Teoría de Números

Divisibilidad

Olimpiada de Matemáticas en Tamaulipas

1. Introducción

Divisibilidad es una herramienta de la aritmética que nos permite conocer un poco más la naturaleza de un número, gran cantidad de problemas de Olimpiada de Matemáticas pueden ser resueltos utilizando técnicas que teoría de números, en particular divisibilidad que a continuación estudiaremos.

Nota para el entrenador: La primera parte de este entrenamiento es un repaso de aspectos importantes de los números primos que se vieron en el primer entrenamiento de números. La velocidad que se debe tomar en dicha parte del entrenamiento depende de la familiaridad con la que los alumnos conozcan los temas. Si el grupo ya domina dichos conocimientos, no es necesario detenerse mucho en ello.

Como su nombre lo indica, está fuertemente relacionado con la operación de división de un número por otro, recordemos entonces las partes que componen una división.

Definición 1. *En una división, el número que se va a dividir es llamado* dividendo*, el número por el que se va a dividir es el* divisor*, el resultado entero de la división es el* cociente *y las unidades que sobran, que son menores al número original es el* residuo*.*

La primera definición importante en este tema es la siguiente:

Definición 2. *Un número d, es* divisor *de un segundo número n, si el residuo al hacer la división de n por d es cero, es decir, si podemos encontrar un número k tal que $d = nk$. También se dice que n es divisible por d.*

La notación que utilizaremos para decir que un número a divide a un número b será la siguiente: $a|b$. Muy ligada a esta definición tenemos la de *múltiplo*.

Definición 3. *Un número a es* múltiplo *n, si es el resultado de una multiplicación de n por algún número entero, es decir, si existe k tal que $a = nk$.*

Una pregunta que nos podemos hacer inmediatamente es: ¿Hay alguna relación entre los términos de divisor y múltiplo de un número? Basta observar algunos ejemplos para ver que sí, efectivamente, que un número sea divisible por otro, implica que además es múltiplo.

Podemos darnos cuenta fácilmente que el 1 es divisor de cualquier número y también que el 0 es múltiplo de cualquier número. Estas afirmaciones resultan ser muy obvias, pero en muchas ocasiones no las tenemos en cuenta al resolver nuestros problemas.

Sin embargo, ¿de qué sirven estos términos?, ¿cualquier número tiene divisores distintos de 1?, ¿distintos de si mismo?, estas preguntas nos llevan a la siguiente definición:

Definición 4. *Un número es* primo *si tiene solamente dos divisores (positivos), es decir, el 1 y si mismo.*

Por la forma en la que se define la anterior queda excluído el número 1, que bajo ninguna circunstancia debe ser considerado como primo. Los primeros números primos son el 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, etc. De esta lista observamos que el 2 es el único primo par que aparece, ¿habrá más?, de igual manera el 3 es el único múltiplo de 3, el 5 el único múltiplo de 5, y así sucesivamente. Esto siempre es así, forma en la que además podemos reproducir la *Criba de Eratóstenes*, para encontrar números primos.

Una vez más nos hacemos la pregunta, ¿por qué esto es útil?, y la utilidad de esto la tenemos gracias al siguiente resultado:

Teorema 1. ***(Teorema Fundamental de la Aritmética)*** *Todo número entero mayor que 1 puede ser expresado de manera única como multiplicación de números primos.*

Observemos algunos ejemplos: $144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$, $44 = 2 \times 2 \times 11$, $2013 = 3 \times 11 \times 61$.

Nota para el entrenador: Aquí termina el repaso del primer entrenamiento de números.

