Preparación de la Fase Final de las Olimpiadas de la RSME

Enrique de Amo Artero

Universidad de Almería

16 de febrero de 2018

Contenidos

Contenidos

Contenidos

1. Desigualdades numéricas
2. Dos paradigmas

Contenidos

1. Desigualdades numéricas
2. Dos paradigmas
3. Ejercicios

1. Desigualdades

1. Desigualdades

En $\mathbb{R}$ hay un *orden*; es decir, una relación binaria que satisface:

1. Desigualdades

En $\mathbb{R}$ hay un *orden*; es decir, una relación binaria que satisface:

1. *Propiedad reflexiva*:

1. Desigualdades

En $\mathbb{R}$ hay un *orden*; es decir, una relación binaria que satisface:

1. *Propiedad reflexiva*:

Para cualquier número real x, $x \leq x$.

1. Desigualdades

En $\mathbb{R}$ hay un *orden*; es decir, una relación binaria que satisface:

1. *Propiedad reflexiva*:

Para cualquier número real x, $x \leq x$.

2. *Propiedad simétrica*:

1. Desigualdades

En $\mathbb{R}$ hay un *orden*; es decir, una relación binaria que satisface:

1. *Propiedad reflexiva*:

Para cualquier número real x, $x \leq x$.

2. *Propiedad simétrica*:

Si $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces $x = y$.

1. Desigualdades

En $\mathbb{R}$ hay un *orden*; es decir, una relación binaria que satisface:

1. *Propiedad reflexiva*:

Para cualquier número real x, $x \leq x$.

2. *Propiedad simétrica*:

Si $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces $x = y$.

3. *Propiedad transitiva*:

1. Desigualdades

En $\mathbb{R}$ hay un *orden*; es decir, una relación binaria que satisface:

1. *Propiedad reflexiva*:

Para cualquier número real x, $x \leq x$.

2. *Propiedad simétrica*:

Si $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces $x = y$.

3. *Propiedad transitiva*:

Si $x \leq y$ e $y \leq z$, entonces $x \leq z$.

1. Desigualdades

En $\mathbb{R}$ hay un *orden*; es decir, una relación binaria que satisface:

1. *Propiedad reflexiva*:

Para cualquier número real x, $x \leq x$.

2. *Propiedad simétrica*:

Si $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces $x = y$.

3. *Propiedad transitiva*:

Si $x \leq y$ e $y \leq z$, entonces $x \leq z$.

4. Este orden es *total*:

1. Desigualdades

En $\mathbb{R}$ hay un *orden*; es decir, una relación binaria que satisface:
1. *Propiedad reflexiva*:
Para cualquier número real x, $x \leq x$.
2. *Propiedad simétrica*:
Si $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces $x = y$.
3. *Propiedad transitiva*:
Si $x \leq y$ e $y \leq z$, entonces $x \leq z$.
4. Este orden es *total*:
Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x \leq y$ o bien $y \leq x$.

1. Desigualdades

En $\mathbb{R}$ hay un *orden*; es decir, una relación binaria que satisface:

1. *Propiedad reflexiva*:
Para cualquier número real x, $x \leq x$.
2. *Propiedad simétrica*:
Si $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces $x = y$.
3. *Propiedad transitiva*:
Si $x \leq y$ e $y \leq z$, entonces $x \leq z$.
4. Este orden es *total*:
Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x \leq y$ o bien $y \leq x$.

Muy importante: cómo se relacionan orden y operaciones en $\mathbb{R}$:

1. Desigualdades

En $\mathbb{R}$ hay un *orden*; es decir, una relación binaria que satisface:
1. *Propiedad reflexiva*:
Para cualquier número real x, $x \leq x$.
2. *Propiedad simétrica*:
Si $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces $x = y$.
3. *Propiedad transitiva*:
Si $x \leq y$ e $y \leq z$, entonces $x \leq z$.
4. Este orden es *total*:
Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x \leq y$ o bien $y \leq x$.

Muy importante: cómo se relacionan orden y operaciones en $\mathbb{R}$:
i. Para todo x en $\mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$.

1. Desigualdades

En $\mathbb{R}$ hay un *orden*; es decir, una relación binaria que satisface:

1. *Propiedad reflexiva*:

Para cualquier número real x, $x \leq x$.

2. *Propiedad simétrica*:

Si $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces $x = y$.

3. *Propiedad transitiva*:

Si $x \leq y$ e $y \leq z$, entonces $x \leq z$.

4. Este orden es *total*:

Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x \leq y$ o bien $y \leq x$.

Muy importante: cómo se relacionan orden y operaciones en $\mathbb{R}$:

i. Para todo x en $\mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$.

ii. Para cualesquiera x e y en $\mathbb{R}$, $(x - y)^2 \geq 0$.

2. Dos paradigmas

2. Dos paradigmas

i. (Desigualdades entre las *medias armónica*, *geométrica*, *aritmética* y *cuadrática*) Para cualesquiera números reales positivos x e y, se tiene:

$$\min\{x, y\} \leq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \leq \max\{x, y\} \tag{1}$$

2. Dos paradigmas

i. (Desigualdades entre las *medias armónica*, *geométrica*, *aritmética* y *cuadrática*) Para cualesquiera números reales positivos x e y, se tiene:

$$\min\{x,y\} \leq \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \leq \max\{x,y\} \tag{1}$$

alcanzándose la igualdad si sólo si $x = y$.

