Olimpiada Básica de Matemáticas en Guanajuato

@OBMGuanajuato | 8 de octubre del 2022

Desigualdades

Emilio Toscano Oneto

1 Introducción a las desigualdades

Los números reales cumplen la propiedad de seguir un orden, la cual se denota por los símbolos $<$ y $>$, los cuales se leen como "menor que" y "mayor que", respectivamente. Denotaremos a $\mathbb{R}$ como el conjunto de todos los números reales y diremos que $x \in \mathbb{R}$ cuando x sea un número real y en particular escribiremos $x > 0$ cuando x sea un real positivo.

Los números reales satisfacen las siguientes 3 propiedades fundamentales:

Propiedad 1. Para x un número real, x satisface una y sólo una de las siguientes características:

(a) $x > 0$.

(b) $-x > 0$.

(c) $x = 0$.

Propiedad 2. Si $x > 0$ y $y > 0$, entonces $x + y > 0$.

Propiedad 3. Si $x > 0$ y $y > 0$, entonces $xy > 0$.

A partir de estas 3 propiedades se pueden empezar a demostrar y utilizar ciertas operaciones en el contexto de desigualdades como en la primera proposición. De hecho, ya podemos definir cuando un número es menor que otro mediante la relación $<$ (respectivamente con $>$), cuando $a < b$ diremos que a es *menor que* b, si se cumple que $b - a > 0$.

Más adelante, incluiremos a los símbolos $\leq$ y $\geq$ los cuales se leen como "menor o igual" y "mayor o igual", respectivamente y diremos que $a \leq b$ si alguna de dos situaciones se satisface, si $a < b$ o si $a = b$, analogamente sucederá con $a \geq b$. Bajo esta notación, diremos que un número real x es no negativo cuando $x \geq 0$ y en ocasiones se dice que x es no positivo si $x \leq 0$.

Proposición 1.1. *Para a, b, c y d números reales, todas las siguientes afirmaciones se cumplen:*

(a) Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

(b) Si $a < b$ y c es número real cualquiera, entonces $a + c < b + c$.

(c) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.

(d) Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $ab > 0$.

(e) Si $a < 0$ y $b > 0$, entonces $ab < 0$.

(f) Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$.

(g) *Si* $a < b$*, entonces* $-a > -b$.

(h) *Si* $a > 0$*, entonces* $\frac{1}{a} > 0$*, pero si* $a < 0$*, entonces* $\frac{1}{a} < 0$.

(i) *Si* $a > 0$ *y* $b > 0$*, entonces* $\frac{a}{b} > 0$.

(j) *Si* $0 < a < b$ *y* $0 < c < d$*, entonces* $ac < bd$.

(k) *Si* $a > 1$*, entonces* $a^2 > a$*, pero si* $0 < a < 1$*, entonces* $a^2 < a$.

(l) *Para* $0 < a$ *y* $0 < b$*, si sucede que* $a^2 < b^2$*, entonces* $a < b$.

(m) *Para* $b > 0$*, se cumple que* $\frac{a}{b} > 1$ *si y sólo si* $a > b$

Demostración de Proposición 1.1 : Para esta demostración en ocasiones usaremos el símbolo $\iff$ el cuál se lee como "si y sólo si" y hace referencia cuando una afirmación es equivalente a la otra.

(a) Ya que $a < b \iff 0 < b - a$ y $b < c \iff 0 < c - b$, por la propiedad 2 sabemos que $0 < (b - a) + (c - b) \iff 0 < c - a \iff a < c$.

(b) Notemos que $a < b \iff 0 < b - a \iff 0 < (b + c) - (a + c) \iff a + c < b + c$ y se concluye el resultado.

(c) Nuevamente sabemos que $a < b \iff 0 < b - a$ y así como $c > 0$, de la propiedad 3 se sigue que $0 < (b - a)c \iff 0 < bc - ac \iff ac < bc$.