Definición 5. *El Mínimo Común Múltiplo de dos o más números es el menor número que es múltiplo de todos ellos. Se denota como $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$.*

Definición 6. *El Máximo Común Divisor de dos o más número es el mayor número que los divide a todos sin dejar residuo. Se denota como $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.*

No es de sorprender que la factorización en primos sea una herramienta muy útil para calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos números. La idea es que para formar el m.c.d. ponemos los factores primos que aparezcan en ambos y los ponemos a la potencia más grande para la cuál siguen siendo divisores de ambos números para obtener así el número más grande que siga dividiendo a ambos. Igualmente, para construir el m.c.m. ponemos los factores primos que aperezcan en alguno de los números y a la potencia más baja para la que sigan siendo múltiplos de ambos.

Ejemplo 1. *Sea* $a = 2^3 \times 5^2 \times 7^4$ *y sea* $b = 2^5 \times 3^3 \times 5$*. Calcula* (a, b) *y* $[a, b]$.

Para obtener (a, b) debemos ir poniendo los factores primos a las potencias más grandes que podamos de manera que el número obtenido siga siendo un divisor de ambos. Por ejemplo, el 2 como aparece a la potencia 3 en a y a la potencia 5 en b lo podemos poner, a lo más, a la potencia 3. Luego, el 3 aparece a la potencia 3 en b pero no aparece en a (o de manera alternativa, en a está a la potencia 0) así que no lo debemos poner, pues si en (a, b) aparece un factor 3 este no podrá ser un divisor de a (o alternativamente, lo debemos poner a la potencia 0). De la misma manera vemos que 5 debe aparecer a potencia 1 y el 7 no debe aparecer. Por lo tanto: $(a, b) = 2^3 \times 5$.

Ahora, para construir $[a, b]$ debemos ir poniendo los factores primos a las potencias más pequeñas que podamos de manera que el número obtenido siga siendo un múltiplo de ambos. Por ejemplo el 2 ahora necesita aparecer al menos 5 veces para que $[a, b]$ sea múltiplo de b. De la misma manera, el 3 necesita aparecer al menos 3 veces, el 5 al menos 2 veces y el 7 al menos 4 veces. Por lo tanto $[a, b] = 2^5 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^4$.

Existe una relación interesante entre el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo, que enunciaremos a continuación, pero su demostración se deja a los alumnos en los ejercicios.

Teorema 2.

$$mcd(a, b) = \frac{a \times b}{mcm(a, b)}.$$

Otro resultado importante de divisibilidad es el siguiente:

Proposición 1. *La suma, resta y multiplicación de múltiplos de un número es un múltiplo del mismo número.*

Demostración: Sean a y b dos números múltiplo de n, entonces existen k_1 y k_2 tales que $a = nk_1$ y $b = nk_2$, así:
$a + b = nk_1 + nk_2 = n(k_1 + k_2)$, es decir, $a + b$ es múltiplo de n.

$a - b = nk_1 - nk_2 = n(k_1 - k_2)$, es decir, $a - b$ es múltiplo de n.
$ab = (nk_1)(nk_2) = n^2 k_1 k_2 = n(nk_1 k_2)$, es decir ab es múltiplo de n.

Pero el hecho de que a sea múltiplo de n equivale a decir que n divide a a, $n|a$. Así, la proposición anterior la podemos reescribir en el lenguaje de divisibilidad de la siguiente manera:

Proposición 2. *Si $n|a$ y $n|b$, entonces:*

1) $n|a + b$

2) $n|a - b$

3) $n|ak$, *para cualquier entero* k.

Además de estas que ya se demostraron, existen otras propiedades de divisibilidad importantes para tener en cuenta:

Proposición 3. *Se cumplen las siguientes afirmaciones.*

1) Si $a|b$ y $b|c$ entonces $a|c$.

2) Si $a|b$ y $a|c$ entonces $a|bx + cz$ para cualquier x y z.

3) Si $a|b$ y $b|a$ entonces $a = \pm b$.

4) Si $a|b$, $a > 0$ y $b > 0$, entonces $a \leq b$.

5) Si $a|b$ y $c|d$ entonces $ac|bd$.

Estas propiedades podrán ser demostradas como ejercicio por los alumnos, ya que la forma de proceder es igual a como lo hicimos con las anteriores. Finalmente, enunciaremos otro hecho muy importante y utilizado en muchos problemas de olimpiada.

