguales, satisfaciendo
$$\frac{r_1}{2}=\frac{r_2}{4}=\frac{r_3}{5}=\frac{r_4}{8}=\frac{1}{4}.$$
Es decir: $r_1=1/2$, $r_2=1$, $r_3=5/4$ y $r_4=2$.

18. (*Aplicación de la desigualdad aritmético-cuadrática*) *Si a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo, prueba que*
$$\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}+\sqrt{a+b-c}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

Resolución. En este ejercicio veremos un buen ejemplo de lo que significa la elección de una notación adecuada. Sean $p:=(a+b+c)/2$, $x:=p-a$, $y:=p-b$ y $z:=p-c$. (Observa que la condición que rijen los parámetros a, b y c hace que los nuevos x, y y z sean positivos; por ejemplo, para x:
$$x=p-a=(a+b+c)/2-a=(b+c-a)/2>0.)$$
En consecuencia, tendremos que $a=y+z$, $b=z+x$ y $c=x+y$. Por tanto, nuestro objetivo ahora es probar que
$$\sqrt{2x}+\sqrt{2y}+\sqrt{2z}\le\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}+\sqrt{x+y}.$$
Ahora, usando tres veces la desigualdad aritmético-cuadrática, tendremos:
$$\begin{aligned}\sqrt{2x}+\sqrt{2y}+\sqrt{2z} &= \frac{\sqrt{2x}+\sqrt{2y}}{2}+\frac{\sqrt{2y}+\sqrt{2z}}{2}+\frac{\sqrt{2z}+\sqrt{2y}}{2}\\ &\le \sqrt{\frac{2x+2y}{2}}+\sqrt{\frac{2y+2z}{2}}+\sqrt{\frac{2z+2x}{2}}\\ &= \sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}+\sqrt{x+y}.\end{aligned}$$

19. *Para cualesquiera reales positivos a, b y c, se tiene que*
$$9a^2b^2c^2\le\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\left(ab^2+bc^2+ca^2\right).$$

Resolución. La desigualdad geométrico-aritmética para tres puntos nos da:
$$\left.\begin{array}{l}\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{3}\ge\sqrt[3]{a^3b^3c^3}=abc\\ \frac{ab^2+bc^2+ca^2}{3}\ge\sqrt[3]{a^3b^3c^3}=abc\end{array}\right\}$$
de donde despejando en cada desigualdad y multiplicando ambas, se obtiene lo deseado.

20. *Para cualesquiera reales positivos* x_1, x_2 ,..., x_n, *se tiene que*

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

Resolución. La desigualdad geométrico-aritmética para n puntos nos da:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n \sqrt[n]{\frac{x_1}{x_2}\frac{x_2}{x_3} \cdots \frac{x_{n-1}}{x_n}\frac{x_n}{x_1}} = n.$$

21. *Para cualesquiera reales positivos* x_1, x_2 ,..., x_n, *se tiene que*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2.$$

Resolución. La desigualdad armónico-aritmética

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq n\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)^{-1}$$

para n puntos nos da lo deseado, inmediatamente.

22. *Prueba que para cada familia de reales positivos* $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *tal que*

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n} = 1,$$

se tiene que

$$(n-1)^n \leq x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n.$$

Resolución. Una adecuada notación ayudará en la resolución. Llamaremos $y_k := \frac{1}{1+x_k}$ a cada una de las fracciones en la suma. De ahí

$$x_k = 1/y_k - 1 = \frac{1-y_k}{y_k};$$

y de $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1$, para cada k tendremos

$$1 - y_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} y_i.$$

Aquí vamos a usar convenientemente la desigualdad geométrico-aritmética:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n &= \prod_{k=1}^{n} \frac{1-y_k}{y_k} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(1-y_k)}{\prod_{k=1}^{n} y_k} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} y_i\right)}{\prod_{k=1}^{n} y_k} \\ &\geq (n-1)^n \frac{\prod_{k=1}^{n}\left(\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} y_i\right)^{\frac{1}{n-1}}}{\prod_{k=1}^{n} y_k} = (n-1)^n, \end{aligned}$$

que es lo buscado.

23. *Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo y A, B y C los ángulos respectivos. Si $r > 0$ es el radio de la circunferencia inscrita en dicho triángulo, prueba que*

$$a\mathrm{sen}A + b\mathrm{sen}B + c\mathrm{sen}C \geq 9r.$$

Resolución. La relación entre el perímetro del triágulo $a + b + c$, el área S del mismo y el radio r de la circunferencia inscrita en él (llamado *inradio*) viene dada por la relación

$$S = (a + b + c)\, r/2,$$

es decir

$$r = \frac{2S}{a + b + c};$$

y

$$\mathrm{sen}A = \frac{2S}{bc};\ \mathrm{sen}B = \frac{2S}{ca};\ \mathrm{sen}C = \frac{2S}{ab}.$$

Razonando "hacia atrás", tenemos:

$$\begin{aligned} a\mathrm{sen}A + b\mathrm{sen}B + c\mathrm{sen}C &\geq 9r \\ &\iff a\frac{2S}{bc} + b\frac{2S}{ca} + c\frac{2S}{ab} \geq 9\frac{2S}{a+b+c} \\ &\iff \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \geq \frac{9}{a+b+c} \\ &\iff \left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}\right)(a + b + c) \geq 9, \end{aligned}$$

pero como la desigualdad geométrico-aritmética nos da

$$\frac{\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \text{ y } \frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

tenemos que es cierta la última desigualdad, de donde se sigue la veracidad de todas ellas.

La igualdad se alcanza en el triángulo equilátero, y sólo en él.