(d) Notemos que $a < 0$ implica que $0 < 0 - a \iff 0 < -a$, por lo tanto, del numeral anterior se tiene que $-ab < 0 \iff 0 < 0 - (-ab) \iff 0 < ab$.

(e) Del inciso (d), se obtiene el resultado.

(f) Puesto que $a < b \iff 0 < b - a$ y $c < d \iff 0 < d - c$, entonces de la propiedad 2 se sigue que $0 < (b - a) + (d - c) \iff 0 < (b + d) - (a + c) \iff a + c < b + d$.

(g) Ya que $a < b \iff 0 < b - a$, del inciso (b) sabemos que $-b < (b - a) + (-b) \iff -b < -a$.

(h) Primero supongamos que $a > 0$. Puesto que $a \cdot \frac{1}{a} = 1 > 0$, entonces necesariamente, por la propiedad 3 se debe cumplir que $\frac{1}{a} > 0$, pues si $\frac{1}{a} < 0$, por el inciso (e) se obtiene una contradicción. El caso $a < 0$ es completamente analogo y $\frac{1}{a} < 0$.

(i) Del inciso anterior, sabemos que $\frac{1}{b} > 0$, luego por la propiedad 3, se concluye que $\frac{a}{b} > 0$.

(j) Por el inciso (d) se tiene que $ac < bc$ y $bc < bd$, pues ambos c y b son positivos, y así por el inciso (a) se concluye que $ac < bd$.

(k) Si $a > 1$, como $1 > 0$, entonces $a > 0$ y así por el inciso (c) se sigue que $a^2 > a$. Para el caso de $0 < a < 1$, se tiene de inmediato por el inciso (c) que $a^2 < a$.

(l) Puesto que $a^2 < b^2 \iff 0 < b^2 - a^2 \iff 0 < (b + a)(b - a)$, entonces debido a que a y b son positivos, entonces de la propiedad 2, $b + a > 0$ y así $\frac{1}{b+a} > 0$ por el inciso (h), de donde al usar la propiedad 3 junto a lo anterior se obtiene que $0 < b - a \iff a < b$ como se quería demostrar.

(m) Supongamos primero que $\frac{a}{b} > 1$. Por el inciso (c), como b es positivo, tenemos que $a > b$ y terminamos. Si ahora suponemos que $a > b$, como $b > 0$, del inciso (h), $\frac{1}{b} > 0$, por lo tanto, del inciso (c) se obtiene $\frac{a}{b} > 1$.

■

Definición 1.2. *Definimos al valor absoluto de un número real x, denotado por $|x|$ como*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1.3. *Cuando tomamos a los números $12, -34, -0.2, 0, -934$ y 0.65, al tomar su valor absoluto se observa que*

$$\begin{aligned} |12| &= 12 & |-34| &= 34 & |-0.2| &= 0.2 \\ |0| &= 0 & |-934| &= 934 & |0.65| &= 0.65 \end{aligned}$$

Proposición 1.4. *Para cualesquiera números reales x y y, se cumple lo siguiente:*

(a) $|x| \geq 0$ *y se da la igualdad solamente cuando* $x = 0$.

(b) $|-x| = |x|$.

(c) $|x|^2 = x^2$.

(d) $|xy| = |x|\,|y|$.

(e) Si $y \geq 0$, *entonces* $|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y$.

Demostración de Proposición 1.4 :

(a) Si $x \geq 0$, no hay nada que probar, si $x < 0$ esto implica que $0 < 0 - x \iff 0 < -x$, por lo tanto como $|x| = -x$ se sigue el resultado. Afirmamos que la igualdad se da únicamente en el caso de $x = 0$, ya demostramos que $x < 0$ implica $|x| > 0$ entonces si $x > 0$, por definición, se tiene que $|x| = x > 0$ de donde no se da la igualdad, mientras que $|0| = 0$ por definición del valor absoluto.

(b) Se sigue de la definición.

