Teoría de Números. Taller 4

14 de Abril 2018

DEFINICIONES Y PROPIEDADES DE DIVISIBILIDAD

Si aprendiste a dividir igual que nosotros, cuando divides 2013 entre 4 haces una casita donde metes al 2013 y dejas al 4 afuera más o menos como en la puerta. Al terminar la división, te queda 503 en el techo de la casita y un 1 en el sótano. Más o menos así:

Si queremos expresar eso como una igualdad, diríamos que

$$2013 = 4(503) + 1$$

Resulta que para cualesquiera dos enteros podemos hacer eso: meter uno de ellos a la casita, dejar el otro afuera y hacer la división. Si dejamos al mayor afuera, el número de arriba va a ser 0.

Resulta importante tener siempre presente la siguiente definición.

Definición (previa). Decimos que un entero a divide a un entero b si existe un entero x tal que

$$b = ax$$

La anterior definición tiene un finísimo detalle que queremos corregir. Observa que bajo la anterior definición, se cumple que 0 divide a 0 pues para cualquier entero, tenemos que $0a = 0$. Vamos a arreglar esa definición agregando nada más una palabra.

Definición. Decimos que un entero a divide a un entero b si existe un único entero x tal que

$$b = ax$$

Con la anterior corrección, ya no se cumple que 0 divide a 0 pues no existe un único entero sino una infinidad que cumplen lo pedido y por lo tanto no satisface la definición.

Nunca dividas entre 0. Es importante que tengas cuidado y cuando dividas entre letritas, verifiques que esa letrita no es el 0.

Para algunas personas, hay una confusión semántica que quisiéramos atender.

Definición. Decimos que a es múltiplo de b si se cumple que b divide a a. En ese caso, decimos que es b divisor de a.

Notación. Cuando a divida a b escribiremos

$$a \mid b$$

En caso contrario, escribiremos

$$a \nmid b$$

Partiendo de nuestra definición revisada de divisibilidad, el siguiente teorema enuncia las propiedades más importantes de la divisibilidad. Seguro que estamos considerando más de las que tradicionalmente se consideran.

Teorema (Propiedades de la divisibilidad). Para a, b enteros, se cumple que

(1) Para todo entero $x \neq 0$, se tiene que $1 \mid x$

(2) Para todo entero $x \neq 0$, se tiene que $x \mid 0$

(3) Para todo entero $x \neq 0$, se tiene que $x \mid x$ (Propiedad reflexiva.)

(4) Si $a \mid b$ y $b \neq 0$, se sigue que $|a| \leq |b|$. Si $a, b \geq 0$, entonces se sigue que $a \leq b$.

(5) $a \mid b$ si y sólo si $|a| \mid |b|$ donde $|x|$ es el valor absoluto de x. Además $a \mid b$, $b \mid a$ si y sólo si $|a| = |b|$. Cuando $a, b \geq 0$, esto sucede si y sólo si $a = b$.

(6) Es posible que $a \mid b$ pero que $b \nmid a$. (Propiedad no simétrica.)

(7) Si a, b, c son enteros tales que $a \mid b$, $b \mid c$ entonces $a \mid c$. (Propiedad transitiva.)

(8) Si $a \mid b$, entonces $a \mid bx$ para todo entero x.

(9) Si $a \mid b$, $a \mid c$ entonces $a \mid (b + c)$.

(10) Si $a \mid b$, $a \mid c$ entonces $a \mid (bx + cy)$.

Por la propiedad (2), en el caso particular de $x = 2$, quiere decir que el 0 es un número par. En general, no es necesario hacer la distinción entre los múltiplos de x y el 0 pues el 0 es siempre múltiplo de x.

Ejercicios

Ejercicio 1. El producto de tres números distintos entre sí y mayores que uno es 100, ¿Cuáles son estos tres números?

Ejercicio 2. ¿Cuántos enteros positivos n cumplen que al dividir 399 entre n quede 14 de residuo?

Ejercicio 3. Al dividir 999 entre n quedan 2 de residuo.

1. ¿cuánto queda al dividir 2009 entre n?
2. ¿Puede ser n de dos cifras?
3. Si n es un número de dos cifras, ¿cuánto queda al dividir 2009 entre n?

Ejercicio 4. Rubén le cambia dos dígitos al número 888 buscando un número de tres dígitos lo más grande posible que sea divisible entre 8. Javier le cambia dos dígitos al número 888 buscando un número de tres cifras lo más pequeño posible que sea divisible entre 8. ¿Cuánto vale la diferencia entre ambos números?

Ejercicio 5. Encontrar un número a tal que la suma

$$a + 2a + 3a + 4a + 5a + 6a + 7a + 8a + 9a$$

resulte ser un número con todas sus cifras iguales.