Son muy útiles, en general, las siguientes relaciones cuando de desigualdades entre los lados de triángulos se trata: Si a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo y A, B y C los ángulos respectivos, y con circunradio $r > 0$, entonces se tienen:

1. Igualdad del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ac\cos C.$$

2. Igualdad del seno:

$$\frac{a}{\mathrm{sen}A} = \frac{b}{\mathrm{sen}B} = \frac{c}{\mathrm{sen}C} = 2r.$$

3. Fórmula del área:

$$2A = ab\operatorname{sen} C = bc\operatorname{sen} A = ca\operatorname{sen} B.$$

24. *Para cualesquiera reales positivos a y b se tiene que*

$$\sqrt[3]{a/b} + \sqrt[3]{b/a} \leq \sqrt[3]{2\,(a+b)\,(1/a+1/b)}.$$

Resolución. Este problema es de los que se precisa "empezar con buen pie": un adecuado cambio de variable nos llevará por el buen camino. Hagamos

$$x := \sqrt[3]{a} \text{ e } y := \sqrt[3]{b}.$$

Ahora, razonando hacia atrás y haciendo cálculos, tendremos:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{a/b} + \sqrt[3]{b/a} \quad &\leq \quad \sqrt[3]{2\,(a+b)\,(1/a+1/b)} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leq \sqrt[3]{2\,(x^3+y^3)\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}\right)} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{x^2+y^2}{xy} \leq \sqrt[3]{\frac{2\,(x^3+y^3)^2}{x^3y^3}} \\
&\Longleftrightarrow \quad x^2+y^2 \leq \sqrt[3]{2\,(x^3+y^3)^2} \\
&\Longleftrightarrow \quad x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6 \leq 2x^6+4x^3y^3+2y^6 \\
&\Longleftrightarrow \quad 3x^4y^2+3x^2y^4 \leq x^6+4x^3y^3+y^6.
\end{aligned}$$

Pero, ahora bien, por la aplicación de las deigualdades geométrico-aritméticas

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{x^6+2x^3y^3}{3} \geq \sqrt[3]{x^{12}y^6} = x^4y^2 \\
\frac{y^6+2x^3y^3}{3} \geq \sqrt[3]{y^{12}x^6} = y^4x^2
\end{array}\right\}$$

se tiene que la última desigualdad es cierta.

25. *Para cualesquiera reales positivos a, b y c, se tiene que*

$$(a+b)\,(a+c)\,(a+b)\,(a+c) \geq 2\sqrt{abc\,(a+b+c)}.$$

Resolución. Se trata de una sencilla aplicación de la desigualdad geométrico-aritmética:

$$\begin{aligned}
(a+b)\,(a+c) \quad &= \quad a^2+ab+ac+bc \\
&= \quad a\,(a+b+c)+bc \\
&\geq \quad 2\sqrt{abc\,(a+b+c)}.
\end{aligned}$$

26. *Para cualesquiera reales positivos a, b y c, se tiene que*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

Resolución. La prueba de esta desigualdad reside en la idea feliz de caer en la cuenta de que podemos probar que

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{a^{4/3}}{a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}}$$

para el primer sumando, y así análogamente con los otros dos.

Haciendo cálculos:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} &\geq \frac{a^{4/3}}{a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}} \\
&\Longleftrightarrow a^2\left(a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}\right)^2 \geq a^{8/3}\left(a^2+8bc\right) \\
&\Longleftrightarrow \left(a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}\right)^2 \geq a^{2/3}\left(a^2+8bc\right) \geq a^{8/3}+a^{2/3}8bc \\
&\Longleftrightarrow \left(a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}\right)^2 - \left(a^{4/3}\right)^2 \geq a^{2/3}8bc \\
&\Longleftrightarrow \left(2a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}\right)\left(b^{4/3}+c^{4/3}\right) \geq 8a^{2/3}bc
\end{aligned}$$

lo cual es consecuencia de la doble aplicación de las desigualdades geométrico-aritméticas:

$$\left.\begin{array}{l}
2a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3} \geq 4\sqrt[4]{a^{8/3}b^{4/3}c^{4/3}} = 4a^{2/3}b^{1/3}c^{1/3} \\
b^{4/3}+c^{4/3} \geq 2\sqrt{b^{4/3}c^{4/3}} = 2b^{2/3}c^{2/3}
\end{array}\right\}$$

cuyo producto, miembro a miembro, nos da lo deseado.

27. *Para cualesquiera reales positivos a, b y c, se tiene que*

$$\frac{2}{b\,(a+b)}+\frac{2}{c\,(b+c)}+\frac{2}{a\,(c+a)} \geq \frac{27}{(a+b+c)^2}.$$

Resolución. Aplicando la desigualdad geométrico-aritmética, una vez en la primera desigualdad y dos veces en la segunda, tendremos:

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{2}{b(a+b)}+\frac{2}{c(b+c)}+\frac{2}{a(c+a)}}{3} &\geq \sqrt[3]{\frac{8}{abc\,(a+b)\,(b+c)\,(c+a)}} \\
&= \frac{2}{\sqrt[3]{abc}\sqrt[3]{(a+b)\,(b+c)\,(c+a)}} \\
&\geq 2\frac{3}{(a+b+c)}\frac{3}{2\,(a+b+c)} = \frac{9}{(a+b+c)^2},
\end{aligned}$$

de donde se sigue lo deseado.