(c) De la definición, si $x \geq 0$, entonces $|x| = x$ y es claro que $|x|^2 = x^2$. El caso de $x < 0$ se tiene que $|x| = -x$, y se observa que $|x|^2 = (-x)^2 = (-1)^2x^2 = x^2$ de donde se concluye el resultado.

(d) Se deja como tarea moral para el lector.

(e) Para este numeral habrá que probar las dos direcciones de la implicación. Supongamos primero que $|x| \leq y$ y dividamos la prueba en dos casos. Si $x \geq 0$, por definición se obtiene que $x \leq y$, y más aún $-y \leq 0 \leq x$, y se cumple la desigualdad que buscamos. En caso contrario, si $x < 0$, es claro que $x < 0 \leq y$, luego por definición del valor absoluto, $|x| = -x \leq y$, de donde $x \geq -y$ y en ambos casos se cumplen las desigualdades deseadas.

Veamos ahora que si $-y \leq x \leq y$, entonces se satisface que $|x| \leq y$. Nuevamente procediendo por casos se tiene que si $x \geq 0$, entonces $|x| = x \leq y$ y directamente se cumple la desigualdad. Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$, y en particular, como $-y \leq x$, entonces $y \geq -x$ de donde $|x| \leq y$ en ambos casos y concluimos la prueba.

■

Notemos que de lo anterior se tiene ahora que para cualquier número real x se cumple que $x^2 \geq 0$ y se cumple la igualdad solo cuando $x = 0$. Más aún, del mismo numeral se observa que al considerar la raíz de un cuadrado se tiene que $\sqrt{x^2} = |x|$ lo cual implica que la raíz cuadrada de un real siempre es positivo.

Teorema 1.5. ***(Desigualdad del Triángulo)*** *Para x y y números reales cualesquiera, siempre se cumple*

$$|x+y| \leq |x|+|y|,$$

y la igualdad se da cuando $xy \geq 0$.

Demostración de Teorema 1.5 : De la Proposición 1.4, sabemos que se satisfacen las siguientes igualdades

$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 = |x|^2+2xy+|y|^2$$

Por otro lado,

$$(|x|+|y|)^2 = |x|^2+2|x|\,|y|+|y|^2 = |x|^2+2|xy|+|y|^2.$$

De esta forma, por el inciso (a) de la Proposición 1.4, se tiene que $|xy| \geq xy$ y la igualdad se da solo si $xy \geq 0$ por definición del valor absoluto, por lo tanto,

$$|x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2.$$

Luego como ambos lados de la desigualdad son positivos, por el inciso (l) de la Proposición 1.1, se sigue que $|x+y| \leq |x|+|y|$ como queríamos.

■

La desigualdad del triángulo tiene de hecho una versión extendida, la cual dice que para $x_1, x_2, ..., x_n$ números reales, siempre se satisface

$$|x_1+x_2+...+x_n| \leq |x_1|+|x_2|+...+|x_n|.$$

Donde nuevamente se tiene la igualdad cuando cada $x_1, x_2, ..., x_n$ tienen el mismo signo y la demostración de esta identidad es muy similar o bien se puede hacer usando inducción. Incluso de manera más general, otra versión de la desigualdad del triángulo que en ocasiones se suele usar viene dada por

$$|x_1 \pm x_2 \pm ... \pm x_n| \leq |x_1|+|x_2|+...+|x_n|.$$

Ejemplo 1.6. *Para a y b números reales cualesquiera, se cumple que $||a|-|b|| \leq |a-b|$.*

Para ello veamos que al escribir $a = a-b+b$, por la desigualdad del triángulo se cumple que $|a| \leq |a-b|+|b|$ o equivalentemente, $|a|-|b| \leq |a-b|$. De manera analoga, como $b = b-a+a$ se cumple que $|b|-|a| \leq |b-a|$, por lo cual, se sigue que $|a|-|b| \geq -|a-b|$ (notesé que utilizamos que $|a-b| = |b-a|$). Entonces tenemos

$$-|a-b| \leq |a|-|b| \leq |a-b|.$$

Por lo tanto, del inciso (e) de la Proposición 1.4 se concluye que $||a|-|b|| \leq |a-b|$.