Proposición 4. *Si $p|ab$ y p es un número primo, entonces $p|a$ o $p|b$.*

Con todo esto estamos listos para demostrar problemas de divisibilidad de dificultades muy distinas.

2. Problemas

Problema 1. Cuando un número n se divide entre 4, se obtiene 9 de cociente y 1 de residuo. Cuando n se divide entre a se obtiene 2 de residuo y 5 de cocientes, ¿cuánto vale a?

Problema 2. ¿Cómo puede ser el máximo común divisor de un primo y otro número?

Más que un ejercicio, el problema anterior es una pregunta rápida, que puede surgir al estar desarrollando la teoría, es importante impulsar en los alumnos la formulación de este tipo de preguntas, por más sencillas que sean, y que fomenten a un aprendizaje propio a base de irse planteando y resolviendo este tipo de dudas.

Problema 3. Demuestra el **Teorema 2**: Si a y b dos enteros positivos entonces

$$(a, b) \times [a, b] = a \times b.$$

Problema 4. Encuentre el entero positivo más pequeño que se puede expresar como suma de 9 enteros positivos consecutivos, como suma de 10 enteros positivos consecutivos y como suma de 11 enteros positivos consecutivos.

Problema 5. Diego trabaja 4 días de la semana y descansa el quinto. En una ocasión empezó a trabajar un lunes y descansó un día domingo. ¿Cuál es la menor cantidad de días que tuvo que trabajar para que esto fuera posible?

Problema 6. Demuestra las afirmaciones de la **Proposición 3**.

Problema 7. Demuestra el criterio de divisibilidad del 3 para números de tres dígitos.

Problema 8. Encuentra los dígitos c y d tales que hacen verdadera la expresión $2^c 9^d = 2c9d$, donde $2c9d$ representa a un número de 4 dígitos.

Problema 9. Encontrar un entero positivo n tal que $n + 109$ sea múltiplo de $n + 28$.

3. Soluciones

Solución 1. De la primera relación tenemos que $n = 4 \cdot 9 + 1 = 37$ y de la segunda podemos obtener que $37 = n = 5a + 2$, resolviendo esta ecuación obtenemos que $a = 7$.

Solución 2. Sea p un número primo y a otro entero cualquiera. El máximo común divisor de p y de a cumple que $(p, a)|a$ y $(p, a)|p$. De la segunda expresión, como p es primo tenemos que $(p, a) = 1$ o $(p, a) = 1$.

Solución 3. Consideremos cualquier primo p que aparezca como factor de a o de b. Supongamos que p aparece con potencia α en la factorización de primos de a y con potencia β en la factorización de primos de b (α o β podría ser 0). Claramente, en la factorización de primos de $a \times b$, p aparecerá con potencia $\alpha + \beta$. Por otro lado, p aparece en la factorización de (a, b) con potencia $min(\alpha, \beta)$ (el mínimo de α y β). Mientras que p aparece en la factorización de $[a, b]$ con potencia $max(\alpha, \beta)$ (el máximo de α y β). Entonces, en la factorización de $(a, b) \times [a, b]$, p aparecerá con potencia $min(\alpha, \beta) + max[\alpha, \beta]$ pero esto es justamente $\alpha + \beta$. Por lo tanto, p aparece en la factorización de $a \times b$ a la misma potencia a la que aparece en la factorización de $(a, b) \times [a, b]$. Y como el razonamiento anterior es válido para cualquier primo p, obtenemos la igualdad deseada $a \times b = (a, b) \times [a, b]$.

Solución 4. Sea n el número buscado. Debe cumplir que: $n = (a + 1) + (a + 2) + \ldots + (a + 9) = 9a + 45 = 9(a + 5)$
$n = (b + 1) + (b + 2) + \ldots + (b + 10) = 10b + 55 = 5(2b + 11)$
$n = (c + 1) + (c + 2) + \ldots + (c + 11) = 11c + 66 = 11(c + 6)$
Esto indica que n debe ser múltiplo de 5, 9 y 11, y el más pequeño es $[5, 9, 11] = 5 \times 9 \times 11 = 495$.