28. *Para cualesquiera reales positivos a, b y c, se tiene que*

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab} \geq a+b+c.$$

Resolución. Comenzando por multiplicar en ambos miembros por abc, lo que perseguimos será equivalente a demostrar:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc\,(a + b + c)\,.$$

En el miembro de la izquierda haremos transformaciones y aplicaremos la desigualdad geométrico-aritmética a cada sumando:

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 &= \frac{a^4 + b^4}{2} + \frac{b^4 + c^4}{2} + \frac{c^4 + a^4}{2} \\ &\geq \sqrt{a^4 b^4} + \sqrt{b^4 c^4} + \sqrt{c^4 a^4} = a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 \\ &= \frac{c^2\left(a^2 + b^2\right)}{2} + \frac{a^2\left(b^2 + c^2\right)}{2} + \frac{b^2\left(c^2 + a^2\right)}{2} \\ &\geq c^2 ab + a^2 bc + b^2 ca = (a + b + c)\,abc, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad proviene de un elemental $(x - y)^2 \geq 0$ en cada uno de los tres sumandos.

29. *Para cualesquiera reales positivos a, b y c, con $a + b + c = 3$, se tiene que*

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ca.$$

Resolución. Trabajando hacia atrás:

$$\begin{aligned} \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \quad &\geq \quad ab + bc + ca \\ &\Longleftrightarrow \quad 2\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right) \geq 2\,(ab + bc + ca) \\ &\Longleftrightarrow \quad c^2 + a^2 + b^2 + 2\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right) \\ &\geq \quad c^2 + a^2 + b^2 + 2\,(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 \\ &= \quad 3\,(a + b + c) \\ &\Longleftrightarrow \quad c^2 + a^2 + b^2 + 2\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right) \geq 3\,(a + b + c)\,. \end{aligned}$$

Ahora vamos a aplicar tres veces la desigualdad aritmético-geométrico:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + 2\sqrt{a} \geq 3\sqrt[3]{a^3} = 3a \\ b^2 + 2\sqrt{b} \geq 3\sqrt[3]{b^3} = 3b \\ c^2 + 2\sqrt{c} \geq 3\sqrt[3]{c^3} = 3c \end{array}\right\}$$

de modo que vemos que es cierta la última relación de más arriba; y por tanto, "tirando hacia atrás" se tiene lo buscado.

30. *Para cualesquiera reales positivos a, b y c, con $abc = 1$, se tiene que*

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq a + b + c.$$

Resolución. Reformulando la fórmula buscada tenemos:

$$\frac{1}{3}\left[\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\right]\geq a+b+c,$$

en donde vamos a aplicar tres veces la desigualdad geométrico-aritmética:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)\geq\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}\frac{a^2}{bc}}=\sqrt[3]{\frac{a^3}{abc}}=a,$$

del mismo modo que se prueba:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{b}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\geq b \text{ y } \frac{1}{3}\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right)\geq c,$$

y se concluye la prueba.

31. *Para cualesquiera reales positivos* x_1, x_2 ,..., x_n, *con* $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$, *se tiene que*

$$\frac{x_1}{x_2\left(x_1+x_2+x_3\right)}+\frac{x_2}{x_3\left(x_2+x_3+x_4\right)}+\cdots+\frac{x_n}{x_1\left(x_n+x_1+x_2\right)}\geq\frac{n^2}{3}.$$

Resolución. Llamaremos $x_{n+1}:=x_1$ y $x_{n+2}:=x_2$. Para cada $k=1,\ldots,n$, definamos

$$a_k:=\frac{x_k}{x_{k+1}} \text{ y } b_k:=x_k+x_{k+1}+x_{k+2}.$$

Es evidente que

$$\prod_{k=1}^{n}a_k=1 \text{ y } \sum_{k=1}^{n}b_k=3\sum_{k=1}^{n}x_k=3.$$

La desigualdad a probar equivale a que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}\geq\frac{n^3}{3}.$$

Usando la desigualdad geométrico-aritmética en las expresiones $\sum_{k=1}^{n}b_k$ y $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}$:

$$\frac{3}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}b_k\geq\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}b_k}\iff\frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}b_k}}\geq\frac{n}{3}$$

y aplicándola otra vez más:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}\geq n\sqrt[n]{\frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2}\cdots\frac{a_n}{b_n}}=\frac{n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}{\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}}\geq\frac{n^2}{3}$$

32. *Para cualesquiera reales positivos a, b y c, con* $a+b+c=1$, *se tiene que*

$$\sqrt{ab+c}+\sqrt{bc+a}+\sqrt{c+ab}\geq 1+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}.$$

Resolución. Haciendo cálculos

$$\begin{aligned}\sqrt{ab+c} &= \sqrt{ab+c\,(a+b+c)}=\sqrt{ab+ca+bc+c^2}\\ &= \sqrt{\frac{2\,(ab+ca+bc+c^2)}{2}}\\ &= \sqrt{\frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}+\frac{ca}{2}+\frac{ca}{2}+\frac{bc}{2}+\frac{bc}{2}+\frac{c^2}{2}+\frac{c^2}{2}}\end{aligned}$$

y como $\left(\frac{ca}{2}+\frac{ca}{2}\right)+\left(\frac{bc}{2}+\frac{bc}{2}\right)=c\left[\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right)+\left(\frac{b}{2}+\frac{b}{2}\right)\right]\geq 2c\sqrt{ab}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{ab+c} &\geq \sqrt{\frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}+2c\sqrt{ab}+\frac{c^2}{2}+\frac{c^2}{2}}\\ &= \sqrt{\left(\sqrt{ab}+c\right)^2}=\sqrt{ab}+c,\end{aligned}$$

y de modo análogo se tendrá que

$$\sqrt{bc+a}\geq\sqrt{bc}+a \text{ y } \sqrt{ca+b}\geq\sqrt{ca}+b.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\sqrt{ab+c}+\sqrt{bc+a}+\sqrt{c+ab} &\geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+c+a+b\\ &= \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+1.\end{aligned}$$