Ejercicio 6. El producto de las edades de mis hijas es 1664. Si la edad de la más grande es el doble que la de la más pequeña, ¿cuántas hijas tengo?

Ejercicio 7. Encuentre todos los enteros positivos n tales que sea $n + 8$ un múltiplo de n.

Ejercicio 8. Determine el mayor entero positivo n tal que existe una reordenación a, b, c, d de los números 3, 6, 9, 12 para la cual $\sqrt[n]{3^a 6^b 9^c 12^d}$ es un entero.

Ejercicio 10. Se tienen tres cartas, una marcada con el número m, otra con el número n y otra con el número p, todos ellos enteros con $0 < m < n < p$. Eugenio, Miguel y Pablo sostuvieron un juego de varias rondas que consiste en lo siguiente: Durante cada ronda, los jugadores toman una carta al azar y cada uno obtiene tantos puntos como indica la carta que toma y estos puntos se van acumulando. Eugenio ganó el juego con 20 puntos, Miguel se quedó con 10 puntos y Pablo con 9. Se sabe que en la última ronda Miguel obtuvo puntos p.
(a) ¿Cuántas rondas se jugaron?
(b) ¿Quiénes pudieron haber tomado la carta marcada con m en la primera ronda?

Este material fue tomado del libro "Diminuto Curso de Teoría de Números y Anexas" de Eugenio Flores Alatorre de Carma
Material selecionado por Roberto Kú y Horacio Sáenz.

Parte 2. Números primos

Elaborado por: Roberto Kú y Horacio Sáenz.

Definición: Un número es primo si tiene únicamente 2 divisores positivos. A los número que no son primos se les conoce cómo números compuestos.

Ejemplo: 17 es número primo, porque sólo 1 y 17 dividen a ese número exactamente; por otro lado 12 no es primo, pues tanto 1, 2, 3, 4,6 y 12 lo dividen.

Nota: El 1 no es primo porque solamente es divisible por un número entero positivo, él mismo, es por ello que al 1 se le conoce como la unidad.

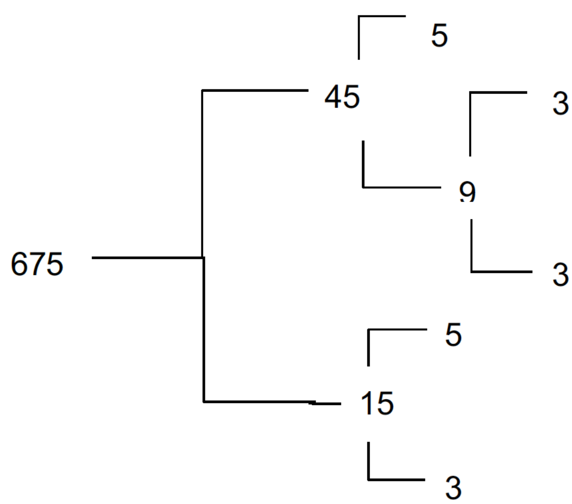
Ejercicio: ¿Cuáles de los siguientes números son primos: 1, 2, 21, 47, 121, 253, 1001?

Definición: Factorizar en primos un número significa hallar los primos que al multiplicarse entre sí dan ese número; esto viene del Teorema Fundamental de la Aritmética.

Teorema: (Teorema Fundamental de la Aritmética) Todo número mayor a 1 se puede factorizar en primos.

Demostración: Dado el número N hay de 2 opciones, N es primo (Ya acabamos), N no es primo por lo que $N = ab$ para algunos a, b diferentes de 1 y N, si hacemos lo mismo para a y luego para b, habremos factorizado N.

Ejemplo: Factorizar el número 675. $675 = 3X3X3X5X5 = 3^3X5^2$



Ejercicio: Factorizar el número 216.

Nota: Hay una segunda parte del teorema fundamental de la aritmética que por ahora consideraremos válida. Esta dice que la factorización es única.

Teorema: Existen infinitos primos.

Demostración: Supongamos lo contrario, hay una cantidad finita de primos. Se escriben en una lista todos los primos, y sea P la multiplicación de todos ellos; $P + 1$ no es divisible entre ningún primo de la lista, pero todo número es producto de primos, por lo que debe haber primos que no están en esa lista, esto es una contradicción. Como suponer que hay un número exacto de primos nos llevó a una contradicción, entonces esta era falsa y hay infinitos de ellos.

Teorema: Cualquier número compuesto x tiene un divisor d tal que $1 < d \leq \sqrt{x}$. Este teorema resulta ser un método útil para identificar números primos más rápidamente.