2 Desigualdad MA-MG

Una desigualdad fundamental para números reales no negativos es la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica, usualmente conocida como la desigualdad MA-MG la cual está dada por

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Donde el número $\frac{a+b}{2}$ es la media aritmética y $\sqrt{ab}$ es la media geométrica.

Teorema 2.1. ***(MA-MG.)*** *Sean a y b números reales no negativos cualesquiera, la desigualdad MA-MG siempre se satisface,*

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

y la igualdad se satisface si y sólo si $a = b$.

Demostración de Teorema 2.1 : Para a y b reales no negativos, por la Proposición 1.4, sabemos que $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, es decir, $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, luego,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Notese que la igualdad solo se da cuando $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, lo cual es equivalente a pedir que $a = b$.
■

Nota 2.2. *Es importante recordar que la desigualdad MA-MG solo es válida para números no negativos, pues si a o b fuesen negativos, no necesariamente se cumple la desigualdad. De hecho, si ab fuese negativo en la desigualdad se tendría a $\sqrt{ab}$, la cual no esta definida como un número real y necesitamos que a y b tengan el mismo signo, particularmente positivos.*

Ejemplo 2.3. *Para ver que la desigualdad no necesariamente se cumple para números negativos, consideremos a $a = -1$ y $b = -1$, y observemos que*

$$\frac{(-1) + (-1)}{2} = -1 \geq 1 = \sqrt{(-1)(-1)}$$

Pero claramente $1 > -1$ y lo anterior es absurdo.

Se puede incluso demostrar un analogo a la desigualdad MA-MG pero para números no positivos, pero de igual manera como en se mencionó, no existe una versión de MA-MG que combine a los reales positivos y negativos debido a la raíz cuadrada.

Ejemplo 2.4. *Demuestra que para a y b números no positivos, se cumple el converso de la desigualdad MA-MG, es decir,*

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab}.$$

Si a y b son negativos, entonces $-a$ y $-b$ son positivos y por MA-MG se cumple que

$$\frac{-a-b}{2} \geq \sqrt{ab} \iff \frac{a+b}{2} \leq -\sqrt{ab}$$

Pero como la raíz cuadrada es positiva, entonces $-\sqrt{ab} \leq 0 \leq \sqrt{ab}$, de donde se concluye la desigualdad deseada.

En esta versión de la desigualdad MA-MG, se observa que a diferencia de la original, la igualdad solo se da cuando $a = b = 0$.

Similarmente a la desigualdad del triángulo, la desigualdad MA-MG se puede generalizar para más de 2 números de la siguiente manera.

Teorema 2.5. ***(MA-MG generalizado.)*** *Para reales no negativos $a_1, a_2, ..., a_n$, se satisface la siguiente desigualdad*

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}.$$

Donde se satisface la igualdad si y sólo si $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Una demostración de esta desigualdad se puede realizar usando la versión de Cauchy del principio de inducción matemática.

Ejemplo 2.6. *Supongamos que los números $x_1, x_2, ..., x_n$ son reales positivos. Demuestra que*

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2.$$

Por MA-MG, se cumple que

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}.$$

Luego, al considerar los recíprocos de cada x_i, se tiene que por MA-MG se cumple que

$$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1 x_2 ... x_n}}.$$

Puesto que en ambas desigualdades se tienen a números positivos, entonces al multiplicarlas, se sigue que

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}\right)\frac{1}{n^2} \geq \sqrt[n]{\frac{x_1 x_2 ... x_n}{x_1 x_2 ... x_n}} = 1.$$

De donde se concluye la desigualdad deseada.