33. *Para cualesquiera reales positivos a, b y c, con* $abc=1$, *se tiene que*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 1+\frac{6}{a+b+c}.$$

Resolución. Haciendo cálculos

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)\geq(a+b+c)+6,$$

y en el miembro de la izquierda usamos, factor a factor, la desigualdad armónico-geométrica y la geométrico-aritmética:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}=3 \text{ y } a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}=3;$$

de donde

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)\geq a+b+c$$

y

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)\geq\frac{2}{3}\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}3\sqrt[3]{abc}=6.$$

Sumando término a término en las dos últimas desigualdades se concluye la desigualdad.

34. *Para cualesquiera reales positivos a y b, tales que $a+b=3$, y positivos x, y* y *z* tales que $xyz=1$, *se tiene que*

$$(ax+b)(ay+b)(az+b) \geq 27.$$

¿Cuándo se alcanza la igualdad?

Resolución. Manipulando en la desigualdad de la izquierda:

$$\begin{aligned}(ax+b)(ay+b)(az+b) &= a^3xyz + a^2b(xy+yz+zx) \\ &\quad +ab^2(x+y+z)+b^3 \\ &= a^3 + a^2b(xy+yz+zx) \\ &\quad +ab^2(x+y+z)+b^3 \\ &\geq 27\end{aligned}$$

y por tanto

$$a^3 + a^2b(xy+yz+zx) + ab^2(x+y+z) + b^3 \geq 27$$

es condición eqivalente. La desigualdad aritmético-geométrica, aplicada dos veces, nos da:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3 \\ xy+yz+zx \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2} = 3 \end{array}\right\}$$

Por tanto,

$$(ax+b)(ay+b)(az+b) \geq a^3 + 3\left(a^2b+ab^2\right) + b^3 = (a+b)^3 = 27,$$

luego se verifica la igualdad siempre, y se alcanza la igualdad si y sólo si $x=y=z=1$.

35. *Para cualesquiera reales positivos a, b y c, con $ab+bc+ca=1$, se tiene que*

$$\sqrt[3]{\frac{1}{abc}+6(a+b+c)} \leq \frac{\sqrt[3]{3}}{3abc}.$$

¿Cuándo se alcanza la igualdad?

Resolución. Que el miembro de la izquierda sea una raíz cúbica sugiere que busquemos en su interior un producto de tres factores que sugiera una mayoración por la media aritmética:

$$\begin{aligned}\frac{1}{abc}+6(a+b+c) &= \frac{1+6a^2bc+6ab^2c+6abc^2}{abc} \\ &= \frac{1+3ab(ac+bc)+3bc(ba+ca)+3ac(ab+cb)}{abc}\end{aligned}$$

donde usando ahora que $ab + bc + ca = 1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{abc} + 6(a+b+c) &= \frac{1 + 3ab - 3(ab)^2 + 3bc - 3(bc)^2 + 3ac - 3(ac)^2}{abc} \\ &= \frac{4 - 3\left[(ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2\right]}{abc}\end{aligned}$$

y es fácil ver que $3\left[(ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2\right] \geq (ab + bc + ca)^2 = 1$, luego

$$\frac{1}{abc} + 6(a+b+c) \leq \frac{3}{abc}.$$

La intuición original no parece tener interés ahora mismo, pero ahora podemos afirmar que bastará con probar que

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\frac{3}{abc}} &\leq \frac{\sqrt[3]{3}}{3abc} \iff 3abc \leq \sqrt[3]{abc} \iff 3(abc)^{2/3} \leq 1 \\ &\iff (abc)^2 \leq 1/27.\end{aligned}$$

¡Y mira por donde sí que vamos a usar la deseada media geométrico-aritmética! En efecto:

$$(abc)^2 = (ab)(bc)(ca) \leq \left(\frac{ab + bc + ca}{3}\right)^3 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27},$$

donde hemos tenido en cuenta que $ab + bc + ca = 1$.

Está claro que la igualdad se alcanza cuando y sólo cuando $a = b = c = 1/\sqrt{3}$.

36. *Sean reales positivos a, b y c, con $abc = 1$. Calcula tales a, b y c con suma mínima.*

Resolución. Por la desigualdad geométrico-aritmética se tiene que

$$1 = \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \iff a + b + c \geq 3,$$

luego para $a = b = c = 1$, se tiene suma mínima.

Pero, ¿es única esta terna con suma mínima? En efecto, esa terna hace que se alcance la igualdad en la desigualdad geométrico-aritmética.

37. *Resuelve en $\mathbb{R}^+$ el sistema*

$$\left.\begin{array}{c} a + b + c + d = 4 \\ 1/a + 1/b + 1/c + 1/d = 5 - (abcd)^{-1} \end{array}\right\}$$

Resolución. La desigualdad geométrico-aritmética nos dice que

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd} \\ &\iff abcd \leq 1. \end{aligned}$$

La segunda ecuación se transforma en

$$bcd + acd + abd + abc + 1 = 5abcd,$$

en la que podemos volver a aplicar la citada desigualdad:

$$\begin{aligned} 5abcd &= bcd + acd + abd + abc + 1 \geq 5\sqrt[5]{(abcd)^3} \\ &\iff (abcd)^5 \geq (abcd)^3 \iff (abcd)^2 \geq 1 \\ &\iff abcd \geq 1. \end{aligned}$$

Por tanto, $abcd = 1$, es posible cuando $a = b = c = d = 1$, lo cual nos da la solución $(1, 1, 1, 1)$.