Solución 5. Entre el lunes que empezó a trabajar y el domingo que descansó, pasaron semanas completas, así que la cantidad de días transcurridos debe ser un múltiplo de 7. Diego descansa cada quinto día, por lo que también, el número de días transcurridos debe ser un múltiplo de 5. Como el mínimo común múltiplo de 7 y 5 es 35, y Diego trabaja $\frac{4}{5}$ del tiempo entre descanso y descanso, entonces trabajó 28 días.

Solución 6. Demostremos los incisos:

1) Como $a|b$, entonces existe n tal que $b = an$ y como $b|c$ entonces existe m tal que $c = bm$, así que $c = bm = (an)m = a(nm)$, es decir $a|c$ como queríamos.

2) Si $a|b$, de la proposición 2 podemos afirmar que $a|bx$ para cualquier x y como $a|c$ por la misma razón $a|cz$ para cualquier z, finalmente, por el primer inciso de dicha proposición $a|bx + cz$.

3) Como $a|b$, entonces existe n tal que $b = an$, además $b|a$ por lo que para alguna m tenemos que $a = bm = (an)m = (mn)a$, de donde se sigue que $nm = 1$, y como tanto n como m son enteros entonces $n = m = 1$ o $n = m = -1$, es decir $a = \pm b$.

4) Si $a|b$, existe n tal que $b = an$, como $b > 0$ y $a > 0$ se debe tener que $n > 0$ y entonces $a \leq b$.

5) De $a|b$ y $c|d$ obtenemos que $b = an$ y $d = cm$ para algunas n y m, entonces $bd = (an)(cm) = ac(nm)$, es decir que $ac|bd$.

Solución 7. Sea abc un número de tres dígitos (cada letra es un dígito). El criterio de divisibilidad del 3 nos dice que $3|abc$ si $3|a+b+c$, así que supongamos que $3|a+b+c$ y demostraremos que $3|abc$. De inicio sabemos que $3|9$, por lo que entonces $3|9k$ para cualquier entero que sea k, en particular $3|9b$, de igual forma, como $3|99$, tenemos que $3|99a$, así que $3|99a+9b$, y como además $3|a+b+c$ entonces $3|99a+9b+a+b+c = 100a+10b+c = abc$, por lo que queda demostrado dicho criterio.

Solución 8. Notemos primero que d no puede ser 0, pues tendríamos que $2^c = 2c90$ y la única potencia de 2 de 4 dígitos que comienza con 2 es 2048, así que $2c9d$ debe ser un múltiplo de 9. Por el criterio de divisibilidad del 9 tenemos que $2+c+9+d = 18$ o $2+c+9+d = 27$, los otros múltiplo de 9 quedan descartados por ser menores o mayores a lo posible en la suma. Así que $c+d = 7$, o bien $c+d = 16$. También podemos afirmar que $d < 4$, pues $9^4 > 3000$. Tampoco c puede ser 0 porque no hay una potencia de 9 de 4 dígitos que comience por 2, así que $2c9d$ es par, de donde se sigue que $d = 2$. De las ecuaciones antes dichas obtenemos que $c = 5$ o $c = 14$, pero deben ser dígitos, así que la única solución posible es $c = 5$, $d = 2$ y se combrueba que $2^5 \times 9^2 = 2592$.

Solución 9. Supongamos que $n+109$ es múltiplo de $n+28$, es decir $n+28|n+109$. Entonces $n+28|n+109-(n+28) = 81$. Los divisores de 81 son 1, 3, 9, 27 y 81. Como $n+28$ debe ser uno de estos divisores y como n es un entero positivo, la única opción es que $n+28 = 81$, es decir, que $n = 53$.