Teoría de números: Divisibilidad

OMMGTO 2022
Jesús Liceaga
jose.liceaga@cimat.mx

¿Qué es la Teoría de números?

- La Teoría de Números es la rama de las matemáticas que estudia las propiedades de los **números enteros** y las relaciones entre ellos.

- Su historia se remonta hasta los Babilonios y los Griegos, y se extiende hasta la actualidad, involucrando a grandes personalidades de las matemáticas, como Euclides, Pitágoras, Fermat, Euler, Gauss, Sophie-Germain, etc.

Euclides

Pierre de Fermat

Carl Gauss

Sophie-Germain

NÚMEROS ENTEROS

- El conjunto de los números enteros es

$$\mathbb{Z} = \{\dots, \mathbf{-3}, \mathbf{-2}, \mathbf{-1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \dots\}$$

- Lo podemos dividir en 3:
  - Los enteros positivos: $\mathbb{Z}^+ = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \dots\}$
  - Los enteros negativos: $\mathbb{Z}^- = \{\dots, \mathbf{-3}, \mathbf{-2}, \mathbf{-1}\}$
  - El $\mathbf{0}$.

Divisibilidad

DEFINICIÓN

- Usualmente, decimos que un entero divide a otro si al hacer las división el resultado es entero. Sin embargo, esta definición no es la más conveniente.

> Sean a, b enteros. Decimos que ***a* divide a *b*** y escribimos $a|b$ si existe un entero k tal que $b = ak$.

- Según está definición, $0|0$. ¿Por qué?

PROPIEDADES

En lo que sigue, a, b, c son enteros.

1. En general, $a|a$ y $a|0$.

   5 divide a 5.

2. Si $a|b$ y $b|c$, entonces $a|c$.

   2 divide a 6 y 6 divide a 12. Entonces 2 divide a 12.

3. Si $a|b$ y $a|c$, entonces $a|bx + cy$ para cualesquiera enteros x, y.

   2 divide a 4 y a 6. Entonces 2 divide a 4(2) + 6(-2) = -4.

PROPIEDADES 2

4. Si $a|b$ y $b \neq 0$, entonces $|a| \leq |b|$.

   - En particular, si a, b son positivos, entonces $a \leq b$.

5. Si $a|b$ y $b|a$, entonces $|a| = |b|$.

   - En particular, si a, b son positivos, entonces $a = b$.

¿POR QUÉ?

- ¿Por qué $a|a$?
- Notemos que, en general, $a = a \cdot 1$. Es decir, existe un entero k (el 1) tal que $a = ak$.

- ¿Por qué si $a|b$ y $b|c$, entonces $a|c$?
- Si $a|b$ y $b|c$, entonces existen enteros r, s tales que $b = ar$ y $c = bs$.
- Sustituyendo, esto implica que $c = ars$.
- Es decir, existe un entero k (que es rs) tal que $c = ak$.

Problema

Encuentra todos los enteros positivos n tales que $n + 2 \mid 2n + 8$.

Solución.

- Por la Propiedad 3, $n + 2 \mid (n + 2)(2)$. Es decir, $n + 2 \mid 2n + 4$. ¿Cómo?
- Por la Propiedad 3 y por el punto anterior, $n + 2 \mid (2n + 8)(1) + (2n + 4)(-1)$. Es decir, $n + 2 \mid 4$.
- Como los únicos divisores positivos de 4 son 1, 2 y 4, entonces $n + 2$ es igual a 1, 2 o 4.
- Luego, n es igual a -1, 0 o 2.
- Como por hipótesis n es positivo, entonces la única solución es $n = 2$.