¿Hay más soluciones?

38. *Sean* f, g y h *funciones tales que* $f(x) + g(x) + h(x) \geq 0$, *para cualquier* x real. *Para* $a > 1$, *prueba que la ecuación*

$$a^{f(x)} + a^{g(x)} + a^{h(x)} = 3$$

tiene soluciones si y sólo si las funciones , y tienen ceros comunes. Aplica este resultado para solucionar la ecuación

$$5^{1+\cos \pi x} + 2^{x^2-1} + 2^{2(1-|x|)} = 3.$$

Resolución. Está claro que los ceros comunes de las tres funciones f, g y h son ceros de la ecuación dada:

$$a^{f(x)} + a^{g(x)} + a^{h(x)} = a^0 + a^0 + a^0 = 3.$$

La desigualdad geométrico-aritmética para $a^{f(x)}$, $a^{g(x)}$ y $a^{h(x)}$ nos da

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{a^{f(x)} + a^{g(x)} + a^{h(x)}}{3} \geq \sqrt[3]{a^{f(x)}a^{g(x)}a^{h(x)}} \\ &= \sqrt[3]{a^{f(x)+g(x)+h(x)}} \geq \sqrt[3]{a^0} = 1, \end{aligned}$$

lo cual nos dice que $f(x) + g(x) + h(x) = 0$ cuando tenemos soluciones de la ecuación, y sólo en esos casos:

$$1 = a^{f(x)+g(x)+h(x)} = a^{f(x)}a^{g(x)}a^{h(x)}$$

conlleva $a^{f(x)} = a^{g(x)} = a^{h(x)} = 1$, de donde $f(x) = g(x) = h(x) = 0$.

En la aplicación, con

$$\begin{aligned} f(x) &: = (1+\cos\pi x)\log_2 5 \\ g(x) &: = x^2 - 1 \\ h(x) &: = 2(1-|x|) \end{aligned}$$

tenemos que $f(x) + g(x) + h(x) \geq 0$, de modo que la ecuación

$$5^{1+\cos\pi x} + 2^{x^2-1} + 2^{2(1-|x|)} = 3$$

tiene sus soluciones en los ceros comunes de las funciones f, g y h; a saber, en $x = -1$ y $x = 1$.

39. *Calcula el mínimo de $a^2 + b^2$ si los números reales a y b satisfacen la relación $ab\left(a^2 - b^2\right) = a^2 + b^2$, con $a \neq 0$.*

Resolución. Llamaremos

$$x = a^2 + b^2 \text{ e } y = a^2 - b^2,$$

es decir:

$$a = \sqrt{\frac{x+y}{2}} \text{ y } b = \sqrt{\frac{x-y}{2}};$$

de donde

$$ab = \sqrt{\frac{x+y}{2}}\sqrt{\frac{x-y}{2}}.$$

Por tanto, podemos reescribir las relaciones dadas así:

$$\left(\sqrt{\frac{x+y}{2}}\sqrt{\frac{x-y}{2}}\right) y = x \text{ o bien } \left(\sqrt{\frac{x+y}{2}\frac{x-y}{2}}\right) y = x.$$

Aplicaremos la desigualdad geométrico-aritmética:

$$\sqrt{\frac{x+y}{2}\frac{x-y}{2}} \leq \frac{\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}}{2} = \frac{x}{2},$$

de donde

$$x \leq y\frac{x}{2},$$

y (como $x \neq 0$) ha de ser $y \geq 2$, pues si $y < 2$, caemos en el absurdo de que $x < x$.

Por otro lado, elevando al cuadrado en aquella igualdad:

$$\frac{x+y}{2}\frac{x-y}{2}y^2 = x^2 \iff \left(x^2 - y^2\right)y^2 = 4x^2 \iff x^2 = \frac{y^4}{y^2-4},$$

lo cual conlleva a que $y > 2$.

Haciendo cálculos,

$$\begin{aligned} 0 &\leq (y^2-8)^2 = y^4 - 16y^2 + 64 \\ &\Longrightarrow y^4 \geq 16y^2 - 64 = 16(y^2-4) \\ &\Longrightarrow x^2 = \frac{y^4}{y^2-4} \geq 16 \\ &\Longrightarrow x \geq 4. \end{aligned}$$

Por tanto, ese mínimo posible es $a^2 + b^2 = x \geq 4$, y se puede alcanzar para valores como:

$$a = \sqrt{2+\sqrt{2}} \text{ y } b = \sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

40. *Una circunferencia de radio $r > 0$ y centro S está inscrita en un triángulo de vértices ABC. Una recta que pasa por S intersecta los lados $a = BC$ y $b = CA$ en los puntos D y E, respectivamente. Prueba que el área del triángulo de vértices CDE nunca es menor de $2r^2$. Determina en qué casos se alcanza ese valor de $2r^2$.*

Resolución. El área $\mathbf{A}$ del triángulo CDE se puede obtener como la suma de las correspondientes áreas de los dos triángulos CES y CDS (recuérdese que S está en el segmento DE):

$$\mathbf{A}(CDE) = \mathbf{A}(CES) + \mathbf{A}(CDS) = \frac{1}{2}(CE \times r) + \frac{1}{2}(CD \times r) = \frac{1}{2}r(CE + CD)$$

donde aplicando la desigualdad geométrico-aritmética:

$$\mathbf{A}(CDE) = \frac{1}{2}r(CE + CD) \geq \sqrt{(CE)(CD)} \times r.$$

Sabemos que, en general, el producto de dos lados de un triángulo nunca es inferior que el doble de su área; por tanto, en nuestro caso:

$$(CE)(CD) \geq 2\mathbf{A}(CDE),$$

y la igualdad se alcanza si y solo si el ángulo en el vértice C es recto. Por tanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(CDE) &\geq \sqrt{(CE)(CD)} \times r = \sqrt{2\mathbf{A}(CDE)} \times r \\ &\Longrightarrow (\mathbf{A}(CDE))^2 \geq 2\mathbf{A}(CDE) \times r^2 \\ &\Longrightarrow \mathbf{A}(CDE) \geq 2r^2, \end{aligned}$$

donde la igualdad se alcanza, como hemos observado, si y sólo si $C = \pi/2$ rad. $= 180^o$ (y, consecuentemente, el triángulo CDE es equilátero).