Demostración: Por medio de una contradicción, pues si $x > y, z > 1$, supongamos que: $y, z > \sqrt{x}$, entonces $x = yz > d\sqrt{x} > \sqrt{x}\sqrt{x} = x$. Esto es ilógico, por lo tanto no es cierto.

Ejemplo: Si tomamos el caso del 559, basta con buscar que algún primo menor a su raíz (23.64 aproximadamente) lo divida: intentando los casos, ni 2, 3, 5, 7, 11 lo dividen, pero sí 13, por lo que 559 es un número compuesto.

Ejercicio: ¿2017 es primo? ¿997 es primo?

Definición: La Criba de Eratóstenes es un método para identificar números primos en la cual se enlistan en 10 columnas la serie de números hasta el que queramos probar; para luego tachar el número 1, pues no es primo, y a partir del 2, ir dando saltos de 2 en 2 y tachar los números en los que vamos cayendo hasta terminar; luego de 3 en 3, después de 4 en 4 y así hasta pasar la raíz del último número en la tabla; de esa manera, en la Criba ya sólo queden sin tachar los primos.

Ejemplo: Determinar los números primos menores a 50. El 1 sabemos no es primo, lo tachamos.
El 2 al no estar tachado es primo, tachamos todos sus múltiplos (damos saltos).
El 3 al no estar tachado es primo, tachamos todos sus múltiplos.
El 5 al no estar tachado es primo, tachamos todos sus múltiplos.
El 7 al no estar tachado es primo, tachamos todos sus múltiplos.
Hemos acabado, pues 8 se pasa de la raíz cuadrada de 50.
Los números que quedaron sin tachar son primos.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

Nota: Otra versión de la Criba se basa en 6 columnas donde tachas los números debajo del 2, 4 y 6 porque son pares, luego los números debajo del 3 porque son múltiplos de 3 y de ahí en más los múltiplos de los siguientes pares está en las diagonales que también puedes tachar. **Ejercicio:** Encuentra todos los números primos menores a 100.

Ejercicio: ¿Por qué podemos detenernos cuando pasamos la raíz cuadrada?

Teorema: Cualquier divisor a de m se puede conseguir mediante el agrupamiento de algunos de sus factores primos. El número 12 se factoriza en 2^2x3, y el número 60= 2^2x3x5. Podemos ver que 12 "forma parte" 60, es decir 60 = 12x5, por lo que 12 es divisor de 60.

Ejemplo: Escribir todos los divisores de 12.

Nota: Los divisores de un número son pues las combinaciones en los exponentes de los primos que factorizan dicho elemento, desde el 0 hasta el coeficiente que tiene la factorización: 12 es factorizado como 2^2x3, entonces obtenemos sus divisores formando todos los posibles agrupamientos. 2^0x$3^0 = 1$
2^0x$3^1 = 3$
2^1x$3^0 = 2$
2^1x$3^1 = 6$
2^2x$3^0 = 4$
2^2x$3^1 = 12$

Ejercicio: Encuentra todos los divisores del 96.

Problemas de la parte 2

1. ¿Cuántos dígitos tiene el número 22017x52020?
2. ¿Cuántos 0?s hay al final de 10!? ($N! = N(N-1)(N-2)...(3)(2)(1)$)
3. ¿Cuántos 0?s hay al final de 100!?
4. ¿Cuántos divisores tiene el 10!?
5. ¿Cuánto es el producto de los divisores de 10!?
6. Demuestra que el producto de cualesquiera 5 números consecutivos es múltiplo de 120.
7. ¿Es cierto que si n es natural, entonces $n^2 - n + 41$ es primo?
8. Encontrar el mayor número entero que no tenga cifras repetidas y tal que el producto de sus cifras sea el cuadrado del otro número distinto de cero.
9. En una lista están escritos los números del 1 al 16. ¿Es posible tachar 4 de ellos de manera que al multiplicar cualesquiera 2 de los 12 que queden el resultado no sea el cuadrado de un número entero?
10. Prueba que si $2n - 1$ es primo entonces n es 2 o n es impar.
11. Prueba que si $2n - 1$ es primo entonces n es primo.
12. Prueba que si $2n + 1$ es primo entonces n es potencia de 2.
13. Prueba que si t es entero mayor a uno, el número $t^{4m} + t^{2m} + 1$ nunca es primo.
14. Cuánto es la suma de los divisores de 10!?

Este material fue elaborado con base en el libro ”Diminuto curso de teoría de números y anexas” de Eugenio Daniel Flores Alatorre, y el material elaborado por Gustavo Meza para el taller de finalistas impartido el para el taller de entrenamiento para la final impartido el sábado 17 de junio de 2017.