Ejemplo 2.7. *Encuentra el valor máximo de $x(1 - x^3)$ para $0 \leq x \leq 1$.*
Puesto que se busca maximizar el producto, queremos usar la desigualdad MA-MG de tal forma que al sumar los términos que usemos, nos de una constante. Notemos que esta idea tiene sentido por que $x \geq 0$ y cuando $x \leq 1$, entonces $1 - x^3 \geq 0$ y podemos usar MA-MG sin preocuparnos de tener números negativos. Intuitivamente, queremos que de alguna manera el término $-x^3$ se cancele cuando hagamos la suma, para ello en lugar de considerar a x podemos tomar a x^3, pero esto puede causar problemas en la parte del producto y tendríamos que considerar a $(1 - x^3)^3$, es decir, a 3 copias de $(1 - x^3)$, por lo tanto, podemos considerar la desigualdad

$$\frac{3x^3 + (1 - x^3) + (1 - x^3) + (1 - x^3)}{4} \geq \sqrt[4]{3x^3(1 - x^3)^3} \iff \frac{3}{4} \geq \sqrt[4]{3x^3(1 - x^3)^3}$$

Luego, $3x^3(1 - x^3)^3 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^4$ y al simplificar, llegamos a que $x(1 - x^3) \leq \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$. De este modo concluimos dos cosas, lo primero es que el valor máximo de $x(1 - x^3)$ debe de ser $\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$ y lo segundo es que dicha igualdad se da cuando $3x^3 = 1 - x^3$, es decir, cuando $x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$, de donde se concluye el problema.

Teorema 2.8. ***(Desigualdad con la media armónica.)*** *Para números reales positivos $x_1, x_2, ..., x_n$ se cumple que*

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_3} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}.$$

Demostración de Teorema 2.8 : Cuando usamos MA-MG con los números positivos $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, ..., \frac{1}{x_n}$, se tiene que

$$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1 x_2 ... x_n}}$$

Luego, al simplificar, se sigue que

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}.$$

Como se quería demostrar.

■

El combinar este último Teorema y la desigualdad MA-MG, se le conoce como la desigualdad MA-MG-MH (media aritmética, media geométrica y media armónica) la cula se satisface para números positivos y nuevamente se da la igualdad cuando $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

3 Ejercicios

La siguiente lista de ejercicios propuestos no están ordenados en ningún orden particular en cuanto a su dificultad.

Ejercicio 3.1. *Supongamos que* $a+b+c=1$ *y que* a,b,c *son positivos. Muestra que*

$$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ca}+\sqrt{c+ab}\leq 2.$$

Ejercicio 3.2. *Demuestra que para números reales cualesquiera* a,b *y* c*, se cumple que*

$$|a|+|b|+|c|-|a+b|-|b+c|-|c+a|+|a+b+c|\geq 0.$$

Ejercicio 3.3. *Prueba que para cualesquiera reales* a *y* b *se satisface la desigualdad*

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leq\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

Ejercicio 3.4. *Para* x,y,z *reales cualesquiera, demuestra que*

$$|x|+|y|+|z|\leq|x+y-z|+|x-y+z|+|-x+y+z|.$$

Ejercicio 3.5. *Para números reales* x *y* y*, demuestra que*

(a) $x^2+xy+y^2\geq 0.$

(b) Si x *y* y *son además positivos, entonces* $x^2-xy+y^2>0.$

Ejercicio 3.6. *De entre todos los rectángulos con perímetro fijo. ¿Cuál es el que tiene más área?*

Ejercicio 3.7. *Sean* a *y* b *números reales tales que* $0\leq a\leq b\leq 1$*, entonces demuestra que*

$$0\leq\frac{b-a}{1-ab}\leq 1,$$
$$0\leq\frac{a}{1+b}+\frac{b}{1+a}\leq 1,$$
$$0\leq ab^2-a^2b\leq\frac{1}{4}.$$

Ejercicio 3.8. *Para cualesquiera números reales* a,b,x *y* y *tales que* $a\geq b$ *y* $x\geq y$*, demuestra que se cumple que* $ax+by\geq ay+bx$*.*