41. (*Desigualdad de Nesbitt*) *Para cualesquiera reales positivos a, b y c correspondientes a las longitudes de los lados de un triángulo, prueba que*

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

Resolución. Observemos que la igualdad se alcanza para $a = b = c$.
Por ser los lados de un triángulo, tenemos que

$$a < b + c,\ b < c + a \text{ y } c < a + b;$$

de ahí, razonando en la primera de las tres desigualdades:

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c}{2} &< b + c \iff \frac{1}{b+c} < \frac{2}{a+b+c} \\ &\iff \frac{a}{b+c} < \frac{2a}{a+b+c}; \end{aligned}$$

de donde haciendo lo análogo para b y c, tenemos que:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = 2.$$

Para la otra desigualdad (*Desigualdad de Nesbitt*, propiamente dicha), después de comenzar con unos cálculos:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \\ &\quad + \frac{b+c}{b+c} + \frac{c+a}{c+a} + \frac{a+b}{a+b} - 3 \\ &= \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{b+c+a}{c+a} + \frac{c+a+b}{a+b} - 3 \\ &= (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3, \end{aligned}$$

y trabajaremos con la desigualdad armónico-aritmética:

$$\frac{\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}}{3} \geq \frac{3}{(b+c)+(c+a)+(a+b)} = \frac{3}{2\,(a+b+c)},$$

pata hacer

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3 \\ &\geq (a+b+c)\frac{9}{2\,(a+b+c)} - 3 \\ &= 9/2 - 3 = 3/2. \end{aligned}$$

42. *Sean a, b y c las correspondientes longitudes de los lados de un triángulo. Si llamas p a su semiperímetro ($2p = a + b + c$), prueba que*

$$(p-a)\,(p-b)\,(p-c) \leq abc/8.$$

Resolución. Trabajando "hacia atrás" tenemos:

$$\begin{aligned}
(p-a)(p-b)(p-c) &\leq abc/8 \\
&\iff \left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right) \\
&\leq abc/8 \\
&\iff \left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{c+a-b}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right) \leq abc/8 \\
&\iff (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc.
\end{aligned}$$

Ahora, la intuición nos dirá que el camino a seguir debe ser (obsérvese la simetría que debe explotarse: el producto de tres factores debe ser mayorado por el de otros tres..) el de probar que

$$b+c-a \leq a,$$

pero esto no se tiene por qué verificar (basta pensar en un triángulo isósceles con $a=1$ y $b=c=2$). Por tanto, esa simetría habrá que buscarla en... probar que:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)} &= \sqrt{[c-(a-b)][c+(a-b)]} \\
&= \sqrt{c^2-(a-b)^2} \leq c;
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
& (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \\
= & \sqrt{(b+c-a)^2(c+a-b)^2(a+b-c)^2} \\
= & \sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)} \\
\leq & \ cba,
\end{aligned}$$

y se alcanza la desigualdad buscada.

Observa que también podríamos haber probado esta desigualdad haciendo uso de la desigualdad geométrico-aritmética:

$$\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)} \leq \frac{(b+c-a)+(c+a-b)}{2} = \frac{2c}{2} = c,$$

hubiésemos logrado lo buscado.

43. Prueba las siguientes relaciones:

  i. $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}$

  ii. $1 < \cos A + \cos B + \cos C \leq 3/2$

  iii. $\cos A \cos B \cos C \leq 1/8$

Resolución. Usando igualdades fundamentales de la suma de ángulos y de ángulos de una suma, podemos establecer

$$\left.\begin{array}{l}\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \\ \cos C = -\cos(A+B) = 1 - 2\cos^2\frac{A+B}{2}\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}\cos A + \cos B + \cos C &= 1 + 2\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right) \\ &= 1 + 4\mathrm{sen}\frac{A}{2}\mathrm{sen}\frac{B}{2}\mathrm{sen}\frac{C}{2}.\end{aligned}$$

Para la segunda relación, como los tres senos son positivos:

$$\begin{aligned}1 &< 1 + 4\mathrm{sen}\frac{A}{2}\mathrm{sen}\frac{B}{2}\mathrm{sen}\frac{C}{2} = \cos A + \cos B + \cos C \\ &\Longrightarrow 1 < \cos A + \cos B + \cos C.\end{aligned}$$

Por otro lado, al ser agudos los tres semiángulos,

$$\begin{aligned}\mathrm{sen}\frac{A}{2}\mathrm{sen}\frac{B}{2}\mathrm{sen}\frac{C}{2} &\leq 1/8 \\ &\Longrightarrow \cos A + \cos B + \cos C \leq 1 + 4/8 = 3/2.\end{aligned}$$

Por fin, para la tercera relación, en el caso de que alguno de los ángulos fuese obtuso (sóllo uno puede serlo, a lo más), entonces

$$\cos A \cos B \cos C \leq 0 < 1/8.$$

En el caso de que los tres sean agudos, los tres coseno serán positivos, y podemos usar la desigualdad geométrico-aritmética así:

$$\sqrt[3]{\cos A \cos B \cos C} \leq \frac{\cos A + \cos B + \cos C}{3} \leq 1/2,$$

usando la última desigualdad probada, luego hemos completado todo lo pedido.