2. Dos paradigmas

i. (Desigualdades entre las *medias armónica*, *geométrica*, *aritmética* y *cuadrática*) Para cualesquiera números reales positivos x e y, se tiene:

$$\min\{x, y\} \leq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \leq \max\{x, y\} \tag{1}$$

alcanzándose la igualdad si sólo si $x = y$.

ii. (*Desigualdad de Cauchy-Schwarz-Buniakowski*) Dadas dos familias $\{a_1, \ldots, a_n\}$ y $\{b_1, \ldots, b_n\}$ de números reales, se satisface la relación:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \tag{2}$$

2. Dos paradigmas

i. (Desigualdades entre las *medias armónica*, *geométrica*, *aritmética* y *cuadrática*) Para cualesquiera números reales positivos x e y, se tiene:

$$\min\{x,y\} \leq \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \leq \max\{x,y\} \tag{1}$$

alcanzándose la igualdad si sólo si $x = y$.

ii. (*Desigualdad de Cauchy-Schwarz-Buniakowski*) Dadas dos familias $\{a_1,\ldots,a_n\}$ y $\{b_1,\ldots,b_n\}$ de números reales, se satisface la relación:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \tag{2}$$

y se da la igualdad si y sólo si $a_k = b_k$ para todo k entre 1 y n.

2. Aplicaciones

2. Aplicaciones

iii. *Desigualdades generalizadas de las medias*:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$$

alcanzando la igualdad si y sólo si $a_k = b_k$ para todo k entre 1 y n.

2. Aplicaciones

iii. *Desigualdades generalizadas de las medias*:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$$

alcanzando la igualdad si y sólo si $a_k = b_k$ para todo k entre 1 y n.

iv. Cuando en la Desigualdad de Cauchy-Schwarz-Buniakowski, la segunda familia es una reordenación de la primera:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

3. Ejercicios (I)

3. Ejercicios (I)

1. Prueba que para cualesquiera tres números reales positivos a, b y c tales que $abc = 1$, se tiene que

$$\frac{3}{2} \leq \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)}.$$

3. Ejercicios (I)

1. Prueba que para cualesquiera tres números reales positivos a, b y c tales que $abc = 1$, se tiene que

$$\frac{3}{2} \leq \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)}.$$

2. (*Desigualdad de Nesbitt*) Prueba que para cualesquiera tres números reales positivos a, b y c, se tiene que

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

3. Ejercicios (I)

1. Prueba que para cualesquiera tres números reales positivos a, b y c tales que $abc = 1$, se tiene que

$$\frac{3}{2} \leq \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)}.$$

2. (*Desigualdad de Nesbitt*) Prueba que para cualesquiera tres números reales positivos a, b y c, se tiene que

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

Si, además, a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo,

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

3. Ejercicios (II)

3. Ejercicios (II)

3. Sabiendo que son todas números reales positivos, halla las cuatro raíces del polinomio $4x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + 5 = 0$, supuesto que satisfacen la relación

$$\frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{4} + \frac{r_3}{5} + \frac{r_4}{8} = 1.$$

3. Ejercicios (II)

3. Sabiendo que son todas números reales positivos, halla las cuatro raíces del polinomio $4x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + 5 = 0$, supuesto que satisfacen la relación

$$\frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{4} + \frac{r_3}{5} + \frac{r_4}{8} = 1.$$

4. Sabiendo que a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo, prueba que

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

3. Ejercicios (II)

3. Sabiendo que son todas números reales positivos, halla las cuatro raíces del polinomio $4x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + 5 = 0$, supuesto que satisfacen la relación

$$\frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{4} + \frac{r_3}{5} + \frac{r_4}{8} = 1.$$

4. Sabiendo que a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo, prueba que

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

5. Prueba que para cualesquiera tres números reales positivos a, b y c tales que $a+b+c=3$, se tiene que

$$ab + bc + ca \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

3. Ejercicios (III)

3. Ejercicios (III)

6. (*Ayuda a las líneas aéreas a embarcar los equipajes*)
Sabiendo que para ser considerada equipaje de mano la suma de los tres lados de una maleta no puede exceder los 115 centímetros, aventura cuáles pueden de ser sus medidas óptimas.

3. Ejercicios (III)

6. (*Ayuda a las líneas aéreas a embarcar los equipajes*)
Sabiendo que para ser considerada equipaje de mano la suma de los tres lados de una maleta no puede exceder los 115 centímetros, aventura cuáles pueden de ser sus medidas óptimas.

7. (*La media armónica en la vida cotidiana*)
En una carrera de relevos 4×100, la velocidad media (en m/s) de cada uno de los cuatro corredores del equipo ganador ha sido de 10,16, 10,35, 10,40 y de 10,52. Averigua cuál fue la velocidad media a la que corrió el testigo.