Ejercicio 3.9. *Para* a,b *reales no negativos tales que* $a+b=1$*. Demuestra que*

$$\frac{1}{2}\leq\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}\leq 1.$$

Ejercicio 3.10. *Demuestra que para* x *y* y *reales cualesquiera se satisface* $x^4+y^4+8\geq 8xy$*.*

Ejercicio 3.11. *Supongamos que* $a,b,c>0$ *son números reales que satisfacen* $(1+a)(1+b)(1+c)=8$*. Prueba que* $abc\leq 1$*.*

Ejercicio 3.12. *Sean a, b, c, d números reales tales que $a + d = b + c$, prueba que sa satisface la siguiente desigualdad,*

$$(a - b)(c - d) + (a - c)(b - d) + (d - a)(b - c) \geq 0.$$

Ejercicio 3.13. *Prueba que para x y y números reales positivos, se cumple que*

$$\sqrt{\frac{x^2}{y}} + \sqrt{\frac{y^2}{x}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Ejercicio 3.14. *Para x y y reales positivos, demuestra las siguientes desigualdades*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$$
$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$
$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

Ejercicio 3.15. *Para números reales no negativos a, b, c y d, demuestra que $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq 4$.*

Ejercicio 3.16. *Para $a > 1$, prueba que*

$$a^n - 1 > n\left(a^{\frac{n+1}{2}} - a^{\frac{n-1}{2}}\right).$$

Ejercicio 3.17. *Si a, b, c son reales positivos tales que $abc = 1$, entonces muestra que*

$$\frac{1 + ab}{1 + a} + \frac{1 + bc}{1 + b} + \frac{1 + ac}{1 + c} \geq 3.$$

Ejercicio 3.18. *Si $a, b, c > 0$, muestra que*

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq 9a^2b^2c^2.$$

Ejercicio 3.19. *Sean x, y, z números reales positivos, demuestra que*

$$x^4 + y^4 + z^2 \geq \sqrt{8}xyz.$$

Ejercicio 3.20. *Supongamos que a, b, c son números positivos tales que $abc = 1$. Prueba que*

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}.$$

Ejercicio 3.21. *Demuestra que para a, b, c reales positivos, se cumple que*

$$\frac{9}{a+b+c} \leq 2\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Ejercicio 3.22. *Sean a, b, c reales positivos tales que $a + b + c = 1$. Demuestra que*

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq 64$$

Ejercicio 3.23. ***(Desigualdad de Nesbitt.)*** *Para números reales positivos a, b, c, se cumple que*

$$\frac{a}{b+a} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Hint: Utiliza MA-MH.

Ejercicio 3.24. *Las diagonales del cuadrilátero convexo $ABCD$ se intersectan en el punto O de tal manera que las áreas de los triángulos AOB y COD son 4 y 9, respectivamente. ¿Cuál es el mínimo valor del área del cuadrilátero?*

Ejercicio 3.25. *Para números reales positivos a, b y c, demuestra que*

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

Ejercicio 3.26. *Para n y m números enteros positivos. Demuestra que $\frac{m}{n} < \sqrt{2}$ si y sólo si $\sqrt{2} < \frac{m+2n}{m+n}$.*

Ejercicio 3.27. *Si a, b, c son reales positivos. Demuestra que las desigualdades $a(1-b) > \frac{1}{4}$, $b(1-c) > \frac{1}{4}$ y $c(1-a) > \frac{1}{4}$ no se pueden cumplir todas al mismo tiempo.*

Ejercicio 3.28. *Encuentra todos los valores de x que satisfacen la desigualdad*

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x+9.$$

Ejercicio 3.29. *Sean x, y, z números positivos, muestra que*

$$\frac{2ab}{a+b}+\frac{2bc}{b+c}+\frac{2ca}{c+a} \leq a+b+c.$$

Ejercicio 3.30. *Supongamos que x, y, z son números reales positivos tales que $x+y+z=1$. Prueba que*

$$\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right) \geq 8.$$