44. Prueba que en cualquier triángulo, la relación entre el semiperímetro p y su área S está dada por la desigualdad

$$p^2 \geq 3\sqrt{3}S.$$

¿Cuándo se alcanza la igualdad?

Resolución. Un uso directo de la desigualdad geométrico-aritmética nos dice que

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} &\leq \frac{3p-(a+b+c)}{3} = \frac{p}{3} \\ &\Longleftrightarrow (p-a)(p-b)(p-c) \leq p^3/27\end{aligned}$$

donde introduciendo la fórmula de Herón ($S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$), tendremos que:

$$S^2 \leq p^4/27 \iff 27S^2 \leq p^4 \iff 3\sqrt{3}S \leq p^2,$$

lo cual es lo buscado.

Concluimos esta recopilación de la aplicación de las diferentes desigualdades entre las medias estudiadas aquí con una revisión de cómo aparecen, de modo natural, en operaciones cotidianas.

45. **La media aritmética**. *En cualquier trapecio de bases (paralelas) con longitudes a y b, la base media tiene como longitud la media de ambas. Si se divide su altura en n partes iguales (así $b_0 := a$ y $b_n := b$), y se consideran dos grupos dados por la división que da al trapecio cualquiera de ellas, tendremos k y $n-k$ partes en cada uno de dichos grupos. ¿Cuánto mide la paralela por esa altura y cuánto valen las áreas de los nuevos trapecios?*

Resolución. La solución de la longitud de cada una de esas longitudes b_k está dada por la fórmula

$$b_k = \frac{ka + (n-k)\,b}{n},$$

que es la media aritmética (ponderada) de a y b; y el área de cada uno de los trapecios T_k está dada por

$$\frac{1}{n}\left(\frac{b_{k-1} + b_k}{2}\right) = \frac{b_{k-1} + b_k}{2n},$$

que vuelve a ser otra media aritmética (ponderada).

46. **La media geométrica**. *La media geométrica MG de dos números a y b verifica la relación*

$$\mathrm{MG} = \sqrt{ab} \text{ o sea } \frac{\mathrm{MG}}{a} = \frac{b}{\mathrm{MG}},$$

por lo que es también llamada la media proporcional.

Resolución. El teorema de la altura en un triángulo rectángulo nos dice que: "La altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre las proyecciones de los catetos sobre ella"; por tanto

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

sin más que razonar sobre la semicircunferencia de diámetro $a+b$ coincidente con la hipotenusa del triángulo rectángulo inscrito en ella. Es claro que la igualdad sólo se puede dar cuando el triángulo rectángulo es isósceles, es decir, cuando $a = b$.

47. **La media geométrica en los triángulos rectángulos.** *En un triángulo rectángulo, la altura a la hipotenusa del triángulo es la media geométrica de las proyecciones de los dos catetos sobre la misma.*

Resolución. Llamaremos x e y a las longitudes de las respectivas proyecciones de los catetos C y c sobre la hipotenusa; y sea h la altura desde el vértice del ángulo recto a la hipotenusa. Entonces, por un lado

$$\left.\begin{array}{l} C^2 = x^2 + h^2 \\ c^2 = y^2 + h^2 \end{array}\right\}$$

y por otro, $(x+y)^2 = C^2 + c^2$. Por tanto,

$$\begin{array}{rcl} x^2 + 2xy + y^2 & = & x^2 + h^2 + y^2 + h^2 \\ & \Longrightarrow & 2xy = 2h^2 \\ & \Longrightarrow & h = \sqrt{xy}. \end{array}$$

48. **La media armónica**. *Si $r > 0$ es la longitud del radio de la circunferencia inscrita en un triángulo de lados a, b y c, entonces sus alturas h_a, h_b y h_c satisfacen:*

$$r = \frac{1}{\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}},$$

es decir, $3r$ es la razón armónica de las alturas.

Resolución. El perímetro $a+b+c$ del triágulo de lados a, b y c y su área S están relacionados por $S = (a+b+c)\,r/2$, y bien sabemos:

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}.$$

Por tanto:

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} & = & \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} \\ & = & \frac{a+b+c}{2S} = \frac{a+b+c}{(a+b+c)\,r} \\ & = & \frac{1}{r}. \end{array}$$

49. **Una vez más, la media armónica**. *En una competición de carrera de relevos 4×100, sabemos de cada uno de los cuatro corredores alcanzó una velocidad media de*

$$10,16m/s; \qquad 10,35m/s; \qquad 10,40m/s; \qquad 10,52m/s.$$

¿Cuál fue la velocidad media desarrollada por el testigo que se fueron entregando los corredores?

Resolución. Los componentes del equipo son los corredores A, B, C y D; por V_A, V_B, V_C y V_D, denotaremos a sus respectivas velocidades y por T_A, T_B, T_C y T_D, sus tiempos. Tendremos que

$$100 = V_A \times T_A + V_B \times T_B + V_C \times T_C + V_D \times T_D.$$

Si queremos calcular la velocidad media $\overline{V}$ durante el tiempo T transcurrido en la carrera, escribiremos:

$$\begin{aligned} \overline{V} &= \frac{400}{T} = \frac{400}{T_A + T_B + T_C + T_D} = \frac{400}{\frac{100}{V_A} + \frac{100}{V_B} + \frac{100}{V_C} + \frac{100}{V_D}} \\ &= \frac{4}{\frac{1}{V_A} + \frac{1}{V_B} + \frac{1}{V_C} + \frac{1}{V_D}}; \end{aligned}$$

es decir, resulta que la velocidad media del equipo es la media armónica de las velocidades individuales.

50. **La media cuadrática**. *Estudiemos la velocidad en caída libre de un objeto. Sabemos por la Física que si desde una torre de altura h dejamos caer un objeto, la velocidad del mismo al llegar al suelo estará dada por la fórmula*

$$v = \sqrt{2gh}.$$

¿Cuál es la velocidad del objeto a mitad de su recorrido? ¿Y cuando ha recorrido un cuarto?¿Y a tres cuartos?

Resolución. De la fórmula dada, $v^2 = 2gh$, se deduce que la velocidad v es proporcional a la raíz del espacio h. Observamos que ello nos dice, por ejemplo, que para duplicar la velocidad habrá que cuadruplicar la altura. La velocidad inicial v_0 es cero, evidentemente, pues parte del reposo. La velocidad media $\overline{V}$ sabemos, igualmente, que es

$$\overline{V} = \sqrt{gh},$$

es decir:

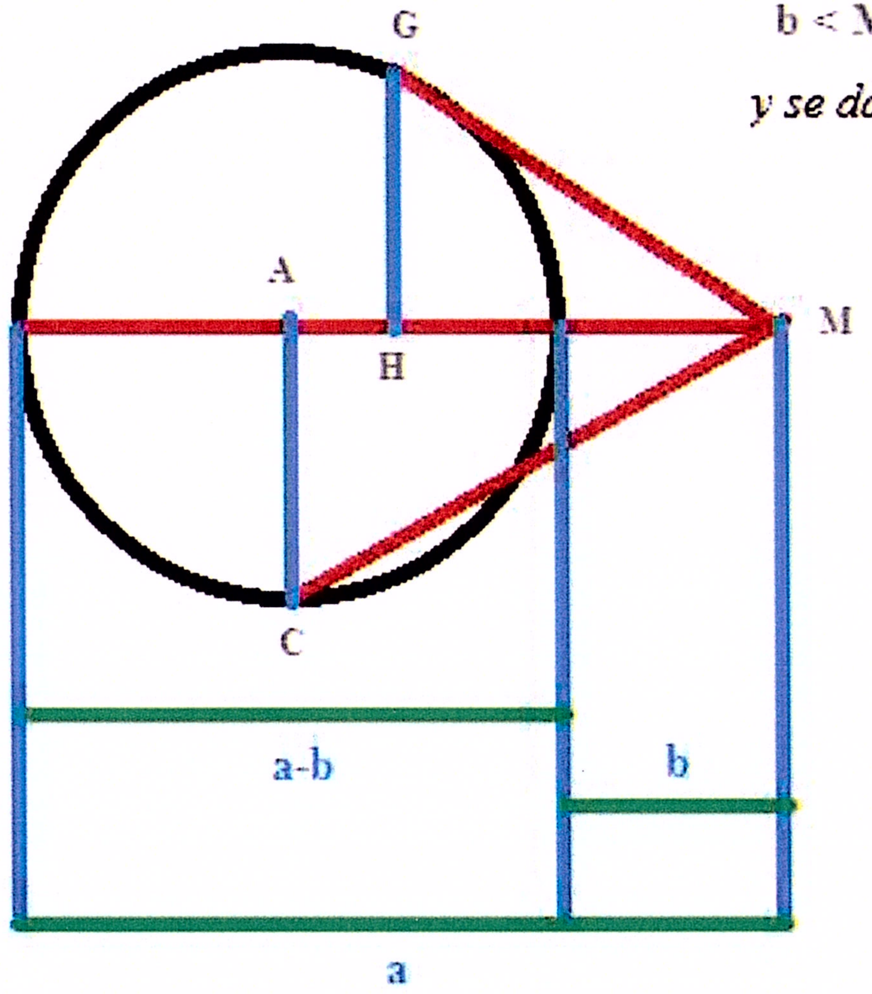
$$\overline{V} = \sqrt{gh} = \sqrt{\frac{0 + 2gh}{2}} = \sqrt{\frac{v_0^2 + v^2}{2}},$$

o sea, la media cuadrática de las velocidades inicial y final. Observamos que las velocidades por las que se nos preguntan son:

$$\begin{aligned} v_{1/2} &= \sqrt{2g\left(\frac{h}{2}\right)} = \sqrt{\frac{0 + 2gh}{2}} = \overline{V}; \\ v_{1/4} &= \sqrt{2g\left(\frac{h}{4}\right)} = \sqrt{\frac{0 + gh}{2}} = \sqrt{\frac{v_0^2 + v_{1/2}^2}{2}}; \\ v_{3/4} &= \sqrt{2g\left(\frac{3h}{4}\right)} = \sqrt{\frac{gh + 2gh}{2}} = \sqrt{\frac{v_{1/2}^2 + v^2}{2}}; \end{aligned}$$

de modo que se revela la velocidad media como una media cuadrática.

Las medias sobre la circunferencia de diámetro a-b



$b < MH < MG < MA < MC < a$

y se da la igualdad si y sólo si $a = b$.

La media armónica:

$MH = 2ab/(a+b)$

La media geométrica:

$MG^2 = ab$

La media aritmética:

$MA = (a+b)/2$

La media cuadrática:

$MC^2 = (a^2+b^2)/2$